В. В. АНДРЕЕВ
Физический факультет,
кафедра теоретической физики

НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕАКЦИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Введение

При расчетах процессов взаимодействия элементарных частиц возникает задача по вычислению матричных элементов процессов взаимодействия с участием фермионов $M_{\lambda_p,\lambda_k}\left(p,s_p;k,s_k\right)$.

На начальных этапах развития физики высоких энергий изучались процессы с небольшим количеством неполяризованных частиц в конечном состоянии. Как правило, необходимая точность вычислений ограничивалась первым порядком теории возмущений по константе взаимодействия. Поэтому для получения наблюдаемых величин было достаточно расчета квадрата модуля матричного элемента

$\left|M_{\lambda_p,\lambda_k}\left(p,s_p;k,s_k\right)\right|^2$ с использованием шпуров с матрицами Дирака γ.

Однако, прогресс в области экспериментальной техники позволил изучать поляризационные эффекты, которые стали становиться источником новой и нетривиальной информации о процессах взаимодействия элементарных частиц. Процесс вычисления сечений таких реакций показал, что традиционный метод становится достаточно громоздким. Так, например, вычисление процесса комптоновского рассеяния (в борновском приближении) с учетом поляризаций частиц требует расчетов следов от 12 матриц Дирака. Это приводит в конечном счете к тому, что квадрат матричного элемента комптоновского рассеяния содержит свыше 10 тысяч слагаемых. Поэтому вычисление наблюдаемых для некоторых сложных процессов длилось годами, и изложение результатов занимало несколько научных статей.

С ростом мощностей коллайдеров изучение процессов с большим количеством частиц в конечном состоянии (> 3) стало неотъемлемой частью научных программ в физике высоких энергий. В данной ситуации количество диаграмм значительно возрастает по сравнению с бинарными реакциями, и метод вычисления квадрата модуля матричных элементов таких процессов приводит к резкому увеличению объемов вычислений.

Таким образом, расчет более высоких порядков теории возмущений, изучение многочастичных процессов, анализ поляризационных эффектов потребовали новых, более эффективных по сравнению с традиционной, схем вычисления наблюдаемых величин.

В данной работе изложен **новый метод расчета амплитуд реакций** с дираковскими частицами, названный *методом базисных спиноров* (МБС). Отметим некоторые преимущества МБС. В этом подходе не используется явный вид спиноров и γ-матриц Дирака. Сам метод основан на использовании всего трех соотношений, с помощью которых спинорная часть матричного элемента редуцируется к скалярным произведениям векторов реакции и изотропной тетрады. Соотношение полноты (14) позволяет создать несложную итерационную схему для вычислений матричных элементов. Такая схема естественно приводит к технике расчетов, которая названа техникой «строительных» блоков и которая позволяет значительно сократить объем вычислительной работы.

1. Основные соотношения МБС

Итак основной адачей является редукция выражения, содержащего биспиноры

$$M_{\lambda_p,\lambda_k}\left(p,s_p;k,s_k\right)=\bar{w}^A_{\lambda_p}\left(p,s_p\right)Q\,w^B_{\lambda_k}\left(k,s_k\right), \tag{1}$$

где

$$w_\lambda^A\left(p,s_p\right)=\begin{cases}u_\lambda\left(p,s_p\right),\text{ если } A=1,\\ \upsilon_\lambda\left(p,s_p\right),\text{ если } A=-1.\end{cases} \tag{2}$$

к явно скалярной функции. В соотношении (1) оператор Q является суммой произведений γ-матриц Дирака.

Сделаем несколько построений необходимых для МБС. В пространстве Минковского введем четверку (тетраду) ортонормированных 4-векторов l_A (индекс A задает их количество), которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left(l_A l_B\right)=g_{AB},\ \text{т. е.}\quad l_0^2=-l_1^2=-l_2^2=-l_3^2=1,\,(A=0,1,2,3)\,, \tag{3}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}l_A^\mu\, l_B^\nu\, l_C^\rho\, l_D^\sigma=\varepsilon_{ABCD}\,,\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}l_0^\mu\, l_1^\nu\, l_2^\rho\, l_3^\sigma=\varepsilon_{0123}=-1\,. \tag{4}$$

Компоненты $\mu=0,1,2,3$ этих 4-векторов l_A определяются соотношением $\left(l_A\right)_\mu=\delta_{A\mu}$. Метрический тензор g можно представить в виде линейной комбинации матриц-диад, составленных из этих векторов, т. е.

$$g^{\mu\nu}=l_0^\mu\cdot l_0^\nu-l_1^\mu\cdot l_1^\nu-l_2^\mu\cdot l_2^\nu-l_3^\mu\cdot l_3^\nu\,. \tag{5}$$

Используя векторы l_A, определим светоподобные векторы, которые образуют изотропную тетраду в пространстве Минковского (об изотропной тетраде см. [1]):

$$b_\rho=\left(l_0+\rho l_3\right)/\,2,\ \ n_\lambda=\left(\lambda l_1+i\,l_2\right)/\,2,\quad(\rho,\lambda=\pm1)\,. \tag{6}$$

Из соотношений (5), (6) следует:

$$\left(b_\rho b_{-\lambda}\right)=\delta_{\lambda,\rho}\,/\,2\ \ ,\left(n_\lambda n_{-\rho}\right)=\delta_{\lambda,\rho}\,/\,2\,,\left(b_\rho n_\lambda\right)=0\,, \tag{7}$$

$$g^{\mu\nu}=\sum_{\lambda=-1}^{1}\left[\tilde b_\lambda^\mu\cdot b_{-\lambda}^\nu+\tilde n_\lambda^\mu\cdot n_{-\lambda}^\nu\right], \tag{8}$$

где

$$\tilde b_\rho=2\,b_\rho,\,\tilde n_\lambda=2\,n_\lambda\ . \tag{9}$$

С помощью векторов изотропной тетрады (7) определим *безмассовые базисные спиноры* $u_\lambda\left(b_{-1}\right)$ и $u_\lambda\left(b_1\right)$:

$$\hat b_{-1}u_\lambda\left(b_{-1}\right)=0\,,\ \ u_\lambda\left(b_1\right)=\hat b_1 u_{-\lambda}\left(b_{-1}\right), \tag{10}$$

$$\omega_\lambda u_\lambda\left(b_{\pm1}\right)=u_\lambda\left(b_{\pm1}\right) \tag{11}$$

с проективной матрицей $\omega_{\lambda} = 1/2\left(I + \lambda\gamma_5\right)$ и условием нормировки

$$u_{\lambda}\left(b_{\pm1}\right)\bar{u}_{\lambda}\left(b_{\pm1}\right) = \omega_{\lambda}\hat{b}_{\pm1}. \tag{12}$$

Фазовое соглашение, которое будет определять связь между спинорами с разной спиральностью, выберем в виде

$$\hat{n}_{\lambda}u_{-\rho}\left(b_{-1}\right) = \delta_{\lambda,\rho}u_{\rho}\left(b_{-1}\right). \tag{13}$$

Важным свойством спиноров (10) является соотношение полноты, которое доказывается с помощью (10)–(12) и записывается в виде

$$\sum_{\lambda,A=-1}^{1} u_{\lambda}\left(b_A\right)\bar{u}_{-\lambda}\left(b_{-A}\right) = I. \tag{14}$$

Используя, что

$$g^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=-1}^{1}\left[\tilde{b}_{\lambda}^{\mu}\cdot b_{-\lambda}^{\nu} + \tilde{n}_{\lambda}^{\mu}\cdot n_{-\lambda}^{\nu}\right] \tag{15}$$

матрицу Дирака γ^{μ} можно переписать в виде

$$\gamma^{\mu} = \sum_{\lambda=-1}^{1}\left[\hat{b}_{-\lambda}\tilde{b}_{\lambda}^{\mu} + \hat{n}_{-\lambda}\tilde{n}_{\lambda}^{\mu}\right]. \tag{16}$$

С помощью уравнений (10), (13) и (16) найдем действие матриц Дирака на базисные спиноры

$$\gamma^{\mu}u_{\lambda}\left(b_A\right) = \tilde{b}_A^{\mu}\,u_{-\lambda}\left(b_{-A}\right) - A\,\tilde{n}_{-A\times\lambda}^{\mu}\,u_{-\lambda}\left(b_A\right). \tag{17}$$

Спинорные произведения базисных спиноров (10) задаются простыми соотношениями

$$\bar{u}_{\lambda}\left(b_C\right)u_{\rho}\left(b_A\right) = \delta_{\lambda,-\rho}\,\delta_{C,-A},\ (C, A, \lambda, \rho = \pm1). \tag{18}$$

Уравнения (17)–(18) и соотношение

$$\gamma_5 u_{\lambda}\left(b_{\pm1}\right) = \lambda\,u_{\lambda}\left(b_{\pm1}\right) \tag{19}$$

позволяют рассчитать матричный элемент в терминах векторов изотропной тетрады и физических векторов p и k.

2. Расчет матричного элемента

С помощью соотношения полноты (14) амплитуда $M_{\lambda_p,\lambda_k}\left(p, s_p; k, s_k\right)$ для фермионов может быть представлена в виде:

$$M_{\lambda_p,\lambda_k}^{B,D}\left(p,s_p\,;k,s_k\right)=\sum_{A,\,C,\sigma,\,\rho=-1}^{1}\left\{\overline{w}_{\lambda_p}^{B}\left(p,s_p\right)u_{-\sigma}\left(b_{-C}\right)\right\}$$

$$\left\{\overline{u}_{\sigma}\left(b_C\right)Qu_{-\rho}\left(b_{-A}\right)\right\}\left\{\overline{u}_{\rho}\left(b_A\right)w_{\lambda_k}^{D}\left(k,s_k\right)\right\}=$$

$$=\sum_{\sigma,\,\rho=-1}^{1}\sum_{A,\,C=-1}^{1}\overline{s}_{\sigma,\lambda_p}^{(C,\,D)}\left(p,s_p\right)\Gamma_{\sigma,\rho}^{C,A}\left[Q\right]s_{\rho,\lambda_k}^{(A,\,D)}\left(k,s_k\right). \qquad (20)$$

В формуле (20) выделены коэффициенты разложения $s,\overline{s}$ физических спиноров по базисным спинорам

$$s_{\rho,\lambda}^{(A,\,B)}\left(p,s_p\right)=\overline{u}_{\rho}\left(b_A\right)w_{\lambda}^{B}\left(p,s_p\right),\quad \overline{s}_{\rho,\lambda}^{(A,\,B)}\left(p,s_p\right)=s_{-\rho,\lambda}^{*(-A,\,B)}\left(p,s_p\right). \qquad (21)$$

и матричный элемент базисных спиноров:

$$\Gamma_{\rho,\sigma}^{C,A}\left[Q\right]=\overline{u}_{\rho}\left(b_C\right)Q\,u_{-\sigma}\left(b_{-A}\right). \qquad (22)$$

Используя, формулы (17) и (18) для случая $Q=\gamma^{\mu}$ получим

$$\Gamma_{\rho,\,\sigma}^{C,\,A}\left[\gamma^{\mu}\right]=\delta_{\sigma,\,-\rho}\left(\delta_{C,\,-A}\,\tilde{b}_{-A}^{\mu}+A\,\delta_{C,A}\,\tilde{n}_{-A\times\rho}^{\mu}\right). \qquad (23)$$

В случае если $Q=\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}$ результат для $\Gamma_{\rho,\sigma}^{C,A}\left[Q\right]$ может быть получен n-кратным применением (17).

Если 4-импульс имеет следующие компоненты $p=\left(\omega_{m_p}(\mathbf{p}),\right.$ $p^x=\left|\mathbf{p}\right|\sin\theta_p\sin\phi_p\ ,\mathrm{p}^y=\left|\mathbf{p}\right|\sin\theta_p\cos\phi_p\ ,\mathrm{p}^z=\left.\left|\mathbf{p}\right|\cos\theta_p\right)$, то для спиральных поляризационных состояний фермионов, коэффициенты разложения можно представить в виде [2]

$$s_{\rho,\lambda}^{(A,\,B)}\left(p,s_H\right)=\overline{u}_{\rho}\left(b_A\right)w_{\lambda}^{B}\left(p,s_H\right)=-\lambda W_{m_p}\left(-\lambda\;\rho\;B\;p\right)f\left(\lambda\;\rho,B\right)D_{A\rho/2,-B\lambda/2}^{*1/2}\left(\phi_p\,,\theta_p\,,-\phi_p\right), \qquad (24)$$

где

$$W_{m_p}\left(\pm p\right)=\sqrt{\omega_{m_p}\left(p\right)\pm p}\,,\quad f\left(A,D\right)=\delta_{A,-1}+D\,\delta_{A,1}\,. \qquad (26)$$

В итоге используя выражения (23) и (24) матричный элемент преобразуется к явной скалярной функции (биспиноры отсутствуют), которая определяется векторами изотропной тетрады и физическими векторами p и k. Данный метод вычисления матричных элементов используется в специальном курсе «Техника вычислений процессов взаимодействия элементарных частиц», а также может быть применен при изучении курсов, связанных с физикой элементарных частиц и теорией поля.

Литература

1 Borodulin, V. I. CORE-COmpendium of RElations / V. I. Borodulin, R. N. Rogalev, S. R. Slabospitsky. – Protvino, Russia: IHEP , 1995. – 108 P. – (Preprint IHEP 95–90).

2 Андреев, В. В. Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовополевыми потенциалами / В. В. Андреев. – Гомель: УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины», 2008. – 294 с.