Проблемы физики, математики и техники, № 3 (12), 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О СТРОЕНИИ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА СЕКЦИИ ЛОКЕТТА π-РАЗРЕШИМОГО ФИТТИНГОВА ФУНКТОРА

Е.А. Витько

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск

ON THE STRUCTURE OF THE SMALLEST ELEMENT OF THE LOCKETT SECTION OF A π-SOLUBLE FITTING FUNCTOR

E.A. Vitko

P.M. Masherov Vitebsk State University, Vitebsk

Пусть f – сопряженный Λ-нормально вложенный π-разрешимый фиттингов функтор, f_* – наименьший по сильному вложению элемент секции Локетта функтора f. В работе решена обобщенная версия проблемы Бейдельмана-Брюстера-Хаука: описано строение f_*.

Ключевые слова: *оператор Локетта, секция Локетта, фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор.*

Let f be a conjugate Λ-normally embedded π-soluble Fitting functor and let f_* be the smallest element of the Lockett section of f with respect to strong containment. A generalized version of an open question of Beidleman-Brewster-Hauck is to give a description of f_*. In this paper such a description is presented.

Keywords: *Lockett's operation, Lockett section, Fitting $\mathfrak{X}$-functor.*

Введение

В теории разрешимых фиттинговых функторов известна

Проблема (Бейдельман, Брюстер, Хаук [1, проблема 8 (7)]): описать строение наименьшего элемента f_* секции Локетта для нормально вложенного сопряженного фиттингова функтора f. В частности, является ли f_* произведением фиттинговых функторов f и $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{S}_*}$, если $f = \mathrm{Hall}_\pi$?

Напомним, что если $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга, то фиттинговым $\mathfrak{X}$-функтором называется [2] отображение f, сопоставляющее каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ непустое множество ее $\mathfrak{X}$-подгрупп $f(G)$ такое, что выполняются следующие условия:

(i) если α: $G \to \alpha(G)$ – изоморфизм, то

$$f(\alpha(G)) = \{\alpha(X): X \in f(G)\};$$

(ii) если N – нормальная подгруппа группы G, то

$$f(N) = \{X \cap N: X \in f(G)\}.$$

Фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор называется разрешимым, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ классу всех разрешимых групп. Если для каждой группы $G \in \mathfrak{X}$ множество $f(G)$ есть класс сопряженных подгрупп группы G, то фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор мы называем сопряженным.

При этом секцией Локетта сопряженного фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора f называется [3] множество $\mathrm{Locksec}(f) = \{g$: g – сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор и $f^* = g^*\}$, где f^* – отображение, сопоставляющее каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ множество $\{\pi_1(T)$: $T \in f(G \times G)\}$, $\pi_1(T)$ – проекция подгруппы T на первую компоненту.

Положительное решение указанной выше проблемы было получено Бейдельманом и Галледжи [4]. В настоящей работе мы даем положительное решение обобщенной версии указанной проблемы: нами получено полное описание строения функтора f_* для сопряженного нормально вложенного π-разрешимого фиттингова функтора f.

В определениях и обозначениях мы следуем [5]. В работе рассматриваются только конечные группы.

1 Предварительные сведения

Напомним, что классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называется ее $\mathfrak{F}$-радикалом, если она является наибольшей из нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Тогда холловой π-подгруппой группы G называют такую подгруппу H из G, что $|H|$ является π-числом, а её индекс $|G:H|$ – π'-числом.

Следуя [5] (см. также [6]), холловой системой π-разрешимой группы G будем называть такое множество Σ холловых подгрупп из G, что выполняются следующие условия:

1) для всякого множества ρ из π множество Σ содержит в точности одну холлову ρ-подгруппу и в точности одну холлову $(\rho \cup \pi')$-подгруппу;

2) если $H, K \in \Sigma$, то $H \cdot K = K \cdot H$.

Пусть Σ – холлова система π-разрешимой группы *G* и *R* – подгруппа группы *G*. Через $\Sigma \cap R$ обозначают множество подгрупп $\{S \cap R : S \in \Sigma\}$. Если $\Sigma \cap R$ – холлова система группы *R*, то говорят, что Σ редуцирует холлову систему Σ_R подгруппы *R*, и обозначают $\Sigma \searrow R$. В этом случае Σ называется продолжением холловой системы Σ_R. Если $g \in G$, то обозначим $\Sigma^g = \{S^g : S \in \Sigma\}$.

Всякие две холловы системы π-разрешимой группы сопряжены.

Пусть *R* – подгруппа π-разрешимой группы *G*. Тогда всякая холлова система Σ_R подгруппы *R* может быть продолжена до некоторой холловой системы Σ группы *G*. Всякая холлова система группы *G* редуцируется в некоторую сопряженную с *R* подгруппу.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Подгруппа *A* группы *G* называется [7] π-связанной, если либо порядок подгруппы *A*, либо ее индекс в *G* является π-числом.

Подгруппа *H* группы *G* называется пронормальной в *G*, если для любого $x \in G$ подгруппы *H* и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle$.

***Лемма* 1.1** [7]. *π-связанная подгруппа H π-разрешимой группы G пронормальна тогда и только тогда, когда всякая холлова система Σ группы G редуцируется точно в одну подгруппу, сопряженную с H.*

***Лемма* 1.2** [7]. *Пусть A и B пронормальные π-связанные подгруппы π-разрешимой группы G. Если A и B перестановочны, то подгруппа AB является π-связанной пронормальной подгруппой группы G.*

Подгруппу *X* группы *G* называют π-нормально вложенной, если холлова π-подгруппа группы *X* является холловой π-подгруппой некоторой нормальной подгруппы группы *G*.

***Лемма* 1.3.** *Пусть* $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$, *Σ – холлова система группы G, X и Y – π-нормально вложенные π-связанные перестановочные подгруппы группы G, в которые редуцируется холлова система Σ. Тогда XY π-нормально вложенная подгруппы группы G.*

Доказательство. Пусть $G_\pi \in \Sigma$. Так как холлова система Σ редуцируется в подгруппы *X* и *Y*, то $X \cap G_\pi \in \mathrm{Hall}_\pi(X)$ и $Y \cap G_\pi \in \mathrm{Hall}_\pi(Y)$. Но тогда, ввиду π-нормальной вложенности, существуют нормальные подгруппы *M* и *N* группы *G* такие, что $X \cap G_\pi = M \cap G_\pi$ и $Y \cap G_\pi = N \cap G_\pi$. Таким образом,

$$(X \cap G_\pi)(Y \cap G_\pi) =$$
$$= (M \cap G_\pi)(N \cap G_\pi) = MN \cap G_\pi.$$

Следовательно,

$$XY \cap G_\pi =$$
$$= (X \cap G_\pi)(Y \cap G_\pi) \in \mathrm{Hall}_\pi(XY) \cap \mathrm{Hall}_\pi(MN).$$

Так как *MN* – нормальная подгруппа группы *G*, то подгруппа *XY* является π-нормально вложенной.

Лемма доказана.

***Лемма* 1.4.** *Пусть* $H_1, \ldots, H_n$ *– π-связанные подгруппы группы* $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ *попарно взаимно простых порядков такие, что* $H_i H_j = H_j H_i$ *для всех* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. *Пусть* $M_1, \ldots, M_n$ *– нормальные подгруппы группы G. Тогда* $(H_i \cap M_i)(H_j \cap M_j)$ *является подгруппой группы G для любых* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Доказательство. Пусть $H = \prod_{i=1}^{n} H_i$ и $N_i = H \cap M_i$. Тогда *H* является подгруппой группы *G* и N_i – нормальная подгруппа группы *H*. Так как

$$H_i \cap N_i = H_i \cap H \cap M_i = H_i \cap M_i,$$

то достаточно показать, что

$$(H_i \cap N_i)(H_j \cap N_j) \le H.$$

Пусть множество простых чисел $\pi_i = \pi(H_i)$, тогда H_i является холловой π_i-подгруппой группы *H*.

Пусть $h_j \in H_j \cap N_j$, $h_i \in H_i$. Тогда произведение $h_j h_i \in (H_j \cap N_j) H_i$. Так как по условию леммы подгруппы H_i и H_j перестановочны, то существуют $h_i' \in H_i$ и $h_j' \in H_j$ такие, что

$$h_j h_i = h_i' h_j'. \qquad (1.1)$$

Но $h_j \in N_j$. Кроме того, N_j – нормальная подгруппа группы *G*. Следовательно, существует такой элемент $n_j \in N_j$, что $h_j h_i = h_i n_j$.

Таким образом, $h_i' h_j' = h_i n_j$. Тогда получим

$$h_i^{-1} h_i' = n_j h_j'^{-1} \in H_i \cap N_j H_j.$$

Но $H_i \cap N_j \in \mathrm{Hall}_{\pi_i}(N_j)$. Кроме того,

$$\pi(H_j) = \pi_j \subseteq \pi_i'.$$

Следовательно, $H_i \cap N_j \in \mathrm{Hall}_{\pi_i}(N_j H_j)$ и

$$H_i \cap N_j H_j = H_i \cap N_j \le N_j.$$

Таким образом, $n_j h_j'^{-1} \in N_j$ и $h_j' \in N_j$. Тогда из равенства (1.1) следует, что $(H_j \cap N_j) H_i$ – подгруппа группы *H*. Следовательно,

$$T_{ij} = N_i (H_j \cap N_j) \cap H_i (H_j \cap N_j)$$

также является подгруппой группы *H*. Но $(H_i \cap N_i)(H_j \cap N_j) \subseteq T_{ij}$. Кроме того,

$$H_i \cap N_i \in \mathrm{Hall}_{\pi_i}\left(N_i\left(H_j \cap N_j\right)\right) \text{ и}$$
$$H_j \cap N_j \in \mathrm{Hall}_{\pi_j}\left(H_i\left(H_j \cap N_j\right)\right).$$

Так как порядок T_{ij} является $\left(\pi_i \cup \pi_j\right)$-числом, то получим $\left(H_i \cap N_i\right)\left(H_j \cap N_j\right) = T_{ij} \le H$.

Лемма доказана.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Пусть θ – некоторая конечная система попарно непересекающихся подмножеств множества всех простых чисел: $\theta = \{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k\}$, причем $\mathbb{P} = \bigcup_{i=1}^{k} \pi_i$ и $\pi' \subseteq \pi_j$ для некоторого $\pi_j \in \theta$. Пусть G – π-разрешимая группа. Напомним, что множество Г подгрупп $H_1, H_2, ..., H_k$ группы G называется холловской θ-базой группы G, если:

1) H_i – π_i-холлова подгруппа группы G для любого $i \in \{1, ..., k\}$;

2) $H_i H_j = H_j H_i$ для любых $i \neq j$.

Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда [6, теорема 1] группа G содержит по крайней мере одну холловскую θ-базу и любые две холловские θ-базы сопряжены между собой.

2 Фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы

Напомним некоторые определения и свойства, полученные нами в [2].

Если $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга, то отображение f, которое каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ ставит в соответствие некоторое непустое множество ее $\mathfrak{X}$-подгрупп $f(G)$, называют фиттинговым $\mathfrak{X}$-функтором, если выполняются следующие условия:

(i) если α: $G \to \alpha(G)$ – изоморфизм, то
$$f(\alpha(G)) = \{\alpha(X): X \in f(G)\};$$

(ii) если N – нормальная подгруппа группы G, то
$$f(N) = \{X \cap N: X \in f(G)\}.$$

Коротко множество $\{\alpha(X): X \in f(G)\}$ будем обозначать через $\alpha(f(G))$, а множество $\{X \cap N: X \in f(G)\}$ – через $f(G) \cap N$.

Пусть f – фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор. Множество всех простых чисел p, для которых существует такая группа $G \in \mathfrak{X}$ и подгруппа $X \in f(G)$, что число p является делителем порядка $|X|$, назовем характеристикой фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора f и обозначим Char f.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга. Тогда фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор называется:

1) π-*функтором*, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_\pi$, в частности, p-функтором, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_p$;

2) *разрешимым*, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$;

3) π-*разрешимым*, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}^\pi$;

4) *сопряженным*, если для каждой группы $G \in \mathfrak{X}$ множество $f(G)$ есть класс сопряженных подгрупп группы G;

5) π-*нормально вложенным*, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является π-нормально вложенной подгруппой группы G;

6) *пронормальным*, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является пронормальной в группе G;

7) π-*связанным*, если каждая подгруппа $X \in f(G)$ является π-связанной подгруппой группы G;

8) *наследственным*, если класс $\mathfrak{X}$ наследственен.

Фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор будем называть просто фиттинговым функтором для случая, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$.

Заметим, что отображение $f = \mathrm{Hall}_\pi$, сопоставляющее каждой группе $G \in \mathfrak{S}^\pi$ множество её холловых π-подгрупп является сопряженным π-разрешимым фиттинговым функтором, и если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то отображение $g = \mathrm{Rad}_\mathfrak{F}$, сопоставляющее каждой группе $G \in \mathfrak{E}$ ее $\mathfrak{F}$-радикал, является фиттинговым функтором.

Введем на множестве сопряженных фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов отношение "$\ll$" следующим образом. Если f и g – сопряженные фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы, то f назовем сильно вложенным в g и обозначим $f \ll g$ в том и только в том случае, когда для любой подгруппы $X \in f(G)$ существует такая подгруппа $Y \in g(G)$, что $X \le Y$.

Напомним, что если f и g – наследственные фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы, то произведением $\mathfrak{X}$-функторов $f \circ g$ называется [8] множество $\{X: X \in f(Y)$ для некоторой подгруппы $Y \in g(G)\}$.

Для доказательства основного результата мы будем использовать также конструкцию класса Фиттинга $L_\pi(f)$, который был определен нами [2] следующим образом. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга, f – фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор и π – множество простых чисел. Группа $G \in L_\pi(f)$ тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{X}$ и индекс $|G : X|$ является π′-числом для всех $X \in f(G)$.

Приведем некоторые свойства класса $L_\pi(f)$, полученные нами в [2].

Лемма 2.1 [2, лемма 4.1]. *Пусть π – непустое множество простых чисел, f – π-разрешимый фиттингов функтор. Тогда выполняется равенство*
$$L_\pi(f)\mathfrak{E}_{\pi'} = L_\pi(f).$$

Лемма 2.2 [2, следствие 4.3]. *Пусть f – сопряженный π-разрешимый фиттингов функтор. Справедливы следующие утверждения:*

1) *f – π-нормально вложенный π-разрешимый фиттингов функтор тогда и только тогда, когда для любой группы $G \in \mathfrak{S}^\pi$, подгруппы*

$X_\pi \in (\mathrm{Hall}_\pi \circ f)(G)$ подгруппа X_π является холловой π-подгруппой группы $G_{L_\pi(f)}$;

2) f – π-нормально вложенный π-разрешимый фиттингов функтор тогда и только тогда, когда для любой группы $G \in \mathfrak{S}^\pi$, подгрупп $X_\pi \in (\mathrm{Hall}_\pi \circ f)(G)$ и $G_\pi \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ таких, что $X_\pi \le G_\pi$, подгруппа X_π является нормальной подгруппой в G_π.

Используя лемму 2.2, докажем критерий π-нормальной вложенности сопряженных π-разрешимых фиттинговых функторов.

***Предложение* 2.3.** *Пусть $\{\pi_i : i \in I\}$ – множество попарно непересекающихся подмножеств множества простых чисел и $\bigcup_{i\in I}\pi_i = \pi$. Тогда и только тогда сопряженный π-разрешимый фиттингов функтор f является π-нормально вложенным, когда f π_i-нормально вложен и $L_{\pi_i}(f) = L_\pi(f)\mathfrak{S}^\pi_{\pi_i'}$ для всех $i \in I$.*

Доказательство. Так как $\pi_i \subseteq \pi$, то $\pi' \subseteq \pi_i'$. Следовательно, $L_\pi(f) \subseteq L_{\pi_i}(f)$. Пусть $G \in \mathfrak{S}^\pi$, $X \in f(G)$, $X_{\pi_i} \in \mathrm{Hall}_{\pi_i}(X)$ и X_π – холлова π-подгруппа группы X такая, что $X_{\pi_i} \le X_\pi$. Так как f – π-нормально вложенный функтор, то ввиду утверждения 1) леммы 2.2 получим

$$X_{\pi_i} \le X_\pi \le G_{L_\pi(f)} \le G_{L_{\pi_i}(f)}$$

Но тогда $X_{\pi_i} \in \mathrm{Hall}_{\pi_i}\left(X \cap G_{L_{\pi_i}(f)}\right)$.

Кроме того, $X \cap G_{L_{\pi_i}(f)} \in f\left(G_{L_{\pi_i}(f)}\right)$. Но группа $G_{L_{\pi_i}(f)} \in L_{\pi_i}(f)$. Следовательно, индекс $\left|G_{L_{\pi_i}(f)} : \left(X \cap G_{L_{\pi_i}(f)}\right)\right|$ является π_i'-числом. Таким образом, индекс подгруппы X_{π_i} в $G_{L_{\pi_i}(f)}$

$$\left|G_{L_{\pi_i}(f)} : X_{\pi_i}\right| =$$
$$= \left|\left(X \cap G_{L_{\pi_i}(f)}\right) : X_{\pi_i}\right| \cdot \left|G_{L_{\pi_i}(f)} : \left(X \cap G_{L_{\pi_i}(f)}\right)\right|$$

также является π_i'-числом. Таким образом, $X_{\pi_i} \in \mathrm{Hall}_{\pi_i}\left(G_{L_{\pi_i}(f)}\right)$ и f – π_i-нормально вложенный π-разрешимый фиттингов функтор.

Так как $\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Hall}_\pi = \mathrm{Hall}_{\pi_i}$, то вследствие леммы 2.2 получим

$$\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_\pi(f)} = \mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Hall}_\pi \circ \mathrm{Rad}_{L_\pi(f)} =$$
$$= \mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Hall}_\pi \circ f = \mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ f.$$

Пусть $G \in L_{\pi_i}(f)$, $X \in f(G)$ и

$$X_{\pi_i} \in \left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ f\right)(G).$$

По определению класса $L_{\pi_i}(f)$ получим, что индекс $\left|G : X_{\pi_i}\right| = \left|G : X\right| \cdot \left|X : X_{\pi_i}\right|$ является π_i'-числом. Следовательно, $X_{\pi_i} \in \mathrm{Hall}_{\pi_i}(G)$ и $\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ f = \mathrm{Hall}_{\pi_i}$. Таким образом, $\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_\pi(f)} = \mathrm{Hall}_{\pi_i}$. Тогда $G_{L_\pi(f)}$ содержит холлову π_i-подгруппу группы G. Следовательно, $G / G_{L_\pi(f)} \in \mathfrak{S}^\pi_{\pi_i'}$ и $G \in L_\pi(f)\mathfrak{S}^\pi_{\pi_i'}$.

С другой стороны,

$$L_{\pi_i}(f) = L_{\pi_i}(f)\mathfrak{S}^\pi_{\pi_i'} \supseteq L_\pi(f)\mathfrak{S}^\pi_{\pi_i'}.$$

Таким образом,

$$L_{\pi_i}(f) = L_\pi(f)\mathfrak{S}^\pi_{\pi_i'}.$$

Пусть теперь f – π_i-нормально вложенный π-разрешимый фиттингов функтор и $L_{\pi_i}(f) = L_\pi(f)\mathfrak{S}^\pi_{\pi_i'}$ для всех $i \in I$. Пусть $G \in \mathfrak{S}^\pi$, $X \in f(G)$ и $X_{\pi_i} \in \mathrm{Hall}_{\pi_i}(X)$. Ввиду леммы 2.2 получим

$$\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ f = \mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_{\pi_i}(f)} =$$
$$= \mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_\pi(f)\mathfrak{S}^\pi_{\pi_i'}} = \mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_\pi(f)}.$$

Но $\bigcup_{i\in I}\pi_i = \pi$. Следовательно, холлова π-подгруппа $X_\pi \le G_{L_\pi(f)}$, и по лемме 2.2 получим, что f – π-нормально вложенный π-разрешимый фиттингов функтор.

Предложение доказано.

Доказательство следующих свойств класса $L_\pi(f)$, которые мы будем использовать для доказательства основного результата, осуществляется непосредственной проверкой.

***Лемма* 2.4.**

1) *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, π, ρ – множества простых чисел такие, что $\rho \subseteq \pi$ либо $\pi' \subseteq \rho$, π-разрешимый фиттингов функтор $f = \mathrm{Rad}_\mathfrak{F}$. Тогда $L_\rho(f) = \mathfrak{F}\mathfrak{S}^\pi_{\rho'}$.*

2) *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, π – множество простых чисел, f, g – π-разрешимые фиттинговы функторы и $g = \mathrm{Rad}_\mathfrak{F}$, тогда*

$$L_\pi(f \circ g) = L_\pi(f) \cap L_\pi(g).$$

3 Пронормальные фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы

Следуя [9], введем определение операции "∨" на множестве пронормальных π-разрешимых фиттинговых функторов.

***Определение* 3.1.** *Фиттинговы π-разрешимые функторы f и g назовем перестановочными, если $XY = YX$ для любых подгрупп $X \in f(G)$ и $Y \in g(G)$ таких, что существует холлова система группы $G \in \mathfrak{S}^\pi$, которая редуцируется в X и в Y.*

***Определение* 3.2.** *Пусть I – множество индексов, $\{f_i : i \in I\}$ – множество пронормальных сопряженных попарно перестановочных π-разрешимых π-связанных фиттинговых функторов и $\operatorname{Char} f_i \bigcap \operatorname{Char} f_j = \varnothing$ для всех i, j ∈ I, если $i \neq j$. Определим операцию "$\vee$" следующим образом:*

$$\left(\underset{i\in I}{\vee} f_i\right)(G) = \left\{X : X = \prod_{i\in I} X_i,\ X_i \in f_i(G),\right.$$ *существует холлова система группы G, которая редуцируется в подгруппу X_i для всех $i \in I\}$.*

***Теорема* 3.3.** *Пусть $\{f_i : i \in I\}$ – множество пронормальных сопряженных попарно перестановочных π-разрешимых π-связанных фиттинговых функторов и $\operatorname{Char} f_i \bigcap \operatorname{Char} f_j = \varnothing$ для всех i, j ∈ I, если $i \neq j$. Тогда $\underset{i\in I}{\vee} f_i$ – пронормальный сопряженный π-разрешимый фиттингов функтор.*

Доказательство. Обозначим

$$f(G) = \left(\underset{i\in I}{\vee} f_i\right)(G).$$

Так как всякая холлова система подгруппы может быть продолжена до холловой системы группы, то множество $f(G)$ не пусто.

Так как по условию теоремы функторы из $\{f_i : i \in I\}$ попарно перестановочны, то ввиду леммы 1.2 каждая подгруппа из $f(G)$ пронормальна.

Пусть X, Y – подгруппы из $f(G)$. Тогда

$$X = \prod_{i\in I} X_i,\quad Y = \prod_{i\in I} Y_i,$$

где X_i и Y_i – подгруппы из $f_i(G)$ и Σ_1 – холлова система группы G, которая редуцируется в подгруппу X_i для всех $i \in I$, Σ_2 – холлова система группы G, которая редуцируется в подгруппу Y_i для всех $i \in I$. Так как любые две холловы системы π-разрешимой группы сопряжены, то существует элемент $g \in G$ такой, что $\Sigma_1 = \Sigma_2^{\,g}$. Таким образом, для всех $i \in I$ холлова система Σ_1 редуцируется как в подгруппу $X_i \in f_i(G)$, так и в $Y_i^g \in f_i(G)$. Тогда по лемме 1.1 получим $X_i = Y_i^g$. Таким образом,

$$X = \prod_{i\in I} X_i = \prod_{i\in I} Y_i^g = Y^g.$$

Следовательно, $f(G)$ – класс сопряженных подгрупп группы G.

Пусть $\alpha: G \to \alpha(G)$ – изоморфизм и X – подгруппа из $f(G)$. Тогда $X = \prod_{i\in I} X_i$, где X_i – подгруппа из $f_i(G)$ и Σ – холлова система группы G, которая редуцируется в подгруппу X_i для всех $i \in I$. Но $\alpha(X) = \alpha\left(\prod_{i\in I} X_i\right) = \prod_{i\in I} \alpha(X_i)$. Ввиду определения π-разрешимого фиттингова функтора получим

$$\alpha(X_i) \in \alpha(f_i(G)) = f_i(\alpha(G)).$$

Кроме того, $\alpha(\Sigma)$ – холлова система группы $\alpha(G)$, которая редуцируется в каждую подгруппу $\alpha(X_i)$ для всех $i \in I$. Таким образом, $\alpha(f(G)) = f(\alpha(G))$.

Пусть N – нормальная подгруппа группы G и X – подгруппа из $f(G)$. Тогда $X = \prod_{i\in I} X_i$, где X_i – подгруппа из $f_i(G)$ и Σ – холлова система группы G, которая редуцируется в подгруппу X_i для всех $i \in I$. Тогда ввиду определения π-разрешимого фиттингова функтора $X_i \bigcap N \in f_i(N)$. Кроме того, $\Sigma \bigcap N$ – холлова система группы N, которая редуцируется в подгруппу $X_i \bigcap N$. Тогда ввиду леммы 1.4 получим

$$X \bigcap N = \left(\prod_{i\in I} X_i\right) \bigcap N = \prod_{i\in I} (X_i \bigcap N) \in f(N).$$

Так как по доказанному выше $f(G)$ и $f(N)$ – классы сопряженных подгрупп групп G и N соответственно, то $f(G) \bigcap N = f(N)$.

Теорема доказана.

Ввиду леммы 1.3 получим

***Следствие* 3.4.** *Пусть $\{f_i : i \in I\}$ – множество пронормальных π-нормально вложенных сопряженных попарно перестановочных π-связанных π-разрешимых фиттинговых функторов и $\operatorname{Char} f_i \bigcap \operatorname{Char} f_j = \varnothing$ для всех i, j ∈ I, если $i \neq j$. Тогда $\underset{i\in I}{\vee} f_i$ – пронормальный π-нормально вложенный сопряженный π-разрешимый фиттингов функтор.*

4 Λ-нормально вложенные фиттинговы $\mathfrak{X}$-функторы

Выделим еще одно семейство π-разрешимых фиттинговых функторов.

***Определение* 4.1.** *Пусть I – множество индексов, π – некоторое множество простых чисел, $\Lambda = \{\pi_i : i \in I\}$ – система попарно непересекающихся подмножеств множества простых чисел такая, что $\pi' \subseteq \pi_i$ для некоторого $\pi_i \in \Lambda$ и $\bigcup_{\pi_i\in\Lambda} \pi_i = \mathbb{P}$. Фиттингов π-разрешимый функтор f назовем Λ-нормально вложенным, если функтор f является π_i-нормально вложенным для всех $\pi_i \in \Lambda$.*

***Примеры* 4.2.** Пусть π – некоторое множество простых чисел, $\Lambda = \{\pi_i : i \in I\}$ – система попарно непересекающихся подмножеств множества простых чисел такая, что $\pi' \subseteq \pi_i$ для некоторого $\pi_i \in \Lambda$ и $\bigcup_{\pi_i \in \Lambda} \pi_i = \mathbb{P}$.

1) Пусть $f = \mathrm{Hall}_{\pi_i}$ – π-разрешимый фиттингов функтор, G – π-разрешимая группа. Так как $\left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Hall}_{\pi_i}\right)(G) = \mathrm{Hall}_{\pi_i}(G)$ и $\left(\mathrm{Hall}_{\pi_j} \circ \mathrm{Hall}_{\pi_i}\right)(G) = \{E\}$, если $i \neq j$, то f является Λ-нормально вложенным π-разрешимым фиттинговым функтором.

2) Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга, π-разрешимый фиттингов функтор $f = \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}}$. Так как для любой группы $G \in \mathfrak{S}^\pi$ подгруппа $G_{\mathfrak{X}} \in f(G)$ является нормальной подгруппой, то f является Λ-нормально вложенным π-разрешимым фиттинговым функтором.

Заметим, что если f, g – Λ-нормально вложенные π-разрешимые фиттинговы функторы, то ввиду [2, теорема 5.4] их произведение $f \circ g$ также является Λ-нормально вложенным π-разрешимым фиттинговым функтором.

***Лемма* 4.3.** *Пусть f – Λ-нормально вложенный π-разрешимый фиттингов функтор. Тогда f является пронормальным π-разрешимым фиттинговым функтором.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{S}^\pi$, X – подгруппа из $f(G)$, система подмножеств множества простых чисел $\theta = \{\pi_i : \pi_i \in \Lambda,\ \pi(X) \cap \pi_i \neq \varnothing\}$ и $H_1, H_2, ..., H_k$ – холловская θ-база группы X. Так как функтор f является π_i-нормально вложенным для любого $\pi_i \in \Lambda$, то холлова π_i-подгруппа H_i группы X является холловой π_i-подгруппой некоторой нормальной подгруппы N группы G. Следовательно, для любого $g \in G$ подгруппа H_i^g также является холловой π_i-подгруппой N. Тогда H_i и H_i^g являются холловыми π_i-подгруппами группы $\langle H_i, H_i^g \rangle$. Таким образом, H_i и H_i^g сопряжены в $\langle H_i, H_i^g \rangle$ и подгруппа H_i пронормальна для всех $i \in \{1, ..., k\}$. Но так как по определению холловской θ-базы подгруппы H_i перестановочны, то ввиду леммы 1.2 подгруппа X пронормальна.

Лемма доказана.

Ввиду леммы 4.3 операция “$\vee$” может быть определена на множестве Λ-нормально вложенных сопряженных π-разрешимых π-связанных фиттинговых функторов. Справедлива

***Теорема* 4.4.** *Пусть $\{f_i : i \in I\}$ – множество Λ-нормально вложенных сопряженных π-разрешимых π-связанных фиттинговых функторов и $\mathrm{Char} f_i \cap \mathrm{Char} f_j = \varnothing$ для всех i, $j \in I$, если $i \neq j$. Тогда $\vee_{i \in I} f_i$ – Λ-нормально вложенный сопряженный π-разрешимый фиттингов функтор.*

Доказательство. Ввиду леммы 4.3 функторы $\{f_i : i \in I\}$ пронормальны. Покажем, что они перестановочны. Пусть $G \in \mathfrak{S}^\pi$, X_i и X_j – подгруппы из $f_i(G)$ и $f_j(G)$ соответственно такие, что существует холлова система Σ группы G, которая редуцируется в X_i и в X_j. Так как f_i и f_j – Λ-нормально вложенные сопряженные π-разрешимые фиттинговы функторы, то для любого $\pi_k \in \Lambda$ в группе G существуют некоторые нормальные подгруппы N_{i,π_k} и N_{j,π_k} такие, что

$$G_{\pi_k} \cap X_i = G_{\pi_k} \cap N_{i,\pi_k} \text{ и } G_{\pi_k} \cap X_j = G_{\pi_k} \cap N_{j,\pi_k},$$

где $G_{\pi_k} \in \Sigma$. Тогда

$$X_i = \prod_{\pi_k \in \Lambda} \left(G_{\pi_k} \cap N_{i,\pi_k}\right) \text{ и } X_j = \prod_{\pi_k \in \Lambda} \left(G_{\pi_k} \cap N_{j,\pi_k}\right).$$

Тогда ввиду леммы 1.4 функторы f_i и f_j перестановочны и операция ”$\vee$” определена на множестве функторов $\{f_i : i \in I\}$. Кроме того, ввиду следствия 3.4 $\vee_{i \in I} f_i$ – Λ-нормально вложенный сопряженный π-разрешимый фиттингов функтор.

Теорема доказана.

5 $\mathfrak{X}$-функторы Локетта

Определим теперь на множестве фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов функторную версию известных в теории классов Фиттинга [10] операторов Локетта.

***Определение* 5.1.** *Фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор назовем $\mathfrak{X}$-функтором Локетта, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ и $V \in f(G \times G)$ подгруппа*

$$V = \left(V \cap (G \times 1)\right) \times \left(V \cap (1 \times G)\right).$$

***Лемма* 5.2.** *Пусть f – сопряженный $\mathfrak{X}$-функтор Локетта, X, Y – подгруппы из $f(G)$, тогда $X \times Y \in f(G \times G)$.*

Доказательство. Так как f – сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор, то $Y = X^g$ для некоторого элемента $g \in G$.

Пусть α – изоморфизм группы G на $G \times 1$. Так как $X \in f(G)$, то $X \times 1 \in \alpha(f(G)) = f(\alpha(G)) = f(G \times 1)$. Кроме того, $G \times 1$ – нормальная подгруппа группы $G \times G$. Следовательно, ввиду определения фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора существует подгруппа $V \in f(G \times G)$ такая, что

$$V \cap (G \times 1) = X \times 1. \tag{5.1}$$

С другой стороны, $1 \times G \trianglelefteq G \times G$ и $V \cap (1 \times G) = 1 \times Z \in f(1 \times G)$. Но $1 \times G \cong G$. Следовательно, $Z \in f(G)$. Тогда ввиду сопряженности $\mathfrak{X}$-функтора f подгруппа $Z = X^h$ для некоторого $h \in G$. Таким образом,

$$V \cap (1 \times G) = 1 \times X^h. \tag{5.2}$$

Так как f – $\mathfrak{X}$-функтор Локетта и $V \in f(G \times G)$, то ввиду равенств (5.1) и (5.2)

$$V = \left(V \bigcap \left(G \times 1\right)\right) \times \left(V \bigcap \left(1 \times G\right)\right) =$$
$$= (X \times 1) \times (1 \times X^h) = X \times X^h.$$

Тогда ввиду сопряженности $\mathfrak{X}$-функтора f получим

$$V^{(1,h^{-1}g)} = (X \times X^h)^{(1,h^{-1}g)} = X \times X^g = X \times Y \in f(G \times G).$$

Лемма доказана.

***Лемма* 5.3.** *Пусть* π *– множество простых чисел и* f *– сопряженный* π*-разрешимый функтор Локетта. Тогда* $L_\pi\left(f\right)$ *– класс Локетта.*

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{L} = L_\pi(f)$. Допустим, что $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{L}^*$ и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{L}^* \backslash \mathfrak{L}$. Пусть $M = G_{\mathfrak{L}}$. Пусть N – некоторая собственная нормальная подгруппа группы G. Так как $\mathfrak{L}^*$ – класс Фиттинга, то $N \in \mathfrak{L}^*$. Кроме того, ввиду выбора группы G получим $N \in \mathfrak{L}$. Следовательно, $N \leq G_{\mathfrak{L}} = M$. Таким образом, M – единственная максимальная нормальная подгруппа группы G.

Так как G – π-разрешимая группа, то главный фактор G/M является элементарной абелевой p-группой для некоторого $p \in \pi$ либо π'-группой. Если $G/M \in \mathfrak{E}_{\pi'}$, то ввиду леммы 2.1 $G \in \mathfrak{L}\mathfrak{E}_{\pi'} = \mathfrak{L}$. Следовательно, $\left|G : M\right| = p \in \pi$. Но так как ввиду [5, лемма X.1.2] справедливо равенство

$$\left(G \times G\right)_{\mathfrak{L}} = \left(M \times M\right)\left\langle\left(g, g^{-1}\right) : g \in G\right\rangle,$$

то $\left|\left(G \times G\right)_{\mathfrak{L}} : M \times M\right| = p$. Пусть V – подгруппа из $f(G)$. Так как $M \trianglelefteq G$, то $V \bigcap M \in f\left(M\right)$. Но $M \in \mathfrak{L} = L_\pi(f)$. Следовательно, индекс $\left|M : V \bigcap M\right| - \pi'$-число. Если $V \not\leq M$, то $G = MV$ и индекс $\left|G : V\right| = \left|MV : V\right| = \left|M : V \bigcap M\right|$ является π'-числом. Тогда $G \in \mathfrak{L}$, что противоречит выбору группы G. Таким образом, $V \leq M$.

Так как f – сопряженный π-разрешимый функтор Локетта, то по лемме 5.2 подгруппа $V \times V \in f\left(G \times G\right)$. Кроме того, $\left(G \times G\right)_{\mathfrak{L}} \trianglelefteq G \times G$ и $V \times V \leq M \times M \leq \left(G \times G\right)_{\mathfrak{L}}$. Следовательно, $V \times V \bigcap \left(G \times G\right)_{\mathfrak{L}} = V \times V \in f\left(\left(G \times G\right)_{\mathfrak{L}}\right)$. Тогда по определению класса $L_\pi(f)$ получим, что индекс $\left|\left(G \times G\right)_{\mathfrak{L}} : V \times V\right|$ – π'-число. С другой стороны, индекс

$$\left|\left(G \times G\right)_{\mathfrak{L}} : V \times V\right| =$$
$$= \left|\left(G \times G\right)_{\mathfrak{L}} : M \times M\right| \cdot \left|M \times M : V \times V\right| =$$
$$= p \cdot \left|M \times M : V \times V\right|$$

и простое число $p \in \pi$ является делителем π'-числа. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^*$. Лемма доказана.

Напомним понятие и некоторые свойства оператора «*», который определен нами в [3] на множестве фиттинговых $\mathfrak{X}$-функторов.

Пусть f – фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор. Тогда отображение f^* сопоставляет каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ множество $\{\pi_1(T) \colon T \in f(G \times G)\}$.

***Лемма* 5.4** [3, теорема 2.3]. *Пусть* f *– сопряженный фиттингов* $\mathfrak{X}$*-функтор. Тогда*

1) f^* *– сопряженный фиттингов* $\mathfrak{X}$*-функтор;*

2) *пусть* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *тогда*

$$f^*(G) = \{\pi_i(T) \colon T \in f(G^m)\};$$

3) $(f^*)^* = f^*$.

***Теорема* 5.5.** *Пусть* f *– сопряженный фиттингов* $\mathfrak{X}$*-функтор. Тогда* f^* *является* $\mathfrak{X}$*-функтором Локетта.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{X}$, X – подгруппа из $f^*\left(G \times G\right)$. Тогда ввиду утверждения (3) теоремы 5.4 получим

$$\pi_1\left(X\right) \in \left(f^*\right)^*\left(G\right) = f^*\left(G\right).$$

Но так как $G \times 1 \trianglelefteq G \times G$, то по определению фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора подгруппа $X \bigcap \left(G \times 1\right) \in f^*\left(G \times 1\right)$. Тогда из сопряженности фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора f^* следует равенство $\pi_1\left(X\right) = \pi_1\left(X \bigcap \left(G \times 1\right)\right)$. Аналогично с учетом утверждения (2) леммы 5.4 получим $\pi_2\left(X\right) = \pi_2\left(X \bigcap \left(1 \times G\right)\right)$. Таким образом,

$$X = \left(X \bigcap \left(G \times 1\right)\right) \times \left(X \bigcap \left(1 \times G\right)\right).$$

Теорема доказана.

***Следствие* 5.6.** *Пусть* f *– сопряженный фиттингов* $\mathfrak{X}$*-функтор. Тогда и только тогда* f *является* $\mathfrak{X}$*-функтором Локетта, когда* $f = f^*$.

***Теорема* 5.7.** *Пусть* f *– сопряженный* π*-разрешимый фиттингов функтор. Тогда*

$$\left(L_\pi\left(f\right)\right)^* = L_\pi\left(f^*\right).$$

Доказательство. По теореме 5.5 получим, что f^* – π-разрешимый функтор Локетта. Следовательно, ввиду леммы 5.3 класс $L_\pi\left(f^*\right)$ – класс Локетта. Но так как $f \ll f^*$, то $L_\pi\left(f\right) \subseteq L_\pi\left(f^*\right)$. Следовательно, ввиду [5, теорема X.1.8] получим

$$\left(L_\pi\left(f\right)\right)^* \subseteq \left(L_\pi\left(f^*\right)\right)^* = L_\pi\left(f^*\right).$$

Допустим, что $\left(L_\pi\left(f\right)\right)^* \neq L_\pi\left(f^*\right)$ и G – группа минимального порядка из $L_\pi\left(f^*\right) \backslash \left(L_\pi\left(f\right)\right)^*$. Пусть $M = G_{\left(L_\pi(f)\right)^*}$ и $N = G_{L_\pi(f)}$. Тогда подгруппа M – единственная максимальная нормальная подгруппа группы G и индекс $\left|G : M\right|$ – π'-число либо $\left|G : M\right| = p$ для некоторого простого числа

$p \in \pi$. Если $G/M = G/G_{(L_\pi(f))^*} \in \mathfrak{E}_{\pi'}$, то $G \in (L_\pi(f))^* \mathfrak{E}_{\pi'}$. Но тогда ввиду [11, лемма 3] получим $G \in (L_\pi(f)\mathfrak{E}_{\pi'})^* = (L_\pi(f))^*$, что противоречит выбору группы G. Таким образом, $|G:M| = p \in \pi$ и G/G' – циклическая p-группа. По [5, теорема X.1.21(b)] получим $[M,G] \le N$ и G/N – абелева группа. Таким образом, $G' \le N$ и $G/N \in \mathfrak{S}_p^\pi$.

Пусть $V \in f^*(G)$ и U – подгруппа из $f(G\times G)$ такая, что $\pi_1(U) = V$. Так как $G \in L_\pi(f^*)$, то индекс $|G:V|$ – π'-число. Следовательно, $G = NV$.

Так как U – подгруппа из $f(G\times G)$ и $U(N\times N) \trianglelefteq G\times G$, то по определению π-разрешимого фиттингова функтора

$$U \cap (U(N\times N)) = U \in f(U(N\times N)).$$

С другой стороны, $N\times N \trianglelefteq G\times G$ и $U\cap(N\times N) \in f(N\times N)$. Так как $N\times N \in L_\pi(f)$, то индекс $|(N\times N):(U\cap(N\times N))|$ является π'-числом. Но тогда индекс

$$|(N\times N)U:U| = \frac{|(N\times N)U|}{|U|} = \frac{|N\times N|}{|U\cap(N\times N)|}$$

также является π'-числом. Следовательно, ввиду сопряженности функтора *f* получим

$$(N\times N)U \in L_\pi(f).$$

Тогда $U(N\times N) \le (G\times G)_{L_\pi(f)}$. Так как $\pi_1(U) = V$, то $VN \le \pi_1((G\times G)_{L_\pi(f)})$. Но $G = NV$, поэтому $\pi_1((G\times G)_{L_\pi(f)}) = G$. Таким образом, $(G\times G)_{L_\pi(f)}$ – подпрямое произведение прямого произведения $G\times G$ и $G \in L_\pi(f)^*$.

Теорема доказана.

6 Секция Локетта

***Определение* 6.1.** *Пусть f – сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор. Секцией Локетта фиттингова $\mathfrak{X}$-функтора f назовем множество*

Locksec(*f*) = {*g*: *g – сопряженный фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор и* $f^* = g^*$ }.

Для доказательства основного результата докажем две леммы: о строении Λ-нормально вложенного π-разрешимого фиттингова функтора и о взаимосвязи между сильным вложением π-разрешимых фиттинговых функторов и свойствами классов групп, заданных посредством функторов.

***Лемма* 6.2.** *Пусть π – некоторое множество простых чисел, $\Lambda = \{\pi_i : i \in I\}$ – система попарно непересекающихся подмножеств множества простых чисел такая, что $\pi' \subseteq \pi_i$ для некоторого $\pi_i \in \Lambda$ и $\bigcup_{\pi_i\in\Lambda} \pi_i = \mathbb{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\{\mathfrak{X}_i : i \in I\}$ – множество классов Фиттинга, то функтор $f = \vee_{\pi_i\in\Lambda}(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_i})$ является сопряженным Λ-нормально вложенным π-разрешимым фиттинговым функтором и $L_{\pi_i}(f) = \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}^\pi_{\pi_i'}$ для всех $\pi_i \in \Lambda$;*

2) *если f – сопряженный Λ-нормально вложенный π-разрешимый фиттингов функтор, то $f = \vee_{\pi_i\in\Lambda}(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_{\pi_i}(f)})$.*

Доказательство. 1) Вследствие теоремы 4.4 $f = \vee_{\pi_i\in\Lambda}(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_i})$ является сопряженным Λ-нормально вложенным π-разрешимым фиттинговым функтором. Кроме того,

$$L_{\pi_i}\left(\vee_{\pi_j\in\Lambda}(\mathrm{Hall}_{\pi_j} \circ \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_j})\right) = L_{\pi_i}(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_i})$$

и ввиду леммы 2.4 получим

$$L_{\pi_i}(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_i}) = L_{\pi_i}(\mathrm{Hall}_{\pi_i}) \cap L_{\pi_i}(\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}_i}) = \mathfrak{X}_i\mathfrak{S}^\pi_{\pi_i'}.$$

2) Пусть *G* – π-разрешимая группа, $X \in f(G)$ и Σ – холлова система группы *X*. Так как *f* Λ-нормально вложен, то по лемме 2.2 получим $\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ f = \mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_{\pi_i}(f)}$. Следовательно, холлова π_i-подгруппа $X_{\pi_i} \in \Sigma$ принадлежит множеству $(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_{\pi_i}(f)})(G)$ для всех $\pi_i \in \Lambda$. Но $X = \prod_{\pi_i\in\Lambda} X_{\pi_i}$. Таким образом,

$$X \in \vee_{\pi_i\in\Lambda}(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_{\pi_i}(f)})(G).$$

Ввиду сопряженности получим, что

$$f = \vee_{\pi_i\in\Lambda}(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_{\pi_i}(f)}).$$

Лемма доказана.

***Лемма* 6.3.** *Если f и g – сопряженные Λ-нормально вложенные π-разрешимые фиттинговы функторы, то $f \ll g$ тогда и только тогда, когда $L_{\pi_i}(f) \subseteq L_{\pi_i}(g)$ для всех $\pi_i \in \Lambda$.*

Доказательство. Пусть $L_{\pi_i}(f) \subseteq L_{\pi_i}(g)$ для всех $\pi_i \in \Lambda$. Пусть $G \in \mathfrak{S}^\pi$, $T \in f(G)$ и Σ – холлова система группы *G*, которая редуцируется в *T*. Пусть *S* – подгруппа из *g*(*G*) такая, что Σ редуцируется в *S*. Тогда холлова π_i-подгруппа группы *T* может быть представлена в виде

$T_{\pi_i} = G_{\pi_i} \cap T$, где $G_{\pi_i} \in \Sigma$. Так как $T \cap G_{L_{\pi_i}(f)} \trianglelefteq T$, то

$$T_{\pi_i} \cap T \cap G_{L_{\pi_i}(f)} = T_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(f)} \in \mathrm{Hall}_{\pi_i}\left(T \cap G_{L_{\pi_i}(f)}\right).$$

Кроме того, $G_{L_{\pi_i}(f)} \trianglelefteq G$. Следовательно, $T \cap G_{L_{\pi_i}(f)} \in f\left(G_{L_{\pi_i}(f)}\right)$. Но $G_{L_{\pi_i}(f)} \in L_{\pi_i}(f)$. Тогда индекс $\left|G_{L_{\pi_i}(f)} : \left(T \cap G_{L_{\pi_i}(f)}\right)\right|$ является π_i'-числом и $T \cap G_{L_{\pi_i}(f)}$ содержит холлову π_i-подгруппу группы $G_{L_{\pi_i}(f)}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} T_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(f)} &\in \mathrm{Hall}_{\pi_i}\left(G_{L_{\pi_i}(f)}\right) = \\ &= \left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_{\pi_i}(f)}\right)(G). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} S_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(g)} &\in \mathrm{Hall}_{\pi_i}\left(G_{L_{\pi_i}(g)}\right) = \\ &= \left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_{\pi_i}(g)}\right)(G). \end{aligned} \tag{6.2}$$

С другой стороны, $G_{L_{\pi_i}(f)}, G_{L_{\pi_i}(g)}$ – нормальные подгруппы группы G. Следовательно, $T_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(f)} = G_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(f)}$, $S_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(g)} = G_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(g)}$. Но так как $L_{\pi_i}(f) \subseteq L_{\pi_i}(g)$, то

$$\begin{aligned} T_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(f)} = G_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(f)} &\le G_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(g)} = \\ &= S_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(g)} \end{aligned}$$

для всех $\pi_i \in \Lambda$. Следовательно, ввиду леммы 6.2 (2) и (6.1)–(6.2) получим

$$T = \prod_{\pi_i \in \Lambda}\left(T_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(f)}\right) \le \prod_{\pi_i \in \Lambda}\left(S_{\pi_i} \cap G_{L_{\pi_i}(g)}\right) = S.$$

Таким образом, $f \ll g$.

Предположим теперь, что $f \ll g$. Пусть $\pi_i \in \Lambda$, $G \in L_{\pi_i}(f)$, $X \in f(G)$ и $X_{\pi_i} \in \mathrm{Hall}_{\pi_i}(X)$. Тогда индекс $|G : X|$ является π_i'-числом. Таким образом, $X_{\pi_i} \in \mathrm{Hall}_{\pi_i}(G)$. Так как $f \ll g$, то существует подгруппа Y из $g(G)$ такая, что $X \le Y$. Но тогда $X_{\pi_i} \in \mathrm{Hall}_{\pi_i}(Y)$ и подгруппа Y содержит холлову π_i-подгруппу группы G. Следовательно, $|G : Y|$ является π_i'-числом и ввиду сопряженности функтора g группа $G \in L_{\pi_i}(g)$.

Лемма доказана.

Следующая теорема и следствие из нее дает положительное решение обобщенной версии проблемы Бейдельмна, Брюстера и Хаука и представляет описание наименьшего элемента секции Локетта для сопряженных Λ-нормально вложенных π-разрешимых фиттинговых функторов.

***Теорема* 6.4.** *Пусть f – сопряженный Λ-нормально вложенный π-разрешимый фиттингов функтор, f_* – наименьший по сильному вложению элемент секции Локетта функтора f. Тогда*

$$f_* = \vee_{\pi_i \in \Lambda}\left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{\left(L_{\pi_i}(f)\right)_*}\right).$$

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{X}_i = \left(L_{\pi_i}(f)\right)_* \tag{6.3}$$

и $h = \vee_{\pi_i \in \Lambda}\left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{\left(L_{\pi_i}(f)\right)_*}\right)$. Ввиду утверждения 1) леммы 6.2 получим, что h является сопряженным Λ-нормально вложенным фиттинговым функтором и

$$L_{\pi_i}(h) = \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}^{\pi}_{\pi_i'} \tag{6.4}$$

для всех $\pi_i \in \Lambda$. Следовательно, с учетом теоремы 5.7 и (6.4) получаем, что

$$L_{\pi_i}(h^*) = L_{\pi_i}(h)^* = \left(\mathfrak{X}_i \mathfrak{S}^{\pi}_{\pi_i'}\right)^*.$$

Тогда по [11, лемма 3]

$$\left(\mathfrak{X}_i \mathfrak{S}^{\pi}_{\pi_i'}\right)^* = \mathfrak{X}_i^* \mathfrak{S}^{\pi}_{\pi_i'}.$$

Используя свойства оператора «*» [5, теорема 1.15] и (6.3), получим

$$\mathfrak{X}_i^* \mathfrak{S}^{\pi}_{\pi_i'} = \left(\left(L_{\pi_i}(f)\right)_*\right)^* \mathfrak{S}^{\pi}_{\pi_i'} = \left(L_{\pi_i}(f)\right)^* \mathfrak{S}^{\pi}_{\pi_i'}.$$

Снова применим теорему 5.7

$$\left(L_{\pi_i}(f)\right)^* \mathfrak{S}^{\pi}_{\pi_i'} = L_{\pi_i}(f^*) \mathfrak{S}^{\pi}_{\pi_i'} = L_{\pi_i}(f^*).$$

Таким образом, $L_{\pi_i}(h^*) = L_{\pi_i}(f^*)$. Теперь, применяя утверждения 2) леммы 6.2,

$$\begin{aligned} f^* &= \vee_{\pi_i \in \Lambda}\left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_{\pi_i}(f^*)}\right) = \\ &= \vee_{\pi_i \in \Lambda}\left(\mathrm{Hall}_{\pi_i} \circ \mathrm{Rad}_{L_{\pi_i}(h^*)}\right) = h^*. \end{aligned}$$

Итак, $h \in \mathrm{Locksec}(f)$.

Пусть g – произвольный π-разрешимый фиттингов функтор из $\mathrm{Locksec}(f)$. Тогда

$$\left(L_{\pi_i}(g)\right)^* = L_{\pi_i}(g^*) = L_{\pi_i}(f^*) = \left(L_{\pi_i}(f)\right)^*.$$

Следовательно, $L_{\pi_i}(g) \in \mathrm{Locksec}\left(L_{\pi_i}(f)\right)$. Но тогда для любого $\pi_i \in \Lambda$ получим $\mathfrak{X}_i = \left(L_{\pi_i}(f)\right)_* \subseteq L_{\pi_i}(g)$. Кроме того, ввиду (6.4)

$$L_{\pi_i}(h) = \mathfrak{X}_i \mathfrak{S}^{\pi}_{\pi_i'} \subseteq L_{\pi_i}(g) \mathfrak{S}^{\pi}_{\pi_i'} = L_{\pi_i}(g).$$

Следовательно, по лемме 6.3 $h \ll g$. Ввиду произвольности выбора функтора g мы заключаем, что h – наименьший по сильному вложению элемент секции Локетта функтора f, то есть $f_* = h$.

Теорема доказана.

***Следствие* 6.5.** *Пусть π – множество простых чисел, π-разрешимый фиттингов функтор $f = \mathrm{Hall}_{\pi}$. Тогда наименьший элемент секции Локетта $f_* = f \circ \mathrm{Rad}_{\left(\mathfrak{S}^{\pi}\right)_*}$.*

Действительно, пусть $\Lambda = \{\pi, \pi'\}$. Тогда π-разрешимый фиттингов функтор $f = \mathrm{Hall}_\pi$ является Λ-нормально вложенным и по теореме 6.4

$$f_*(G) = \left(\mathrm{Hall}_\pi \circ \mathrm{Rad}_{(L_\pi(f))_*} \vee \mathrm{Hall}_{\pi'} \circ \mathrm{Rad}_{(L_{\pi'}(f))_*}\right)(G).$$

Пусть $X \in f_*(G)$. Тогда $X = X_1 X_2$, где

$$X_1 \in \left(\mathrm{Hall}_{\pi'} \circ \mathrm{Rad}_{(L_{\pi'}(f))_*}\right)(G)$$

$$\text{и } X_2 \in \left(\mathrm{Hall}_\pi \circ \mathrm{Rad}_{(L_\pi(f))_*}\right)(G).$$

Но $X_1 \in \mathrm{Hall}_{\pi'}\left(G_{(L_{\pi'}(f))_*}\right) = \{E\}$ и $X = X_2$. Кроме того, $L_\pi(f) = \mathfrak{S}^\pi$. Таким образом,

$$X = X_2 \in \left(\mathrm{Hall}_\pi \circ \mathrm{Rad}_{(\mathfrak{S}^\pi)_*}\right)(G) = \left(f \circ \mathrm{Rad}_{(\mathfrak{S}^\pi)_*}\right)(G)$$

и $f_* = f \circ \mathrm{Rad}_{(\mathfrak{S}^\pi)_*}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beidleman, J.C.* Fitting funcntors in finite solvable groups II / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1987. – Vol. 101. – P. 37–55.

2. *Витько, Е.А.* Фиттинговы функторы и радикалы конечных групп / Е.А. Витько, Н.Т. Воробьев // Сиб. матем. журнал. – 2011. – Т.52, № 6. – С. 1253–1263.

3. *Витько, Е.А.* О наименьших и наибольших элементах секции Локетта фиттингова функтора / Е.А. Витько // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 9–14.

4. *Beidleman, J.C.* Conjugate π-normally embedded fitting functors / J.C. Beidleman, M.P. Gallego // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. – 1988. – Vol. 80. – P. 65-82.

5. *Doerk, K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

6. *Гольберг, П.А.* Холловские θ-базы конечных групп / П.А. Гольберг // Известия высших учебных заведений. – 1961. – № 1 (20). – С. 36–43.

7. *Сементовский, В.Г.* О пронормальных подгруппах конечных π-разрешимых групп / В.Г. Сементовский // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2000. – № 3. – С. 55–59.

8. *Каморников, С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск : Беларус. навука, 2003. – 254 с.

9. *Beidleman, J.C.* Fittingfunktoren in endlichen auflösbaren Gruppen I / J.C. Beidleman, B. Brewster, P. Hauck // Math. Z. – 1983. – Bd. 182. – S. 359-384.

10. *Lockett, F.P.* The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Vol. 137. – P. 131–136.

11. *Воробьев, Н.Т.* О радикальных классах конечных групп с условием Локетта / Н.Т. Воробьев // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 2. – С. 161–168.

Поступила в редакцию 13.06.12.