Н. В. Максименко, О. М. Дерюжкова
Физический факультет,
кафедра теоретической физики

МЕТОДИКА ПОЛЕВОГО ПОДХОДА ОПИСАНИЯ СВОЙСТВ СВОБОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

В основе современной теории элементарных частиц лежат понятия полей. Каждому типу элементарных частиц сопоставляется своё поле. Посредством квантов поля осуществляется взаимодействие. Считается, что задана полевая функция, если каждой точке пространства и времени ставится в соответствие одна или несколько величин $U_n(\vec{r},t)(n = 1,2 \ldots)$. Полевые функции удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям движения, которые содержат информацию о физическом состоянии данной системы.

Классические поля, соответствующие определённым элементарным частицам, являются непрерывными волновыми функциями, обладающими определенными трансформационными свойствами относительно преобразования пространственно-временных координат. Одним из наиболее подходящих формализмов для построения уравнений движения для полевых функций является математический аппарат непрерывных систем, в котором используются вариационные принципы. В системе вариационных принципов лагранжев формализм более приспособлен для учета квантово-механических и трансформационных релятивистских свойств элементарных частиц.

Опишем состояния свободных элементарных частиц, которые являются идеальными. Реально свойства микрочастиц устанавливаются экспериментально в процессе взаимодействия. Однако, когда элементарные частицы находятся на очень больших расстояниях, т. е., взаимодействия между частицами пренебрежимо малы, то их можно рассматривать как свободные. Для определения квантовых свойств свободных полей элементарных частиц воспользуемся ковариантным лагранжевым формализмом и вариационными принципами. В работе будем использовать естественную систему единиц измерения $\hbar=c=1$, которая применяется в физике элементарных частиц.

Рассмотрим скалярное вещественное поле элементарных частиц. Как следует из релятивисткой квантовой механики, квантово-механические свойства бесспиновой частицы определяются из уравнения Клейна–Гордона–Фока:

$$\partial_\mu^2 \varphi(x) - m^2 \varphi(x) = 0, \tag{1}$$

что согласуется с уравнением, которое следует из релятивисткой классической механики

$$p^2 = -m^2. \tag{2}$$

В самом деле, если воспользоваться соответствием

$$p_\mu \to \hat{p}_\mu = -i\partial_\mu$$

и учесть действие оператора $\hat{p}_\mu$ на волновую функцию $\varphi(x)$, тогда из (2) следует (1).

В рамках ковариантного формализма Лагранжа уравнение (1) можно получить, воспользовавшись лагранжианом вида:

$$L = -\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \varphi)^2 + m^2 \varphi^2\right]. \tag{3}$$

Для волновой функции $\varphi(x)$ справедливо уравнение Лагранжа–Эйлера

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0. \tag{4}$$

Используя (3), получим

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)}=-\partial_\mu\varphi.$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=-m^2\varphi.$$

Подставляя эти выражения в (4), нетрудно видеть соответствие уравнению (1)

$$\partial_\mu^2\varphi(x)-m^2\varphi(x)=0.$$

Используя лагранжиан (3) и определение тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu}=\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi)}(\partial_\nu\varphi)-\delta_{\mu\nu}L$$

получим выражение для тензора энергии-импульса вещественного поля. Выражение $T_{\mu\nu}$ в данном случае принимает вид:

$$T_{\mu\nu}=-(\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi)+\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\left[(\partial_\mu\varphi)^2+m^2\varphi^2\right]. \tag{5}$$

Энергия скалярного поля определяется

$$W=\int d^3xT_{44}=\int d^3x\frac{1}{2}\left[\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2+(\partial_t\varphi)^2+m^2\varphi^2\right]. \tag{6}$$

Из (6) очевидно, что $W\geq 0$. Используя (5), получим выражение для импульса поля

$$\vec{P}=-\int d^3x(\partial_t\varphi)\left(\vec{\nabla}\varphi\right).$$

Поскольку поле вещественное, то четырёхмерная плотность тока равна нулю, т.е. функции этого поля описывают состояния нейтральных частиц, заряд которых равен нулю.

Получим импульсное представление функций скалярного вещественного поля. Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\overrightarrow{dq}}{\sqrt{2E}}\left[a(\vec{q})e^{iqx}+b(\vec{q})e^{-iqx}\right]. \tag{7}$$

Если подставить экспоненты (7) в (1), то получим для каждой экспоненты при фиксированном q следующее выражение

$$q^2=\vec{q}^2-E^2=-m^2. \tag{8}$$

Таким образом, из (8) следует соотношение между энергией и импульсом для частицы, у которой масса покоя отлична от нуля. Поскольку полевая функция вещественна, то

$$\varphi^*(x) = \varphi(x). \tag{9}$$

В этом случае из (9) следует

$$b(\vec{q}) = a^*(\vec{q}).$$

В результате (7) можно представить в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\overrightarrow{dq}}{\sqrt{2E}} \left[a(\vec{q})^{iqx} + a^*(\vec{q})^{-iqx}\right]. \tag{10}$$

Вычислим теперь *W* и *P*, используя (10) и следующие общие соотношения:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int e'^{(\pm)} e^{(\pm)} \overrightarrow{dx} = \delta(\vec{q}\,' + \vec{q}) e^{\mp i(E'+E)t}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int e'^{(\mp)} e^{(\mp)} \overrightarrow{dx} = \delta(\vec{q}\,' - \vec{q}) e^{\mp i(E'-E)t}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{x} \int d\vec{q}\,' \int d\vec{q}\, \Phi'(\vec{q}\,', E') \Phi(\vec{q}, E) e'^{(\pm)} e^{(\pm)} =$$

$$= \int d\vec{q}\, \Phi'(-\vec{q}, E) \Phi(\vec{q}, E) e^{\pm 2iEt}, \tag{13}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{x} \int d\vec{q}\,' \int d\vec{q}\, \Phi'(\vec{q}\,', E') \Phi(\vec{q}, E) e'^{(\pm)} e^{(\pm)} = \int d\vec{q}\, \Phi'(\vec{q}, E) \Phi(\vec{q}, E). \tag{14}$$

В этих выражениях введены обозначения $e^{(\pm)} = e^{\pm iqx} = e^{\pm i(\vec{q}\vec{x} - Et)}$. Функции $\Phi'(\vec{q}\,', E')$ и $\Phi(\vec{q}, E)$ – множители, стоящие при экспонентах в (10). Используя (10) – (14) и определение *W* (6) получим

$$W = \frac{1}{2} \int d\vec{q} E [a^*(\vec{q}) a(\vec{q}) + a(\vec{q}) a^*(\vec{q})], \tag{15}$$

$$P = \frac{1}{2} \int d\vec{q} (\vec{q}) [a^*(\vec{q}) a(\vec{q}) + a(\vec{q}) a^*(\vec{q})]. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь физическую интерпретацию полученных решений. Полевые функции $\varphi(x)$ являются волновыми функциями релятивистского уравнения Клейна–Гордона–Фока (1):

$$\left(\partial_\mu^2 - m^2\right) \varphi(x) = 0.$$

Решение этого уравнения представляется в виде суперпозиции «чистых состояний» с определенным значением $\vec{q}$ и E

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} e^{iqx}.$$

Частица массы m может находиться в одном из этих состояний. Согласно квантовой механики вероятность нахождения частицы в состоянии с импульсом $\vec{q}$ и энергией E будет иметь вид

$$\omega = |a(\vec{q})|^2.$$

В этом случае выражения (15) и (16) можно интерпретировать, как среднее значение четырехмерного импульса поля

$$P_\mu = \int d\vec{q}\, q_\mu |a(\vec{q})|^2,$$

где $q_\mu\{\vec{q}, iE\}$.

Таким образом, методический подход описания квантово-механических свойств бесспиновых частиц определяется, прежде всего тем, что является доступным и может служить основой для последующего, более углубленного, изучения квантовой теории поля и физики элементарных частиц. Из полученных результатов видно, что теория поля может быть построена по аналогии и на основе использования математического аппарата классической механики систем материальных точек. Это простой вариант изложения квантово-механических основ расчета электродинамических процессов в рамках классической теории поля, сопоставляемых элементарным частицам.