С. М. ГОРСКИЙ
Математический факультет,
кафедра математического анализа;

А. Н. СТРУК
ГУО «Гимназия № 51 г. Гомеля»

О ПОДБОРЕ ЗАДАЧ НА ТУРНИРЫ ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

В Республике Беларусь проводятся турниры юных математиков. В отличие от других турниров, таких как «Уральский турнир юных математиков», «Всеукраинский турнир юных математиков» задачи носят исследовательский характер.

Школьный курс математики даёт слабое представление о методах исследования математики как науки. У обычного ребёнка складывается впечатление, что в математике всё открыто, и новые открытия (во всяком случае, на школьном уровне) невозможны. Работая над исследовательской задачей, ученик получает некоторое представление о реальной работе математика.

При решении исследовательской задачи, ученик попадает в новый незнакомый мир. Он привык, что раньше учитель знакомил его с основными законами этого мира, а здесь он должен открыть их сам. Но оставлять его совсем без ориентиров нельзя. Поэтому хорошая задача для исследования – та, в которой есть естественный параметр, по которому можно двигаться в исследовании, то есть легко выделяемая последовательность частных случаев, так что в каждый момент ученик сам понимает, что можно делать дальше. И совсем хороша та задача, где и к идее доказательства можно прийти, последовательно двигаясь по этому параметру.

Хорошая задача для опытных исследователей – та, в которой есть большой простор для продвижений, уточнений, вспомогательных задач, обобщений, а при доказательстве используются разнообразные методы. Здорово, если в этой задаче находятся нетрудные «подзадачи» – ребёнку тяжело долго не получать никакого результата. Отлично, если задача развивает научный вкус и имеет в перспективе выходы на идеи и методы «большой» математики.

Для успешного участия в турнире юных математиков участники турнира должны обладать рядом качеств и умений: усидчивостью, целеустремленностью, умением искать литературу по данной теме, уметь доносить и грамотно отстаивать свою точку зрения, не умаляя достоинства оппонента, умением работать в команде.

Для популяризации турниров юных математиков и для лучшей подготовки к Республиканскому турниру юных математиков, в Гомельской области в настоящее время проводятся два турнира юных математиков для разных возрастов учащихся: открытый гимназический турнир юных математиков «Математический Олимп», на базе государственного учреждения образования «Гимназия № 51 г. Гомеля» для учащихся 4–6 классов, и областной турнир юных математиков, на базе государственного учреждения образования «Гимназия № 56 г. Гомеля» для учащихся 8–10 классов. Таким образом, любой учащийся, заинтересовавшийся решением исследовательских задач, может принять в них участие. К настоящему времени проведено три областных турнира и три гимназических и в данный момент опубликованы задачи четвертого областного турнира.

В турнире для младших школьников подбирались задачи, преимущественно олимпиадного характера по общеизвестным темам (раскраска, инвариант, взвешивания, логические и комбинаторные задачи, стратегии и игры). Это связано с тем, что весной проводится областная олимпиада по математике для 4–7 классов и, участвуя в турнире, ребята узнают различные способы решения олимпиадных задач, тем самым, готовясь еще и к олимпиаде. Кроме того, учащиеся, не принимающие участие в олимпиадах, получают шанс реализовать свои способности в исследовательской деятельности.

На турнир младших школьников традиционно предлагается 10 задач. Каждая задача состоит из 5 пунктов:

1) условие известной задачи;
2) измененное условие той же задачи;
3) добавление параметров в задачу;
4) направление обобщения задачи;
5) привести свои обобщения и направления исследования.

В качестве примера можно рассмотреть задачу №7 с первого открытого турнира юных математиков «Математический Олимп»

Разрезание квадратов

Дан квадрат (мы будем называть его исходным). Будем разрезать его прямолинейными разрезами, параллельными сторонам квадрата.

1) Разрежьте квадрат на 4 меньших квадрата (не обязательно одинаковых).
2) Разрежьте квадрат на 5, 6, 7 меньших квадратов (не обязательно одинаковых).
3) На сколько меньших квадратов нельзя разрезать исходный квадрат и почему?
4) На какое количество меньших квадратов от 2 до 20 всегда можно разрезать исходный квадрат?
5) Предложите свои обобщения.

Задачи для открытого гимназического турнира носят преимущественно либо обучающий характер, либо экспериментальный и не требуют, как правило, дополнительной литературы.

Часть задач для областного турнира носят обучающий характер, а часть задач – исследовательский. Приведем примеры такого рода задач:

Арифметико-геометрическая прогрессия

Под суммой последовательности $\{a_i\}$ понимается сумма первых n членов a_i как функция от n.

Произведением последовательностей $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ назовем последовательность $\{a_ib_i\}=\{a_1b_1,\ a_2b_2, a_3b_3, ...\}$.

0.1. Докажите, что произведение двух геометрических прогрессий — геометрическая прогрессия и найдите её сумму.

0.2. Найдите сумму $1^2+2^2+...+n^2$.

0.3. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

0.4. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{x^k}$.

1.1. Пусть $a_i=3i+1$, $b_i=\frac{1}{2}\cdot 4^i$, докажите, что сумма $\{a_ib_i\}$ равна $n\cdot 2^{2n+1}$.

1.2. Пусть $a_i=di+1$, $b_i=\frac{1}{2}\cdot 4^i$, докажите, что сумма $\{a_ib_i\}$ равна

$$\frac{2}{9}\left(-3+d+4^n(3+d(3n-1))\right).$$

1.3. Пусть $a_i=3i+1$, $b_i=\frac{1}{2}\cdot k^i$, $k\neq 1$, докажите, что сумма $\{a_ib_i\}$ равна

$$\frac{k}{2(k-1)^2}\left(4-k+k^n(-4+k+3(k-1)n)\right).$$

1.4. Пусть $a_i=di+a_0$, $b_i=b_0\cdot q^i$ найдите сумму $\{a_ib_i\}$.

2. Предложите свои обобщения. В частности можете ввести произведение трех последовательностей (исследовать случай 2 арифметические и одна геометрическая, 1 арифметическая и 2 геометрические и т. д.), произведение произвольных последовательностей и т. д. Например:

2.1. Найдите сумму $1^3+2^3+...+n^3$.

2.2. Найдите сумму $1^k+2^k+...+n^k$.

2.3. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{n}F_k$, где $F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $n\geq 1$.

2.4. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{n}kF_k$.

2.5. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{n}k\cos k\alpha\, ,\sum_{k=1}^{n}k\sin k\alpha$.

2.6. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}$.

На областном турнире юных математиков была предложена задача «**Перестановки**». Приведем частичное условие её второго пункта:

2.1) Найдите такую перестановку $(a_1,...,a_n)$ натуральных чисел от 1 до n, чтобы сумма $|a_1-1|+|a_2-2|+...+|a_n-n|$ была наибольшей.

2.2) Найдите такую перестановку $(a_1,...,a_n)$ натуральных чисел от 1 до n, чтобы сумма $(a_1-1)^2+(a_2-2)^2+...+(a_n-n)^2$ была наибольшей.

Пункт 2.2 решается совсем просто: после раскрытия скобок получаем, что исходная сумма равна $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i i = 2\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i i$. Из перестановочного неравенства следует, что сумма будет наибольшей, если $(a_1, a_2, ..., a_n) = (n, n-1, ..., 1)$.

Пункт 2.1 решается намного сложнее. Данный пункт был взят из книжки «Венгерские математические олимпиады» (задача № 171), где и приводятся два способа решения данной задачи, занимающие целую страницу.

Пункты 2.1 и 2.2 объединяет тот факт, что в них фигурируют выпуклые функции: в пункте 2.1 участвует функция $f(x) = |x|$, а в пункте 2.2 – $f(x) = x^2$. Исходя из этого, была предпринята попытка доказать данные пункты единым образом, в результате чего были сформулированы:

Теорема 1. Если функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале I и $\{a_n\}, \{b_n\}$ – невозрастающие последовательности действительных чисел, что $a_1 + b_1, a_n + b_n \in I$, то выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i + b_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(a_i + b_{\pi(i)}) \geq \sum_{i=1}^{n} f(a_i + b_{n+1-i}),$$

где π – некая перестановка чисел $\{1, 2, ..., n\}$.

Авторами решения были сформулированы еще 7 аналогичных теорем, включая обобщение неравенства Чебышева.