УДК 621.039.61

Расчет погрешности аппроксимации и восстановления энергораспределения в реакторе

ПЛЕХАНОВ Л. П.

Эффективность работы ядерных реакторов во многом зависит от качества внутриреакторного контроля, которому в последнее время уделяется большое внимание [1—7]. В работах [1, 2, 4—7] рассматриваются вопросы получения детального энергораспределения в активной зоне на основе физических расчетов и аппроксимации показаний датчиков [1, 2] и их статистической обработки [4—7]. Эти методы являются общими и эффективными для детального контроля энергораспределения и связаны с большим объемом вычислительной и экспериментальной работы. В работе [3] дается предельная верхняя оценка погрешности дискретного контроля, справедливая для достаточно большого числа датчиков и положительных отклонений энергораспределения от номинального значения.

В настоящей работе предлагается методика оценки погрешности дискретного контроля, отличающаяся от упомянутых и основанная на ограниченности отклонений неконтролируемых параметров, определяющих поле нейтронов.

Постановка задачи. Пусть стационарное поле нейтронов $\Phi(r)$ описывается краевой задачей

$$L(\Phi, \alpha)=0; \quad \Phi(r)=0, \quad r\in S, \qquad (1)$$

где L — оператор; $\alpha(r)=\alpha_0(r)+\Delta\alpha(r)$ — параметр; S — граница рассматриваемой области.

Примем $\Delta\Phi=\Phi-\Phi_0$ — отклонение поля от базового распределения $\Phi_0(r)$, полученного при $\alpha=\alpha_0$, и представим задачу в виде

$$L_0(\Delta\Phi, \alpha_0)=f(\Delta\alpha); \quad \Delta\Phi(r)=0; \quad r\in S, \qquad (2)$$

где L_0 — оператор, линейный по $\Delta\Phi$; f — оператор.

Такое представление получается либо непосредственно из формулы (1), либо после разложения (1) по степеням $\Delta\alpha$ и $\Delta\Phi$.

Правая часть выражения (2) подчиняется ограничению в одной из двух форм:

$$|f[\Delta\alpha(r)]|\geqslant F(r); \qquad (3а)$$

$$\int f^2[\Delta\alpha(r)]\,dV(r)\leqslant A^2. \qquad (3б)$$

Здесь и далее все интегралы взяты по области, ограниченной S. Ограничением в форме (3б) удобно пользоваться, например, при анализе «точечных» воздействий на реактор, выражаемых δ-функциями.

Рассмотрим следующие вопросы:

1. Аппроксимация отклонения поля нейтронов $\Delta\Phi(r)$ системой ортонормированных функций $\varphi_k(r)$:

$$\Delta\Phi(r)=\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(r)+R_n(r), \qquad (4)$$

где $R_n(r)$ — остаточный член (погрешность); $c_k=c_k[\Delta\Phi(r)]$ — коэффициент разложения, определяемый как линейный функционал от аппроксимируемой функции.

2. Восстановление поля по измерениям l датчиков:

$$\Delta\Phi(r)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{c}_k\varphi_k(r)+R_{nl}(r, r_i), \qquad (5)$$

где $\tilde{c}_k$ — приближенные значения коэффициентов, вычисленные по измерениям: r_i — координаты датчиков.

Требуется оценить остаточные члены в формулах (4 и 5) при ограничении (3) с учетом погрешности измерений и неопределенности координат датчиков.

Оценка погрешности аппроксимации и выбор координатных функций. Результаты классической теории аппроксимации [8] недостаточны для решения поставленной задачи, так как в качестве φ_k рассматриваются только полиномы или тригонометрические функции, оценки либо дают лишь порядок убывания остаточного члена при $n\to\infty$, либо завышены.

Например, следствие из второй теоремы Джексона для одномерного случая утверждает, что при аппроксимации полиномами до n-го порядка $\max|R_n(x)|\leqslant M\cdot 6^k/n^k$, где $k\geqslant 1$ — порядок дифференцируемости $\Phi(x)$; $M\geqslant|\Phi^{(k)}(x)|$. Для данной задачи $k=2$, и при $n\leqslant 6$ эта оценка завышена.

Решение задачи (2) можно записать в виде

$$\Delta\Phi(r)=\gamma\Phi^0(r)+\Delta\Phi^1(r); \qquad (6)$$

$$\Delta\Phi^1(r)=\int f[\Delta\alpha(\xi)]\,G(r, \xi)\,dV(\xi). \qquad (7)$$

Здесь $\Phi^0(r)$ — решение однородной задачи (2), если оно отлично от нуля; γ — число, опреде-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ляемое из дополнительных условий (уравнений регулятора, обратных связей и т. п.) и условия критичности возмущенного состояния; $G(r, \xi)$ — обобщенная функция Грина, ортогональная $\Phi^0(r)$. Если $\Phi^0(r) \equiv 0$, то $G(r, \xi)$ — обычная функция Грина задачи (2) [9].

Рассмотрим отдельно оценки для обоих слагаемых в уравнении (6) соответственно с индексами 0 и 1.

$$|R_n^0(r)| \leqslant \max|\gamma| \cdot |\Phi^0(r) - \sum_{k=1}^{n} c_k[\Phi^0(r)]\varphi_k(r)|. \quad (8)$$

Для второго слагаемого из формул (4) и (7) найдем

$$R_n^1(r) = \int f[\Delta\alpha(\xi)] P_n(r, \xi) nV(\xi), \quad (9)$$

где выражение $P_n(r, \xi) = G(r, \xi) - \sum_{k=1}^{n} c_k [G \times \times (r, \xi)]\varphi_k(r)$ представляет собой остаток аппроксимации функции Грина $G(r, \xi)$ по переменной r с помощью выбранной системы координатных функций.

Использовав неравенство Коши — Буняковского, получим из формулы (9) следующие оценки:

$$|R_n^1(r)| \leqslant \int F(\xi)|P_n(r, \xi)|dV(\xi); \quad (10а)$$

$$|R_n^1(r)| \leqslant A\left[\int P_n^2(r, \xi)\,dV(\xi)\right]^{1/2}. \quad (10б)$$

Систему координатных функций $\varphi_k(r)$ можно выбирать из различных соображений: удобства вычислений, физического смысла и др. Оценки (8) и (10) позволяют оптимизировать этот выбор из условия минимума погрешности аппроксимации. Первой оптимальной функцией будет $\Phi^0(r)$, если она отлична от нуля; тогда $R_n^0(r) = 0$. Остальные функции можно найти, минимизируя какой-либо положительный функционал от правых частей неравенства (10). Можно показать, например, что в важном частном случае самосопряженного оператора L_0 и квадратичного функционала правой части (10 б) оптимальными будут собственные функции задачи (2), взятые в порядке возрастания модулей их собственных чисел.

Оценка погрешности восстановления. Пусть имеется l датчиков, максимальная погрешность измерения которых δ_i, координаты r_i с максимальной неопределенностью δr_i.

Запишем уравнения для определения коэффициентов в формуле (4) по измеренным значениям потока нейтронов с учетом погрешностей

$$\Delta\Phi_i + x_i = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(r_i) + R_n(r_i), \quad i = 1, 2, \ldots l, \quad (11)$$

где $\Delta\Phi_i$ — значение отклонения поля в точках измерения; x_i — погрешность датчика ($|x_i| \leqslant \delta_i$).

Решая систему (11) методом наименьших квадратов и учитывая затем погрешность координат датчиков z_i (сохраняя только первый порядок малости), получаем

$$c_k = \sum_{i=1}^{l} u_{ki}[\Delta\Phi_i + x_i - R_n(r_i)] + \sum_{j=1}^{l} u'_{kij} z_j \Delta\Phi_i, \quad (12)$$

где u_{ki} — коэффициенты, определенные методом наименьших квадратов; u'_{kij} — производные этих коэффициентов по координате r_j. Можно показать, что $u'_{kij} = \sum_{m=1}^{n} u_{kj}\varphi'_m(r_j)u_{mi}$.

Обозначим $d_i(r) = \sum_{k=1}^{n} u_{ki}\varphi_k(r)$ — функцию «веса» i-го измерения при восстановлении поля. Подставив коэффициенты c_k из формулы (12) в уравнение (4), найдем

$$\Delta\Phi(r) = \sum_{i=1}^{l} \Delta\Phi_i d_i(r) + R_n(r) - \sum_{i=1}^{l} R_n(r_i) d_i(r) + \sum_{i=1}^{l} x_i d_i(r) + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=1}^{n} \varphi'_m(r_j) u_{mi} z_j \Delta\Phi_i d_j(r). \quad (13)$$

В этом выражении первое слагаемое есть расчетное значение поля, два следующих представляют собой погрешность дискретности измерений, которую обозначим $R_{дискр}(r)$, предпоследнее и последнее слагаемые есть погрешности восстановления, обусловленные погрешностью датчиков $R_{датч}(r)$ и неопределенностью координат $R_{коорд}(r)$ соответственно. Для каждой погрешности можно указать оценку:

$$|R^0_{дискр}(r)| \leqslant \max|\gamma| \cdot |\Phi^0(r) - \sum_{i=1}^{l} \Phi^0(r_i) d_i(r)|; \quad (14)$$

$$|R^1_{дискр}(r)| \leqslant \int F(\xi)|P_n(r, \xi) -$$

$$-\sum_{i=1}^{l} P_n(r, \xi)\, d_i(r)\, |\, dV(\xi); \qquad (15а)$$

$$|R^1_{\text{дискр}}(r)| \leqslant A \left\{ \int \left[P_n(r, \xi) - \sum_{i=1}^{l} P_n \times (r, \xi)\, d_i(r) \right]^2 dV(\xi) \right\}^{1/2}; \qquad (15б)$$

$$|R_{\text{датч}}(r)| \leqslant \sum_{i=1}^{l} \delta_i\, |d_i(r)|; \qquad (16)$$

$$|R_{\text{коорд}}(r)| \leqslant \sum_{j=1}^{l} \delta r_j \sum_{i=1}^{l} \Delta_i\, |\, d_j(r) \sum_{m=1}^{n} \varphi'_m(r_j)\, u_{mi}\, |, \qquad (17)$$

где Δ_i — максимально возможное отклонение поля в точке r_i, которое обычно известно из практики или может быть оценено неравенствами

$$\Delta_i \leqslant \int F(\xi)\, |G(r_i \xi)|\, dV(\xi); \qquad (18а)$$

$$\Delta_i \leqslant A \left[\int G^2(r_j, \xi)\, dV(\xi) \right]^{1/2}. \qquad (18б)$$

Анализ полученных соотношений показывает, что правые части неравенств (14), (15) уменьшаются с увеличением n, правые части неравенств (16), (17), как правило, увеличиваются с увеличением n и l. Таким образом, существуют сочетание n и l, а также расположение датчиков, минимизирующие суммарную погрешность.

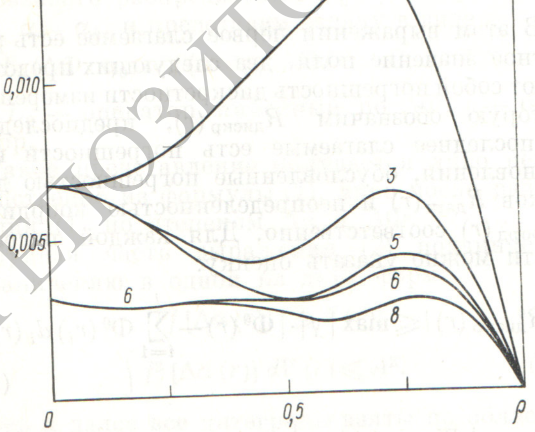

Рис. 1. Оценки погрешности аппроксимации [$M_n(\rho)$ — правая часть неравенства (10 б); цифрами указаны значения n]

Заметим, что с помощью аналогичных рассуждений можно получить оценки определения по показаниям датчиков функционалов поля нейтронов, например, интегральной мощности, энерговыделения в какой-либо области и др.

Пример. Рассмотрим одногрупповое диффузионное уравнение реактора в форме бесконечного круглого цилиндра в стационарном режиме с зоной выравненного энергораспределения, составляющей 0,67 радиуса, которое записано в отклонениях

$$\nabla^2 \Delta\Phi(\rho, \theta) + \frac{k^0_\infty(\rho, \theta) - 1}{M^2} \Delta\Phi(\rho, \theta) = = \frac{\Phi^0(\rho)}{M^2} \Delta k_\infty(\rho, \theta);$$

$$\Delta\Phi(1, \theta) = 0; \quad k^0_\infty = \begin{cases} 1; & \rho \leqslant 0{,}67, \\ 1 + (5{,}151/M)^2; & 0{,}67 < \rho \leqslant 1, \end{cases} \qquad (19)$$

где k^0_∞ соответствует критическому реактору; Δk_∞ — возмущение: $\Phi^0(\rho)$ — решение (22) при $\Delta k_\infty = 0$ и при условии $\Phi^0(0) = 1$.

Рассмотрим Δk_∞, удовлетворяющее ограничению

$$\left\{ \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \left[\frac{\Phi^0(\rho)}{M^2} \Delta k_\infty(\rho, \theta) \right]^2 d\rho\, d\theta \right\}^{1/2} \leqslant 0{,}03. \qquad (20)$$

Уравнение (19) эквивалентно самосопряженному, поэтому целесообразно в качестве координатных функций выбрать собственные функции (19), определяемые известными методами [10]:

$$\psi_{kj}(\rho, \theta) = \begin{cases} Z_{0j}(\rho) \dfrac{1}{2\pi}, & k = 0; \\ Z_{kj}(\rho) \dfrac{\cos k\theta}{\pi}; \; Z_{kj}(\rho) \dfrac{\sin k\theta}{\pi}, & k \geqslant 0, \end{cases} \qquad (21)$$

где $Z_{kj}(\rho)$ — нормированные радиальные части.

Модули первых собственных чисел λ_{kj}

j	k: 0	1	2	3	4
0	0	4,85	13,2	24,8	39,5
1	20,8	39,7	61,6	86,4	114
2	66,8	96,0	127	161	197

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

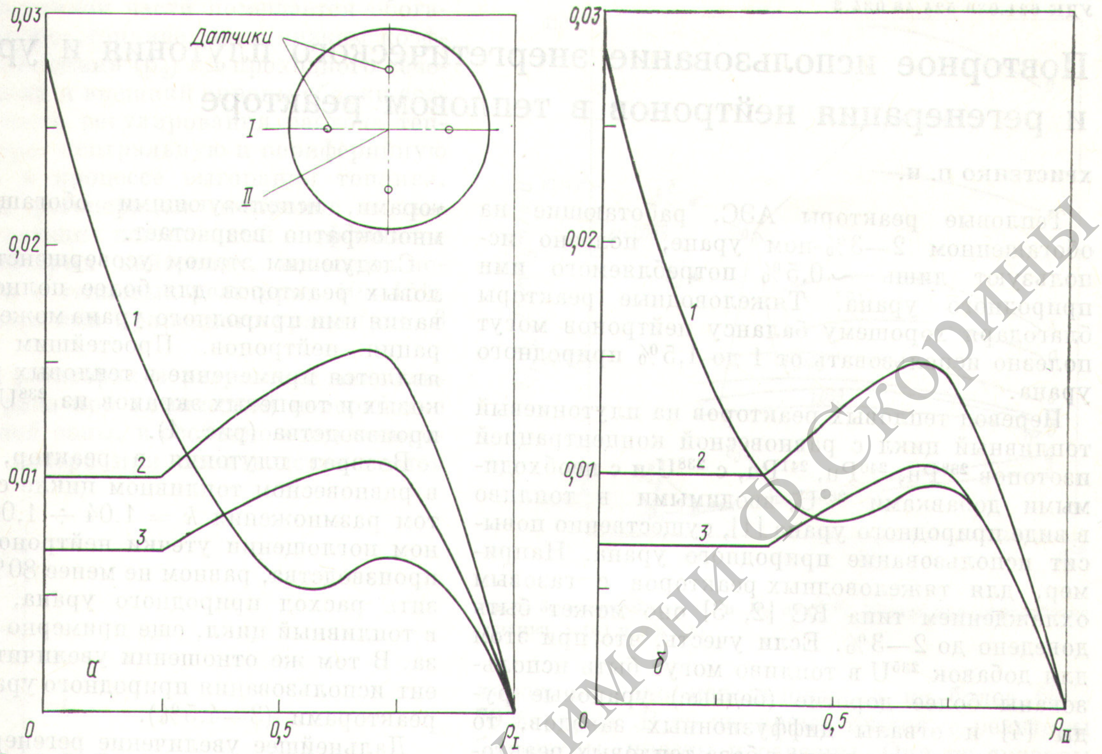

Рис. 2. Оценки погрешностей восстановления поля нейтронов вдоль радиусов I (*а*) и II (*б*) вследствие дискретности измерений (*1*) при $\delta_i = \delta r_i = 0$; погрешности датчиков (*2*) и неопределенности их координат (*3*)

Из таблицы определяется порядок собственных функций для аппроксимации: $k_j = 00$ [функция $\Phi^0(\rho)$], 10, 20, 01, 30, 40, 11 и т. д. На рис. 1 учтено, что при $k > 0$ кратность λ_{kj} равна двум и взяты одновременно обе функции из выражения (21).

На рис. 2 приведены оценки погрешности восстановления поля нейтронов по показаниям четырех датчиков, расположенных на расстоянии 0,6 радиуса от центра и учете трех собственных функций [на оси ординат отложены значения правых частей неравенств (15 б), (16) и (17)]. Погрешность датчиков и неопределенность их координат считались равными 0,01. В рассматриваемом случае $R^*_{nl}(r, r_i)$ получилось равным нулю.

Поступила в Редакцию 23/X 1975 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hurley T.** «Trans. Amer. Nucl. Soc.», 1966, v. 9, p. 262.
2. **Legget W.** Ibid., p. 484.
3. **Потапенко П. Т.** «Атомная энергия», 1968, т. 24, вып. 4, с. 340.
4. **Емельянов И. Я., Константинов Л. В., Постников В. В.** «Атомная энергия», 1971, т. 30, вып. 3, с. 275.
5. **Емельянов И. Я. и др.** «Атомная энергия», 1971, т. 30, вып. 5, с. 422.
6. **Емельянов И. Я. и др.** «Атомная энергия», 1973, т. 34, вып. 2, с. 75.
7. **Емельянов И. Я. и др.** «Атомная энергия», 1974, т. 87, вып. 6, с. 451.
8. **Коровкин П. П.** Линейные операторы и теория приближений М., «Наука», 1959.
9. **Степанов В. В.** Курс дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1966.
10. **Хитчкок А.** Устойчивость ядерных реакторов. М., Госатомиздат, 1963.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины