УДК 539.12

ПРЕЦИЗИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. АНДРЕЕВ[1)]

[1)]*Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Беларусь*

Прецизионный расчет энергетических поправок водородоподобных систем является актуальной проблемой, поскольку экспериментальные измерения таких значений выполняются с высокой точностью. В работе используются новые специальные квадратурные формулы для сингулярных и гиперсингулярных интегралов при численном решении уравнения Шрёдингера в импульсном пространстве с потенциалом линейного запирания, кулоновским и корнельским потенциалами. Показано, что энергетический спектр квантовой системы в этом случае может быть рассчитан с точностью, намного превосходящей таковую других методов. Разработанная процедура расчета энергетических спектров легко обобщается на релятивистские уравнения, где потенциалы обычно получены в импульсном пространстве, и может быть применена для изучения и вычисления различных эффектов в двухчастичных квантовых системах, таких как водородоподобные атомы, адронные атомы и связанные кварковые системы.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл; уравнение Шрёдингера; импульсное пространство; квадратурные формулы.

Благодарность. Работа была поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (договор № Ф17Д-001 от 01.06.2017 г.). Автор благодарен Самарскому университету (Россия) за техническую поддержку численных расчетов в системе *Wolfram Mathematics*.

Образец цитирования:
Андреев ВВ. Прецизионные методы решения уравнения Шрёдингера с сингулярными потенциалами в импульсном пространстве. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2019;1:97–109.

For citation:
Andreev VV. Precision methods for solving the Schrödinger equation with singular potentials in momentum space. *Journal of the Belarusian State University. Physics*. 2019;1:97–109. Russian.

Автор:
Виктор Васильевич Андреев – доктор физико-математических наук; профессор кафедры теоретической физики факультета физики и информационных технологий.

Author:
Viktor V. Andreev, doctor of science (physics and mathematics); professor at the department of theoretical physics, faculty of physics and information technologies.
vik.andreev@gsu.by

PRECISION METHODS FOR SOLVING THE SCHRÖDINGER EQUATION WITH SINGULAR POTENTIALS IN MOMENTUM SPACE

V. V. ANDREEV [a]

[a]*Francisk Skaryna Gomel State University, 104 Saveckaja Street, Gomel 246019, Belarus*

A high precise calculation of various energy corrections of the hydrogen-like systems is a relevant problem since the experimental measurements of such values are performed with high accuracy. We use new special quadrature formulas for singular and hypersingular integrals to numerically solve the Schrödinger equation in momentum space with the linear confinement potential, Coulomb and Cornell potentials. It is shown that the energy spectrum of a quantum system can be calculated with an accuracy far exceeding other calculation methods. These methods are easily generalized to the relativistic equations, where the potentials are generally derived in momentum space. Consequently, the developed procedure to obtain the energy spectra can be used to study and calculate various effects in the two-body quantum systems, such as hydrogen-like atoms, hadronic atoms and bound quark systems.

Key words: hypersingular integral; Schrödinger equation; momentum space; quadrature formulas.

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (agreement No. Ф17Д-001 dated 06.01.2017). The author is grateful to the Samara University (Russia) for the technical support of numerical calculations in the *Wolfram Mathematics* system.

Введение

Численное исследование некоторых релятивистских моделей, основанных на КХД, приводит к решению задач в импульсном пространстве, например к уравнению Бете – Солпитера [1], бесспиновому уравнению Солпитера [2], модели CST [3], пуанкаре-инвариантной квантовой механике для описания связанных состояний [4] и др. Обычно эти уравнения являются интегральными и сводятся к уравнению Шрёдингера в нерелятивистском пределе.

Преимущества применения импульсного представления для решения задач квантовой физики привлекают внимание исследователей в течение длительного времени [5; 6]. Однако использование импульсного пространства осложняется тем, что даже простейшие потенциалы взаимодействия в импульсном представлении приводят к уравнениям с особенностями. В настоящее время имеется много работ, посвященных решению интегральных уравнений для связанных состояний с сингулярными ядрами. Так, в [7–13] разработаны различные методы численного решения уравнений с логарифмической сингулярностью.

Уравнения с линейным запирающим потенциалом, содержащим двухполюсную особенность, рассмотрены в [6; 14–21]. Наиболее часто используется метод вычитания (метод Ланде), который позволяет избавиться от сингулярности интеграла с помощью аналитического контрчлена. По этой причине точность решений для ряда задач с кулоновским и линейным ограничивающими потенциалами относительно низкая (10^{-4}–10^{-6}) [10; 16–18], хотя в координатном пространстве можно достичь точности более высокого порядка (10^{-11}–10^{-13}) [22].

Вопрос точности в вычислении характеристик связанных квантовых систем имеет не только академический характер. Прецизионный расчет различных энергетических поправок водородоподобных систем является актуальной проблемой, поскольку экспериментальные измерения таких значений выполняются с высокой точностью ($\sim 10^{-13}$) [23; 24].

Таким образом, при определении энергетических характеристик связанных квантовых систем следует выделить задачу разработки вычислительных и математических методов, которые позволят упростить схемы расчета и получить результаты с высокой степенью точности, необходимой для эксперимента. Наиболее перспективным методом повышения точности решения интегральных уравнений связанных систем с сингулярными ядрами является метод квадратур, где сингулярности включены в весовые коэффициенты. Эта идея не нова и активно используется в численных расчетах [25–28]. В [29] такой подход использовался при решении уравнения Шрёдингера с кулоновским потенциалом (логарифмическая особенность), что позволило повысить точность решения до (10^{-13}–10^{-14}).

Цель исследования – разработка методов вычислений энергетических спектров связанных систем с кулоновским, линейным запирающим и корнельским потенциалами в импульсном представлении для произвольных орбитальных моментов ($\ell \geq 0$) с использованием новых квадратурных формул.

Методика решения интегральных уравнений

Уравнение Шрёдингера для центрально-симметричных потенциалов $V(|\mathbf{r}|) = V(r)$ после парциального разложения можно записать следующим образом:

$$\frac{k^2}{2\mu}\varphi_{n\ell}(k) + \int_0^\infty V_\ell(k, k')\varphi_{n\ell}(k')k'^2 dk' = E_{n\ell}\varphi_{n\ell}(k),\ k = |\mathbf{k}|, \tag{1}$$

где $\varphi_{n\ell}(k)$ – радиальная часть трехмерной волновой функции $\varphi(\mathbf{k})$; $V_\ell(k, k')$ – ℓ-парциальная компонента центрально-симметричного потенциала, определенная с помощью сферической функции Бесселя $j_\ell(x)$:

$$V_\ell(k, k') = 2\pi\int_0^\infty j_\ell(k'r)\,j_\ell(kr)V(r)r^2 dr.$$

Интегральное уравнение (1) преобразуется в матричное с помощью квадратурных формул для интегралов. В результате численное решение (1) сводится к задаче на собственные значения матрицы H, возникающей при использовании квадратурных формул:

$$\sum_{j=1}^{N} H(k_i, k_j)\varphi(k_j) = \sum_{j=1}^{N} H_{ij}\varphi_j = E^{(N)}\varphi_i,$$

где N – число абсцисс; $E^{(N)} \approx E_{n\ell}$. Весовые коэффициенты $\tilde{\omega}_j$ определяются через стандартные весовые множители ω_j для интервала $[-1, 1]$, а матричные элементы H_{ij} – формулой

$$H_{ij} = \frac{k_j^2}{2\mu}\delta_{i,j} + \tilde{\omega}_j k_j^2 V_l(k_i, k_j).$$

Однако в импульсном пространстве уравнение имеет сингулярное ядро как для кулоновского, так и для линейного запирающего потенциала. Кулоновский потенциал $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ в импульсном пространстве удовлетворяет уравнению

$$V_\ell(k, k') = -\frac{\alpha Q_\ell(y)}{\pi(kk')^2}, \tag{2}$$

где α – безразмерная константа связи; функция $Q_\ell(y)$ – полином Лежандра второго рода; параметр y определяется соотношением

$$y = \frac{k^2 + k'^2}{2kk'}.$$

Потенциал (2) имеет логарифмическую особенность при $k = k'$ ($y = 1$) в силу свойств полинома $Q_\ell(y)$.

Потенциал с линейным запиранием $V(r) = \sigma r$ в импульсном пространстве записывается в виде

$$V_\ell(k, k') = \frac{\sigma Q'_\ell(y)}{\pi(kk')^2}. \tag{3}$$

Как следует из (3), функция $Q'_\ell(y)$ является гиперсингулярной в случае $k = k'$, следовательно, $V_\ell(k, k')$ – также гиперсингулярный потенциал.

Методы решения уравнений с сингулярными ядрами

При решении уравнения с сингулярным ядром наиболее часто используется метод вычитания Ланде, когда сингулярность сокращается за счет специального контрчлена [15–17; 20; 21; 30]. В отличие от этого метода характерной чертой разработанного подхода является включение сингулярностей в весовые коэффициенты квадратурных формул. Применяя методику расчета таких весовых коэффициентов [31; 32] (см. также [28; 29]) с использованием интерполяционного многочлена

$$G_i(t) = \frac{P_N^{(\alpha,\beta)}(t)}{(t - \xi_{i,N})P_N'^{(\alpha,\beta)}(\xi_{i,N})},$$

где $\xi_{i,N}$ – нули полиномов Якоби:

$$P_N^{(\alpha, \beta)}\left(\xi_{i, N}\right) = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, N),$$

можно найти квадратурные формулы для вычисления сингулярных интегралов вида

$$I(z) = \int_{-1}^{1} F(t) w(t) g(t, z) dt. \tag{4}$$

В соотношении (4) функции $F(t)$, $w(t)$ определяют часть интеграла без особенностей для $-1 < t, z < 1$; $g(t, z)$ – сингулярная функция при $t = z$.

Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла (4) с $g(t, z) = \dfrac{1}{(t - z)^2}$ и $w(t) = \sqrt{\dfrac{1 + t}{1 - t}}$ запишется в виде [32]

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1 + t}{1 - t}} \frac{F(t)}{(t - z)^2} dt \approx \sum_{i = 1}^{N} \omega_i^{HV}(z) F\left(\xi_{i, N}\right),$$

где

$$\omega_i^{HV}(z) = \frac{\pi}{V_N'\left(\xi_{i, N}\right)} \begin{cases} \dfrac{W_N'(z)}{\left(z - \xi_{i, N}\right)} - \dfrac{W_N(z) - W_N\left(\xi_{i, N}\right)}{\left(z - \xi_{i, N}\right)^2}, & z \neq \xi_{i, N}, \\ \dfrac{W_N''\left(\xi_{i, N}\right)}{2}, & z = \xi_{i, N}. \end{cases} \tag{5}$$

Весовые коэффициенты (5) определяются с помощью полиномов Чебышева третьего $V_N(x)$ и четвертого $W_N(x)$ рода. Определение и свойства этих полиномов можно найти в монографии [33].

Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла с функцией $w(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$ определяется аналогично предыдущему варианту и имеет вид

$$\int_{-1}^{1} \frac{F(t)}{(t - z)^2 \sqrt{1 - t^2}} dt \approx \sum_{i = 1}^{N} \omega_i^{HT}(z) F\left(\xi_{i, N}\right), \tag{6}$$

где

$$\omega_i^{HT}(z) = \frac{4\pi}{N} \sum_{k = 2}^{N - 1} \cos\left(\frac{2k - 1}{2N} \pi\right) C_{k - 2}^{(2)}(z), \tag{7}$$

$C_n^{(\alpha)}(z)$ – полиномы Гегенбауэра.

На практике может быть полезной квадратурная формула с вычитанием

$$\int_{-1}^{1} \frac{F(t) - F(z)}{(t - z)^2} dt \approx \sum_{i = 1}^{N} \omega_i^{HS}(z) F\left(\xi_{i, N}\right). \tag{8}$$

Весовой коэффициент представляется суммой вида

$$\omega_i^{HS}(z) = \lambda_{i, N}^{(\alpha, \beta)} \sum_{m = 0}^{N - 1} \frac{1}{h_m} P_m^{(\alpha, \beta)}\left(\xi_{i, N}\right) J_m^H(z), \tag{9}$$

где

$$J_m^H(z) = \int_{-1}^{1} \frac{P_m^{(\alpha, \beta)}(t) - P_m^{(\alpha, \beta)}(z)}{t - z} dt + P_m^{(\alpha, \beta)}(z) \ln\left(\frac{1 - z}{1 + z}\right). \tag{10}$$

Символы Кристоффеля $\lambda_{m, N}^{(\alpha, \beta)}$ для многочленов Якоби в уравнении (9) определяются стандартным соотношением

$$\lambda_{m, N}^{(\alpha, \beta)} = \frac{2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(N + \alpha + 1) \Gamma(N + \beta + 1)}{\Gamma(N + 1) \Gamma(N + \alpha + \beta + 1)} \frac{1}{\left(1 - \xi_{i, N}^2\right)\left[P_N'^{(\alpha, \beta)}\left(\xi_{i, N}\right)\right]^2}. \tag{11}$$

Далее при вычислении энергетического спектра используем вариант (10), когда $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$:

$$\omega_i^{HS}(z) = \frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N'} T_{m-1}\left(\xi_{i,N}\right) J_{m-1}^{H}(z), \tag{12}$$

где

$$J_m^H(z) = mU_{m-1}(z)\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right) + 4\sum_{j=0}^{b_m}\left(\frac{m}{2j+1}-1\right)U_{m-2j-2}(z), \tag{13}$$

$$b_m = \left[\frac{m-1}{2}\right].$$

В формулах (12) и (13) первый и последний члены в суммах делятся на 2; […] – целая часть числа.

Аналитические формулы (5), (7) и (12) позволяют рассчитать весовые коэффициенты с высокой точностью. Поэтому соответствующие квадратурные формулы можно использовать для решения уравнения Шрёдингера в импульсном пространстве с линейным запирающим потенциалом.

Для получения весовых коэффициентов, включающих логарифмическую сингулярность, рассмотрим различные варианты квадратурных формул. Для формулы

$$\int_{-1}^{1}\ln|t-z|F(t)\,dt \approx \sum_{i=1}^{N}\omega_i^{\log}(z)F\left(\xi_{i,N}\right) \tag{14}$$

весовые коэффициенты имеют вид

$$\omega_i^{\log}(z) = \frac{2}{K_N'^{(\alpha,\beta)}\left(\xi_{i,N}\right)}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{K_{N-1-m}^{(\alpha,\beta)}\left(\xi_{i,N}\right)}{m+1}\times$$

$$\times\left\{(-1)^m\ln(z+1)+\ln(1-z)-T_{m+1}(z)\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)-4\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{T_{m-2k}(z)}{2k+1}c_k^m\left[\frac{m}{2}\right]\right\}, \tag{15}$$

где […] – целая часть числа;

$$c_k^m(n) = \begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{если } k = n \text{ и } m \text{ – нечетное},\\ 1, & \text{если } k = n \text{ и } m \text{ – четное или } k \neq n;\end{cases}$$

функция

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \begin{cases} T_n(z), & \text{если } \alpha = \beta = -\frac{1}{2},\\ U_n(z), & \text{если } \alpha = \beta = \frac{1}{2},\\ V_n(z), & \text{если } \alpha = -\beta = -\frac{1}{2},\\ W_n(z), & \text{если } \alpha = -\beta = \frac{1}{2},\end{cases}$$

является обобщением полиномов Чебышева первого, второго, третьего и четвертого рода [34]. Если в (15) $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, то при суммировании по индексу m последний член суммы делится на 2.

Для интегралов с логарифмической особенностью вида

$$\int_{-1}^{1}\ln|t-z|\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}F(t)\,dt \approx \sum_{i=1}^{N}\omega_i^{V}(z)F\left(\xi_{i,N}\right)$$

весовые множители задаются соотношением

$$\omega_i^V(z) = -\frac{4\pi}{2N+1}\cos\frac{\theta_{i,N}}{2}\left[(\ln 2 + z)\cos\frac{\theta_{i,N}}{2} + \sum_{m=1}^{N-1}\cos\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta_{i,N}\right]\left(\frac{T_k(z)}{k} + \frac{T_{k+1}(z)}{k+1}\right)\right], \tag{16}$$

где

$$\theta_{i,N} = \frac{2i-1}{2N+1},\ i = 1, 2, \ldots, N.$$

Весовые коэффициенты квадратурной формулы

$$\int_{-1}^{1}\ln|t-z|\frac{F(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \approx \sum_{i=1}^{N}\omega_i^T(z)F\left(\xi_{i,N}\right) \tag{17}$$

после вычислений записываются как

$$\omega_i^T(z) = -\frac{\pi}{N}\left(\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}T_k\left(\xi_{i,N}\right)T_k(z)\right). \tag{18}$$

Энергетический спектр для кулоновского потенциала

Уравнение с кулоновским потенциалом можно преобразовать к виду

$$\tilde{k}^2\varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}\right) - \frac{2}{\pi\tilde{k}}\int_0^\infty Q_\ell(y)\tilde{k}'\varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}'\right)d\tilde{k}' = \varepsilon_{n\ell}\varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}\right) \tag{19}$$

с помощью замен переменных

$$k = \beta\tilde{k},\ \varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}\right) = \beta^{3/2}\varphi_{n\ell}(k),\ \beta = \mu\alpha,\ E_{n\ell} = \frac{\beta^2}{2\mu}\varepsilon_{n\ell}.$$

В случае кулоновского потенциала известны точные значения энергий, а именно:

$$\varepsilon_{n\ell}^C = -\frac{1}{n^2}.$$

Точность решения уравнения будем определять с использованием относительной погрешности

$$\delta_{n\ell} = \left|\frac{\varepsilon_{n\ell} - \varepsilon_{n\ell}^{(N)}}{\varepsilon_{n\ell}}\right|, \tag{20}$$

где $\varepsilon_{n\ell}$ – точные собственные значения; $\varepsilon_{n\ell}^{(N)}$ – энергетический спектр, полученный численным решением задачи на собственные значения матрицы H при заданном числе N:

$$\sum_{j=1}^{N}H_{ij}\varphi_{n\ell}\left(\xi_{j,N}\right) = \varepsilon_{n\ell}^{(N)}\varphi_{n\ell}\left(\xi_{i,N}\right). \tag{21}$$

Расчеты произведены в системе *Wolfram Mathematics* [34], выбранная точность весовых коэффициентов и нулей равна 90; для всех вычислений параметр $\beta_0 = 0{,}999\,992$.

Для численного решения уравнения Шрёдингера с логарифмической сингулярностью используем три варианта реализации задачи на собственные значения с помощью квадратурных правил.

В первом методе (метод I) применяются полиномы Чебышева третьего рода $V_n(t)$ с функцией $w(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ и, соответственно, весовые коэффициенты (16). Во втором методе (метод II) – многочлены Чебышева первого рода $T_n(t)$ с функцией $w(t) = 1$ и весовыми коэффициентами (15) для интегралов с логарифмической особенностью. В третьем методе (метод III) – квадратурное правило ко всем интегралам в уравнении (19) с вычитанием, которое использует стандартные весовые коэффициенты вида [29]:

$$\omega_i^{\mathrm{st}} = -\frac{4}{N}\sum_{k=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]'}\frac{T_{2k}\left(\xi_{i,N}\right)}{4k^2-1}. \tag{22}$$

Штрих (′) означает, что первое слагаемое суммы делится на 2; […] – целая часть числа.

С помощью отображения

$$\tilde{k} = \beta_0 \frac{1+z}{1-z}, \;\; \tilde{k}' = \beta_0 \frac{1+t}{1-t}$$

преобразуем уравнение (19) к виду

$$\frac{4\beta_0}{\pi} \frac{1-z}{1+z} \int_{-1}^{1} Q_\ell\left(y(z, t)\right)\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\varphi_{n\ell}(t)\frac{dt}{(1-t)^2} = \left(\beta_0^2\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \varepsilon_{n\ell}\right)\varphi_{n\ell}(z), \qquad (23)$$

где

$$Q_\ell\left(y(z, t)\right) = P_\ell\left(y(z, t)\right)\ln\left|\frac{1-tz}{t-z}\right| - w_{\ell-1}\left(y(z, t)\right);$$

$$y(z, t) = \frac{2(t-z)^2}{\left(1-t^2\right)\left(1-z^2\right)} + 1.$$

Для сокращения записи введем функции

$$\bar{k}_i = \left(\frac{1+\xi_{i,N}}{1-\xi_{i,N}}\right), \;\; \overline{dk}_i = \frac{1}{\left(1-\xi_{i,N}\right)^2}.$$

Рассмотрим численное решение уравнения (23) с помощью квадратурных формул. Используя метод I и полагая $z = \xi_{i,N}$ и $t = \xi_{i,N}$, уравнение (23) можно аппроксимировать уравнением (21) с

$$H_{ij} = \beta_0\left[\beta_0\delta_{i,j}\bar{k}_j^2 - 4\pi\left(\frac{1}{\bar{k}_i}\right)\sqrt{\bar{k}_j}\, Q_\ell^V\left(y_{ij}\right)\overline{dk}_j\right], \qquad (24)$$

где

$$Q_\ell^V\left(y_{ij}\right) = \lambda_{j,N}^{(-1/2,1/2)}\left[P_\ell\left(y_{ij}\right)\ln\left|1-\xi_{i,N}\xi_{j,N}\right| - w_{\ell-1}\left(y_{ij}\right)\right] -$$
$$- \omega_j^{\log}\left(\xi_{i,N}\right)P_\ell\left(y_{ij}\right); \;\; y_{ij} = y\left(\xi_{i,N}, \xi_{j,N}\right).$$

Весовые коэффициенты $\lambda_{j,N}^{(-1/2,1/2)}$ и $\omega_j^V\left(\xi_{i,N}\right)$ определяются уравнениями (11) и (16) соответственно, а значения $\xi_{i,N}$ – формулой

$$\xi_{i,N} = \cos\left(\frac{2i-1}{2N+1}\pi\right).$$

Расчеты с использованием метода II приводят к матрице вида

$$H_{ij} = \beta_0\left[\beta_0\delta_{i,j}\bar{k}_j^2 - 4\pi\left(\frac{\bar{k}_j}{\bar{k}_i}\right)Q_\ell^T\left(y_{ij}\right)\overline{dk}_j\right] \qquad (25)$$

с функцией

$$Q_\ell^T\left(y_{ij}\right) = \omega_j^{\text{st}}\left[P_\ell\left(y_{ij}\right)\ln\left|1-\xi_{i,N}\xi_{j,N}\right| - w_{\ell-1}\left(y_{ij}\right)\right] -$$
$$- \omega_j^{\log}\left(\xi_{i,N}\right)P_\ell\left(y_{ij}\right).$$

Весовые коэффициенты ω_j^{st} и $\omega_j^{\log}\left(\xi_{i,N}\right)$ определяются по формулам (22) и (15) соответственно, а значения $\xi_{i,N}$ – соотношением

$$\xi_{i,N} = \cos\left(\frac{2i-1}{2N}\pi\right).$$

Матричные элементы H_{ij} интегрального уравнения с кулоновским потенциалом с вычитанием

$$C_\ell = \int_0^\infty \frac{Q_\ell(y)}{k} dk = \left(\frac{(\ell-1)!!}{\ell!!} \right)^2 \cdot \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{2} & \text{при } \ell = 2m, \\ 2 & \text{при } \ell = 2m+1, \end{cases} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

запишутся в виде

$$H_{ii} = \beta_0 \left(\beta_0 \bar{k}_i^2 - \frac{2}{\pi} C_\ell \bar{k}_i + \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^{N} \omega_r^{\mathrm{st}} Q_\ell \left(y_{ri} \neq 1 \right) \frac{\bar{k}_i}{\bar{k}_r} \overline{dk}_r \right),$$

$$H_{ij} = -\frac{4\beta_0}{\pi} \omega_j^{\mathrm{st}} \frac{\bar{k}_j}{\bar{k}_i} Q_\ell \left(y_{ij} \right) \overline{dk}_j, \; i \neq j.$$

Диагональные матричные элементы уравнений (24) и (25) конечны, и все особенности находятся под контролем. Численные результаты для энергетического спектра, рассчитанные тремя методами, сравниваются в табл. 1.

Таблица 1

Относительная ошибка (20) для кулоновской энергии связи

Table 1

Relative error (20) for the Coulomb binding energies

N	$\ell = 0$				
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
100^{I}	3,7(–14)	3,7(–11)	2,9(–10)	1,2(–9)	3,7(–9)
150^{I}	3,3(–15)	3,3(–12)	2,5(–11)	1,1(–10)	3,3(–10)
150^{II}	1,1(–16)	6,7(–15)	1,1(–13)	8,6(–13)	4,1(–12)
150^{III}	7,1(–7)	1,4(–5)	1,2(–4)	5,3(–4)	1,8(–3)
N	$\ell = 1$				
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
100^{I}	2,3(–17)	1,0(–15)	1,5(–14)	1,1(–13)	5,8(–13)
150^{I}	4,0(–19)	1,8(–17)	2,6(–16)	2,0(–15)	1,0(–14)
150^{II}	4,7(–16)	9,2(–15)	8,7(–14)	4,5(–13)	1,8(–12)
150^{III}	4,2(–5)	1,7(–4)	3,6(–4)	4,3(–4)	1,2(–4)
N	$\ell = 2$				
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
100^{I}	2,3(–17)	1,0(–15)	1,5(–14)	1,1(–13)	5,8(–13)
150^{I}	4,0(–19)	1,8(–17)	2,6(–16)	2,0(–15)	1,0(–14)
150^{II}	1,7(–19)	4,7(–18)	6,1(–17)	4,7(–16)	2,6(–15)
150^{III}	1,4(–5)	1,1(–4)	4,8(–4)	1,6(–3)	4,3(–3)

Примечания: 1. Индексы I, II, III означают, что для расчета $\varepsilon_{n\ell}^{N}$ используются методы I, II, III соответственно. 2. Запись вида 7,1(–16) означает: 7,1(–16) ≡ 7,1 · 10^{-16}.

Можно сделать вывод, что методы I и II имеют хорошую сходимость с увеличением N и значительно превышают точность метода III. Кроме того, точность методов I и II возрастает при увеличении орбитального квантового числа ℓ, в отличие от метода III. Поэтому квадратурные формулы (16) и (15), в которых логарифмические особенности ядра уравнения включены в весовые коэффициенты, позволяют с большой точностью решить уравнение Шрёдингера с кулоновским потенциалом в импульсном пространстве.

Энергетический спектр для линейного потенциала

Запишем уравнение Шрёдингера с линейным потенциалом в виде

$$\left(\varepsilon_{n\ell} - \tilde{k}^2 \right) \varphi_{n\ell}\left(\tilde{k} \right) = \frac{1}{\pi \tilde{k}^2} \int_0^\infty \left(Q_\ell'(y) \varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}' \right) - Q_0'(y) \varphi_{n\ell}\left(\tilde{k} \right) \right) d\tilde{k}' - \frac{\lambda}{\pi \tilde{k}} \int_0^\infty Q_\ell(y) \varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}' \right) \tilde{k}' d\tilde{k}', \qquad (26)$$

где использованы замены

$$k = \beta\tilde{k},\ E = \frac{\beta^2}{2\mu}\varepsilon,\ \beta = \left(2\mu\sigma\right)^{1/3},\ \varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}\right) = \beta^{3/2}\varphi_{n\ell}\left(k\right). \tag{27}$$

С помощью контрчлена

$$\int_0^\infty dk Q_0'\left(y\right) = 0 \tag{28}$$

получим уравнение Шрёдингера (26) в следующем виде:

$$\left(\varepsilon_{n\ell} - \tilde{k}^2\right)\varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}\right) = \frac{1}{\pi\tilde{k}^2}\int_0^\infty\Big(Q_0'\left(y\right)\left(P_\ell\left(y\right)\varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}'\right) - \varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}\right)\right) -$$

$$- w_{\ell-1}'\left(y\right)\varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}'\right)\Big)d\tilde{k}' + \frac{1}{\pi\tilde{k}^2}\int_0^\infty Q_0\left(y\right)P_\ell'\left(y\right)\varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}'\right)d\tilde{k}', \tag{29}$$

где

$$w_{l-1}\left(y\right) = \sum_{n=1}^{l}\frac{1}{n}P_{n-1}\left(y\right)P_{l-n}\left(y\right).$$

Точность расчетов энергетического спектра проверим с помощью погрешности (20). В частном случае $\ell = 0$ для (29) известен точный результат для спектра

$$\varepsilon_{n0}^L = -z_n,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где z_n – нули функций Эйри $Ai\left(z\right)$.

В отличие от кулоновского потенциала нет точных аналитических решений с линейным потенциалом для $\ell \geq 1$. Решения в данном случае, обозначенные как точные, вычислены путем решения уравнения Шрёдингера в конфигурационном пространстве. Для этой цели использован вариационный метод решения с пробными псевдокулоновскими волновыми функциями

$$\psi_{n\ell}^C\left(r,\ \beta\right) = \sqrt{\frac{n!}{\left(n + 2\ell + 2\right)!}}\left(2\beta\right)^{3/2}\left(2\beta r\right)^\ell e^{-\beta r}L_n^{2\ell+2}\left(2\beta r\right), \tag{30}$$

где $L_n^\ell\left(z\right)$ – многочлены Лагерра. В работе [35] получены аналитические выражения для интегралов с функциями (30), возникающими в координатном пространстве. Это позволяет выполнять вычисления с высокой степенью точности. Поэтому численное решение в импульсном пространстве для $\ell \geq 1$ сравнивается с решением этого уравнения в координатном пространстве.

Для решения уравнения Шрёдингера в импульсном пространстве с линейным потенциалом используем квадратурные формулы (6) и (8). Методы решения уравнения с помощью (8) и (6) будем называть методами A и B соответственно. Поясним метод A для интегрального уравнения (29). Используя замену переменных

$$\tilde{k} = \beta_0\frac{1+z}{1-z},\ \tilde{k}' = \beta_0\frac{1+t}{1-t}$$

и квадратурные соотношения (6) и (8) с весовыми коэффициентами (7) и (12) соответственно, интегральное уравнение (29) с вычитанием аппроксимируется уравнением (21), в котором матричные элементы имеют вид

$$H_{ij} = \beta_0^2 T_{ij} + \frac{1}{\beta_0\pi}\frac{1}{\overline{k}_i^2}\left(V_{ij}^H + V_{ij}^{\log}\right),$$

где

$$T_{ij} = \delta_{i,\,j}\overline{k}_j^2;\ V_{ij}^H = 2\left(\omega_j^{HS}\left(\xi_{i,\,N}\right)P_\ell\left(y_{ij}\right)Z_{ij} - \delta_{i,\,j}\sum_{k=1}^N\omega_k^{HS}\left(\xi_{i,\,N}\right)Z_{kj} - \omega_j^{\mathrm{st}}w_{\ell-1}'\left(y_{ij}\right)\right)\overline{dk}_j;$$

$$V_{ij}^{\log} = 2P_\ell'\left(y_{ij}\right)\left[\omega_j^{\mathrm{st}}\ln\left|1 - \xi_{i,\,N}\xi_{j,\,N}\right| - \omega_j^{\log}\left(\xi_{i,\,N}\right)\right]\overline{dk}_j,$$

$$Z_{ij} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\left(1-\xi_{i,N}^2\right)\left(1-\xi_{j,N}^2\right)}{\left(1-\xi_{i,N}\xi_{j,N}\right)}\right)^2, \quad y_{ij} = \frac{2\left(\xi_{i,N}-\xi_{j,N}\right)^2}{\left(1-\xi_{i,N}^2\right)\left(1-\xi_{j,N}^2\right)} + \delta_{i,j}.$$

Весовые коэффициенты ω_j^{st}, $\omega_j^{HS}\left(\xi_{i,N}\right)$ и $\omega_j^{\log}\left(\xi_{i,N}\right)$ определяются уравнениями (22), (12) и (15) соответственно. Числа $\xi_{i,N}$ – нули многочлена Чебышева первого рода $T_n(t)$.

Характерная черта решения методом *B* гиперсингулярного интегрального уравнения (26) – использование квадратурных формул (6) и (17). В итоге матрица *H* для вычисления энергетического спектра задается соотношением

$$H_{ij} = \beta_0^2 T_{ij} + \frac{1}{\beta_0 \pi}\frac{1}{\bar{k}_i}\left(V_{ij}^H + V_{ij}^{\log}\right),$$

где

$$T_{ij} = \delta_{i,j}\bar{k}_j;\; V_{ij}^H = \omega_j^{HT}\left(\xi_{i,N}\right)P_\ell\left(y_{ij}^T\right)\left(\xi_{i,N}^2-1\right)\left(1+\xi_{j,N}\right) - \frac{\pi}{N}w'_{\ell-1}\left(y_{ij}^T\right);$$

$$V_{ij}^{\log} = \frac{P'_\ell\left(y_{ij}^T\right)}{\left(1-\xi_{j,N}\right)}\left[\frac{\pi}{N}\ln\left|1-\xi_{i,N}\xi_{j,N}+\sqrt{1-\xi_{i,N}^2}\sqrt{1-\xi_{j,N}^2}\right| - \omega_j^T\left(\xi_{i,N}\right)\right],$$

$$y_{ij}^T = \frac{1-\xi_{i,N}\xi_{j,N}}{\sqrt{1-\xi_{i,N}^2}\sqrt{1-\xi_{j,N}^2}}.$$

Весовые коэффициенты $\omega_j^{HT}\left(\xi_{i,N}\right)$ и $\omega_j^T\left(\xi_{i,N}\right)$ определяются уравнениями (7) и (18) соответственно.

Численные результаты, полученные методами *A* и *B*, представлены в табл. 2.

Таблица 2

Относительная ошибка (20) для энергетического спектра с линейным запирающим потенциалом

Table 2

Relative error (20) for the energy spectrum with a linear confiment potential

N	$\ell = 0$				
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
150^A	1,1(–16)	4,1(–16)	8,6(–16)	1,4(–15)	2,1(–15)
150^B	2,6(–27)	6,2(–26)	5,5(–24)	8,8(–23)	6,2(–22)
N	$\ell = 1$				
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
150^A	7,0(–15)	7,1(–15)	1,4(–14)	1,4(–14)	2,1(–14)
150^B	2,6(–10)	7,4(–10)	1,4(–9)	2,2(–9)	3,1(–9)
N	$\ell = 2$				
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
150^A	5,5(–14)	1,8(–14)	9,9(–14)	3,3(–14)	1,4(–13)
150^B	1,5(–14)	6,5(–14)	1,7(–13)	3,5(–13)	6,2(–13)

Примечания: 1. Индексы *A* и *B* означают, что для расчета $\varepsilon_{n\ell}^N$ используются методы *A* и *B* соответственно. 2. Запись вида 7,6(–13) означает: 7,6(–13) ≡ $7{,}6 \cdot 10^{-13}$.

Как следует из расчетов, метод *A* дает более точный результат, чем метод *B*, для орбитальных моментов $\ell \geq 1$.

Таким образом, новая квадратурная формула (8), основанная на использовании контрчлена и аналитическом расчете весовых коэффициентов, включающих сингулярность, дает высокоточное решение уравнения Шрёдингера в пространстве импульсов для линейного потенциала.

Отметим, что точность вычисления спектра уравнения Шрёдингера с линейным потенциалом в импульсном пространстве методами *A* и *B* намного превосходит точность решения в подходах, предложенных в работах [13; 15; 17–19; 21].

Энергетический спектр для корнельского потенциала

Рассмотрим случай присутствия как кулоновского, так и линейного запирающего потенциала. Для корнельского потенциала $V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \sigma r$ не существует аналитических решений. Поэтому численное решение в импульсном пространстве будет сравниваться с решением этого же уравнения в координатном пространстве.

Из анализа методов решения уравнения Шрёдингера в импульсном пространстве для кулоновского и линейного потенциалов следует, что наиболее оптимальным является использование квадратурных формул (8) и (14), в которых весовые коэффициенты $\omega_i^{HS}(z)$ (12) и $\omega_i^{\log}(z)$ (15) включают двухполюсную и логарифмическую сингулярности. С помощью замены (27) и контрчлена (28) уравнение Шрёдингера с корнельским потенциалом $V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \sigma r$ в импульсном пространстве записывается в виде

$$\left(\varepsilon_{n\ell} - \tilde{k}^2\right)\varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}\right) = \frac{1}{\pi\tilde{k}^2}\int_0^\infty \left(Q'_\ell(y)\varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}'\right) - Q'_0(y)\varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}\right)\right)d\tilde{k}' - \frac{\lambda}{\pi\tilde{k}^2}\int_0^\infty Q_\ell(y)\varphi_{n\ell}\left(\tilde{k}'\right)\tilde{k}'d\tilde{k}', \quad \lambda = \alpha(2\mu)^{2/3}\sigma^{1/3}. \qquad (31)$$

Результаты расчетов представлены в табл. 3. Для определения энергетического спектра уравнение Шрёдингера было решено как в импульсном, так и в координатном пространстве.

Таблица 3

Относительная ошибка (20) для энергетического спектра уравнения с корнельским потенциалом (31) и $\lambda = 1$

Table 3

Relative error (20) for the energy spectrum of the equation with the Cornell potential (31) and $\lambda = 1$

N	$\ell = 0$				
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
100	2,7(–15)	9,6(–15)	2,0(–14)	3,5(–14)	5,2(–14)
150	1,1(–16)	3,7(–16)	7,9(–16)	1,4(–15)	2,0(–15)
N	$\ell = 1$				
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
100	3,2(–14)	7,4(–14)	1,1(–14)	1,5(–13)	3,1(–14)
150	3,2(–15)	6,0(–15)	1,8(–15)	1,2(–14)	1,4(–15)
N	$\ell = 2$				
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
100	4,1(–16)	1,1(–15)	1,6(–15)	3,2(–15)	1,0(–13)
150	3,2(–17)	7,2(–17)	1,4(–16)	2,2(–16)	3,3(–16)

Таким образом, использование квадратурных правил на основе уравнений (8) и (14) позволяет найти спектр системы с корнельским потенциалом с относительной погрешностью 10^{-15} для $\ell = 0$ и 10^{-22} для $\ell \geq 1$.

Заключение

В работе представлены новые квадратурные формулы для сингулярных интегралов, которые применены для решения уравнения Шрёдингера в импульсном пространстве с кулоновским, линейным запирающим и корнельским потенциалами. Они позволяют с высокой точностью найти энергетические спектры квантовых систем с сингулярными потенциалами.

Достигнутая точность расчетов на много порядков выше, чем в аналогичных вычислениях в импульсном пространстве, проведенных в работах [13; 15; 17–19; 21].

Разработанные методы легко обобщаются на релятивистские уравнения, где потенциалы обычно представлены в импульсном пространстве. Следовательно, эта методика может быть использована для изучения и вычисления различных релятивистских эффектов в двухчастичных квантовых системах с высокой точностью.

Библиографические ссылки

1. Bete HA, Salpeter EE. A relativistic equation for bound-state problems. *Physical Review.* 1951;84(6):1232–1242. DOI: 10.1103/PhysRev.84.1232.

2. Salpeter EE. Mass-corrections to the fine structure of Hydrogen-like atoms. *Physical Review.* 1952;87(2):328–343. DOI: 10.1103/PhysRev.87.328.

3. Savkli C, Gross M. Quark-antiquark bound states in the relativistic spectator formalism. *Physical Review C.* 2001;63:035208. DOI: 110.1103/PhysRevC.63.035208.

4. Keister BD, Polyzou WN. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics. *Advances in Nuclear Physics.* 1991;20:225–479.

5. Bete HA, Salpeter EE. *Quantum mechanics of one and two-electron atoms.* Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer; 1957.

6. Eyre D, Vary JP. Solving momentum space integral equations for quarkonia spectra with confining potentials. *Physical Review D.* 1986;34(11):3467–3471. DOI: 10.1103/PhysRevD.34.3467.

7. Gammel J, Menzel M. Bethe-Salpeter equation: numerical experience with a hydrogenlike atom. *Physical Review A.* 1973; 7(3):858.

8. Kwon YR, Tabakin F. Hadronic atoms in momentum space. *Physical Review C.* 1978;18(2):932–943. DOI: 10.1103/PhysRevC.18.932.

9. Mainland G. Logarithmic singularities in two-body, bound-state integral equations. *Journal of Computational Physics.* 2001; 174(2):852–869. DOI: 10.1006/jcph.2001.6941.

10. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Numerical tests of the Landé subtraction method for the Coulomb potential in momentum space. *Physical Review A.* 1994;50(3):2075–2079. DOI: 10.1103/PhysRevA.50.2075.

11. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Exact numerical solution of the spinless Salpeter equation for the Coulomb potential in momentum space. *Physical Review A.* 1994;50:3609–3613. DOI: 10.1103/PhysRevA.50.3609.

12. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Solution of two-body relativistic bound-state equations with confining plus Coulomb interactions. *Physical Review D.* 1993;47(3):1182–1189. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.1182.

13. Chen J-K. Nystrom method for the Coulomb and screened Coulomb potentials. *Few-Body Systems.* 2013;54(11):2081–2095. DOI: 10.1007/s00601-013-0713-2.

14. Spence JR, Vary JP. Solving momentum space integral equations for quarkonium spectra with confining potentials. 3: Bethe-Salpeter equation with spin. *Physical Review C.* 1993;47(3):1282–1293. DOI: 10.1103/PhysRevC.47.1282.

15. Hersbach H. Relativistic linear potential in momentum space. *Physical Review D.* 1993;47(7):3027–3033. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.3027.

16. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Confining potential in momentum space. *Canadian Journal of Physics.* 1992;70:86–89.

17. Tang A, Norbury JW. The Nyström plus correction method for solving bound state equations in momentum space. *Physical Review E.* 2001;63(6–2):066703. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.066703.

18. Deloff A. Quarkonium bound-state problem in momentum space revisited. *Annals of Physics.* 2007;322:2315–2326. DOI: 10.1016/j.aop.2006.10.004.

19. Chen J-K. Spectral method for the Cornell and screened Cornell potentials in momentum space. *Physical Review D.* 2013; 88(7):076006. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.076006.

20. Chen J-K. Extended Simpson's rule for the screened Cornell potential in momentum space. *Physical Review D.* 2012;86(3):036013. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.036013.

21. Leitão S, Stadler A, Peña MT, Biernat EP. Linear confinement in momentum space: singularity-free bound-state equations. *Physical Review D.* 2014;90(9):096003. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.096003.

22. Kang D, Won E. Precise numerical solutions of potential problems using Crank-Nicholson method. *Journal of Computational Physics.* 2008;227(5):2970–2976. DOI: 10.1016/j.jcp.2007.11.028.

23. Udem Th, Huber A, Gross B, Reichert J, Prevedelli M, Weitz M, Hänsch TW. Phase-coherent measurement of the hydrogen 1*S* – 2*S* transition frequency with an optical frequency interval divider chain. *Physical Review Letters.* 1997;79(14):2646–2649. DOI: 10.1103/PhysRevLett.79.2646.

24. Liu W, Boshier MG, Dhawan S, van Dyck O, Egan P, Fei F, et al. High precision measurements of the ground state hyperfine structure interval of muonium and of the muon magnetic moment. *Physical Review Letters.* 1999;82:711–714. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.711.

25. Chan Y-S, Fannjiang AC, Paulino GH. Integral equations with hypersingular kernels – theory and applications to fracture mechanics. *International Journal of Engineering Science.* 2003;41(7):683–720. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00134-9.

26. Bichi SL, Eshkuvatov ZK, Nik Long NMA. An automatic quadrature schemes and error estimates for semibounded weighted hadamard type hypersingular integrals. *Abstract and Applied Analysis.* 2014;2014:1–13. Article ID: 387246. DOI: 10.1155/2014/387246.

27. Chen ZA, Zhou Y. New method for solving hypersingular integral equations of the first kind. *Applied Mathematics Letters.* 2011;24(5):636–641. DOI: 10.1016/j.aml.2010.11.028.

28. Шешко МА. О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 1976;2:108–118.

29. Deloff A. Semi-spectral Chebyshev method in quantum mechanics. *Annals of Physics.* 2007;322:1373–1419. DOI: 10.1016/j.aop.2006.07.004.

30. Kahana DE, Maung KM, Norbury JW. Regge trajectories from the two-body, bound-state Thompson equation using a quark-confining interaction in momentum space. *Physical Review D.* 1993;48(7):3408–3409. DOI: 10.1103/PhysRevD.48.3408.

31. Андреев ВВ. Решение уравнения Шредингера с гиперсингулярным ядром в импульсном пространстве. *Проблемы физики, математики и техники.* 2016;1(26):7–10.

32. Andreev VV. Precision solution of the Schrödinger equation with Coulomb and linear confining potentials in momentum space. *Physics of Particles and Nuclei Letters.* 2017;14(1):66–76. DOI: 10.1134/S1547477117010034.

33. Mason JC, Handscomb DC. *Chebyshev polynomials.* Boca Raton – London – New York – Washington: Chapman & Hall/CRC; 2002.

34. Wolfram S. *The Mathematica Book: Wolfram Research.* 5th edition. [Place unknown]: Wolfram Media; 2003. 1488 p.

35. Fulcher LP, Chen Z, Yeong KC. Energies of quark – anti-quark systems, the Cornell potential, and the spinless Salpeter equation. *Physical Review D.* 1993;47(9):4122–4132. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.4122.

References

1. Bete HA, Salpeter EE. A relativistic equation for bound-state problems. *Physical Review.* 1951;84(6):1232–1242. DOI: 10.1103/PhysRev.84.1232.

2. Salpeter EE. Mass-corrections to the fine structure of Hydrogen-like atoms. *Physical Review.* 1952;87(2):328–343. DOI: 10.1103/PhysRev.87.328.

3. Savkli C, Gross M. Quark-antiquark bound states in the relativistic spectator formalism. *Physical Review C.* 2001;63:035208. DOI: 110.1103/PhysRevC.63.035208.

4. Keister BD, Polyzou WN. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics. *Advances in Nuclear Physics.* 1991;20:225–479.

5. Bete HA, Salpeter EE. *Quantum mechanics of one and two-electron atoms.* Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer; 1957.

6. Eyre D, Vary JP. Solving momentum space integral equations for quarkonia spectra with confining potentials. *Physical Review D.* 1986;34(11):3467–3471. DOI: 10.1103/PhysRevD.34.3467.

7. Gammel J, Menzel M. Bethe-Salpeter equation: numerical experience with a hydrogenlike atom. *Physical Review A.* 1973;7(3):858.

8. Kwon YR, Tabakin F. Hadronic atoms in momentum space. *Physical Review C.* 1978;18(2):932–943. DOI: 10.1103/PhysRevC.18.932.

9. Mainland G. Logarithmic singularities in two-body, bound-state integral equations. *Journal of Computational Physics.* 2001; 174(2):852–869. DOI: 10.1006/jcph.2001.6941.

10. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Numerical tests of the Landé subtraction method for the Coulomb potential in momentum space. *Physical Review A.* 1994;50(3):2075–2079. DOI: 10.1103/PhysRevA.50.2075.

11. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Exact numerical solution of the spinless Salpeter equation for the Coulomb potential in momentum space. *Physical Review A.* 1994;50:3609–3613. DOI: 10.1103/PhysRevA.50.3609.

12. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Solution of two-body relativistic bound-state equations with confining plus Coulomb interactions. *Physical Review D.* 1993;47(3):1182–1189. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.1182.

13. Chen J-K. Nystrom method for the Coulomb and screened Coulomb potentials. *Few-Body Systems.* 2013;54(11):2081–2095. DOI: 10.1007/s00601-013-0713-2.

14. Spence JR, Vary JP. Solving momentum space integral equations for quarkonium spectra with confining potentials. 3: Bethe-Salpeter equation with spin. *Physical Review C.* 1993;47(3):1282–1293. DOI: 10.1103/PhysRevC.47.1282.

15. Hersbach H. Relativistic linear potential in momentum space. *Physical Review D.* 1993;47(7):3027–3033. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.3027.

16. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Confining potential in momentum space. *Canadian Journal of Physics.* 1992;70:86–89.

17. Tang A, Norbury JW. The Nyström plus correction method for solving bound state equations in momentum space. *Physical Review E.* 2001;63(6–2):066703. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.066703.

18. Deloff A. Quarkonium bound-state problem in momentum space revisited. *Annals of Physics.* 2007;322:2315–2326. DOI: 10.1016/j.aop.2006.10.004.

19. Chen J-K. Spectral method for the Cornell and screened Cornell potentials in momentum space. *Physical Review D.* 2013; 88(7):076006. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.076006.

20. Chen J-K. Extended Simpson's rule for the screened Cornell potential in momentum space. *Physical Review D.* 2012;86(3):036013. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.036013.

21. Leitão S, Stadler A, Peña MT, Biernat EP. Linear confinement in momentum space: singularity-free bound-state equations. *Physical Review D.* 2014;90(9):096003. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.096003.

22. Kang D, Won E. Precise numerical solutions of potential problems using Crank-Nicholson method. *Journal of Computational Physics.* 2008;227(5):2970–2976. DOI: 10.1016/j.jcp.2007.11.028.

23. Udem Th, Huber A, Gross B, Reichert J, Prevedelli M, Weitz M, Hänsch TW. Phase-coherent measurement of the hydrogen 1*S* – 2*S* transition frequency with an optical frequency interval divider chain. *Physical Review Letters.* 1997;79(14):2646–2649. DOI: 10.1103/PhysRevLett.79.2646.

24. Liu W, Boshier MG, Dhawan S, van Dyck O, Egan P, Fei F, et al. High precision measurements of the ground state hyperfine structure interval of muonium and of the muon magnetic moment. *Physical Review Letters.* 1999;82:711–714. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.711.

25. Chan Y-S, Fannjiang AC, Paulino GH. Integral equations with hypersingular kernels – theory and applications to fracture mechanics. *International Journal of Engineering Science.* 2003;41(7):683–720. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00134-9.

26. Bichi SL, Eshkuvatov ZK, Nik Long NMA. An automatic quadrature schemes and error estimates for semibounded weighted hadamard type hypersingular integrals. *Abstract and Applied Analysis.* 2014;2014:1–13. Article ID: 387246. DOI: 10.1155/2014/387246.

27. Chen ZA, Zhou Y. New method for solving hypersingular integral equations of the first kind. *Applied Mathematics Letters.* 2011;24(5):636–641. DOI: 10.1016/j.aml.2010.11.028.

28. Sheshko MA. [On the convergence of quadrature processes for the singular integral]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*. 1976;12:108–118. Russian.

29. Deloff A. Semi-spectral Chebyshev method in quantum mechanics. *Annals of Physics.* 2007;322:1373–1419. DOI: 10.1016/j.aop.2006.07.004.

30. Kahana DE, Maung KM, Norbury JW. Regge trajectories from the two-body, bound-state Thompson equation using a quark-confining interaction in momentum space. *Physical Review D.* 1993;48(7):3408–3409. DOI: 10.1103/PhysRevD.48.3408.

31. Andreev VV. On solving the Schrödinger equation with hypersingular kernel in momentum space. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. 2016;1(26):7–10. Russian.

32. Andreev VV. Precision solution of the Schrödinger equation with Coulomb and linear confining potentials in momentum space. *Physics of Particles and Nuclei Letters.* 2017;14(1):66–76. DOI: 10.1134/S1547477117010034.

33. Mason JC, Handscomb DC. *Chebyshev polynomials.* Boca Raton – London – New York – Washington: Chapman & Hall/CRC; 2002.

34. Wolfram S. *The Mathematica Book: Wolfram Research.* 5th edition. [Place unknown]: Wolfram Media; 2003. 1488 p.

35. Fulcher LP, Chen Z, Yeong KC. Energies of quark – anti-quark systems, the Cornell potential, and the spinless Salpeter equation. *Physical Review D.* 1993;47(9):4122–4132. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.4122.

Статья поступила в редколлегию 31.12.2018.
Received by editorial board 31.12.2018.