УДК 512.542

КРИТЕРИЙ НЕПРОСТОТЫ КОНЕЧНЫХ ФАКТОРИЗУЕМЫХ ГРУПП

В.Н. Тютянов, В.А. Тютянова

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель

A NONSIMPLE CRITERION FOR FINITE FACTORIZED GROUPS

V.N. Tyutyanov, V.A. Tyutyanova

Gomel Branch of International University, Gomel

При изучении конечных факторизуемых групп для описания строения группы накладываются ограничения на строение сомножителей. Это мотивируется стремлением описать строение группы, сводя его к строению сомножителей либо получению некоторой информации о строении группы в зависимости от строения сомножителей. Классическими примерами являются теорема Ито о двуступенной разрешимости конечной группы, факторизуемой абелевыми подгруппами, и теорема Кегеля-Виландта о разрешимости конечной группы, представимой в виде произведения двух нильпотентных подгрупп. Отметим также гипотезу С.А. Чунихина о непрототе конечной группы, факторизуемой подгруппами с нетривиальными центрами, справедливость которой установил Л.С. Казарин.

Ключевые слова*: конечная группа, простая неабелева группа, факторизуемая группа.*

In the study of factorizable groups the authors consider some natural restrictions on the factors. Ito Theorem about two-step solubility of a finite group which is factorized by abelian subgroups, and Kegel-Wielandt Theorem about solubility of a finite group which is a product of two nilpotent subgroups are the classical examples in this trend. We should also note that L.S. Kazarin have obtained validity of the hypothesis of S.A. Chunikhin about non-simplicity of a finite group which is factorized by subgroups with nontrivial center.

Keywords*: finite group, simple nonabelian group, factorized group.*

Введение и обозначения

В работе [1] Л.С. Казарин описал простые неабелевы композиционные факторы конечной группы, представимой в виде произведения двух своих разрешимых подгрупп. Позже он показал, что конечная группа, факторизуемая двумя разрешимыми подгруппами нечетных индексов, является разрешимой. Естественно рассмотреть вопрос о строении конечной группы, являющейся произведением двух разрешимых подгрупп с заданными ограничениями на их индексы.

В настоящей работе показано, что конечная группа, факторизуемая двумя разрешимыми подгруппами, индексы которых взаимно просты, с $r \in \pi(G)$ такого, что $r > 3$, не является простой неабелевой группой.

Для удобства читателя приведем основные обозначения и определения. Остальные обозначения можно найти, например, в [2], $|G|$ – порядок конечной группы G; $\pi(n)$ – множество всех простых делителей натурального числа n; $\pi(G) = \pi(|G|)$; (a,b) – наибольший общий делитель натуральных чисел a и b; S_n – симметрическая группа перестановок на n символах; A_n – знакопеременная группа перестановок на n символах.

1 Предварительные результаты

***Лемма* 1.1.** [1]. *Пусть $G = AB$ – конечная группа, где A и B – разрешимые подгруппы группы G. Тогда простые неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат следующему списку: $PSL_2(q)$, $q > 3$; $PSL_3(q)$, $q < 9$; $PSL_4(2)$, M_{11}, $PSp_4(3)$, $PSU_3(8)$.*

***Лемма* 1.2.** [3]. *Пусть в группе $PSL_2(p^n)$ N – нормализатор силовской p-подгруппы, D – диэдральная группа порядка $2(2^n+1)$ при $p = 2$ и p^n+1 при $p > 2$, Z – циклическая подгруппа индекса 2 в D, S_4 и S_4^* – несопряженные в $PSL_2(p^n)$ симметрические группы степени 4, A_4 и A_4^* (A_5 и A_5^*) – несопряженные в $PSL_2(p^n)$ знакопеременные группы степени 4 (соответственно 5). Группа $PSL_2(p^n)$ допускает только следующие факторизации, с точностью до сопряженных подгрупп:*

A. $PSL_2(2^n) = ND = NZ$, $n \geq 2$.

B. *Пусть $p > 2$. $PSL_2(p^n) = ND$ тогда и только тогда, когда $(p^n - 1)/2$ – нечетное число.*

C. *При $p^n \geq 61$ и $p > 2$ группа $PSL_2(p^n)$ не имеет никаких факторизаций, кроме указанной в B.*

D. *Пусть $p > 2$ и $p^n \leq 59$. Тогда*

(1) $PSL_2(7)=ND=NS_4= N S_4^* =G_7S_4= G_7S_4^*$;

(2) $PSL_2(9)=NA_5= NA_5^* =S_4A_5= S_4^* A_5^* = A_5 A_5^* = A_4 A_5^* = A_4^* A_5$;

(3) $PSL_2(11) = ND = NA_4 = NA_5 = NA_5^* = G_{11}A_5 = G_{11} A_5^*$;

(4) $PSL_2(19) = ND = NA_5 = NA_5^*$;

(5) $PSL_2(29) = NA_5 = NA_5^* = KA_5 = KA_5^*$, *где* $K \leq N$ *и* $|K| = 7\cdot 29$;

(6) $PSL_2(59) = ND = NA_5 = NA_5^*$;

(7) $PSL_2(p^n) = ND$, *где* $p^n = 23, 27, 31, 43, 47$.

2 Доказательство основного результата

***Теорема* 2.1.** *Пусть $G = AB$ – конечная группа, где A и B – разрешимые подгруппы группы G, $r \in \pi(G)\backslash\{2,3\}$. Если $(|G{:}A|, r)=1=(|G{:}B|, r)=1$, тогда G не является простой неабелевой группой.*

Доказательство. Предположим, что G является простой неабелевой группой. По лемме 1.1 необходимо рассмотреть следующие случаи.

1. $G \cong M_{11}$. Порядок группы M_{11} равен $2^4{\cdot}3^2{\cdot}5{\cdot}11$. Пусть $|A|$ делится на 11. Тогда из [2] следует, что $A = 11{:}\,5$. Так как в группе M_{11} нет подгрупп индекса 5 [2], то $r = 5$ и $|G{:}B| = 11$. Из [2] следует, что только подгруппа $M_{10} \cong A_6{}^{\cdot}2$ имеет индекс 11 в группе M_{11}. Однако данная подгруппа неразрешима и M_{11} не допускает нужной факторизации.

2. $G \cong PSp_4(3)$. Порядок группы $PSp_4(3)$ равен $2^6{\cdot}3^4{\cdot}5$. Следовательно, $r = 5$. Из [2] следует, что максимальными подгруппами в $PSp_4(3)$, индекс которых не делится на 5, являются $2^4{:}A_5$ и S_6. Поэтому A и B содержатся в этих подгруппах. Порядок силовской 3-подгруппы в $PSp_4(3)$ равен 3^4. Поэтому, если $G = AB$, то A и B содержатся в S_6 и $G=A_1B_1$, где A_1, B_1 изоморфны S_6. Так как в группе $PSp_4(3)$ имеется один класс сопряженных подгрупп, изоморфных S_6, то последней факторизации не существует. Следовательно, группа $PSp_4(3)$ не допускает нужной факторизации.

3. $G \cong PSU_3(8)$. Порядок группы $PSU_3(8)$ равен $2^9{\cdot}3^4{\cdot}7{\cdot}19$. Пусть $|A|$ делится на 19. Из [2] следует, что в этом случае $A \le 19:3$. Из условия теоремы заключаем, что $r = 19$. Тогда $B \le 19:3$ и, очевидно, что $G \ne AB$.

4. $G \cong PSL_4(2)$. Порядок группы $PSL_4(2)$ равен $2^6{\cdot}3^2{\cdot}5{\cdot}7$. Пусть $|A|$ делится на 7. Тогда из [2] следует, что $A \le 2^3:7:3$ – максимальная разрешимая подгруппа, порядок которой делится на 7. Из условия теоремы заключаем, что $r = 7$ и $B \le 2^3:7:3$. Очевидно, что $G \ne AB$.

5. $G \cong PSL_3(2)$. Порядок группы $PSL_3(2)$ равен $2^3{\cdot}3{\cdot}7$, поэтому $r = 7$. Группа $PSL_3(2)$ содержит максимальную разрешимую подгруппу, порядок которой делится на 7, изоморфную $7:3$. Следовательно, $A \le 7:3$ и $B \le 7:3$. Тогда $G \ne AB$.

6. $G \cong PSL_3(3)$. Порядок группы $PSL_3(3)$ равен $2^4{\cdot}3^3{\cdot}13$, поэтому $r = 13$. Из [2] следует, что в этом случае $A \le 13:3$ и $B \le 13:3$. Поэтому $G \ne AB$.

7. $G \cong PSL_3(4)$. Порядок группы $PSL_3(4)$ равен $2^6{\cdot}3^2{\cdot}5{\cdot}7$. Пусть $|A|$ делится на 7. Из [2] следует, что $A \le 7:3$ и $r = 7$. Тогда $B \le 7:3$ и очевидно, что $G \ne AB$.

8. $G \cong PSL_3(5)$. Порядок группы $PSL_3(5)$ равен $2^5{\cdot}3{\cdot}5^3{\cdot}31$. Пусть $|A|$ делится на 31. Из [2] следует, что $A \le 31:3$ и $r = 31$. Тогда $B \le 31:3$ и $G \ne AB$.

9. $G \cong PSL_3(7)$. Порядок группы $PSL_3(7)$ равен $2^3{\cdot}3^2{\cdot}7^3{\cdot}19$. Пусть $|A|$ делится на 19. Из [2] следует, что $A \le 19:3$ и $r = 19$. Тогда $B \le 19:3$ и $G \ne AB$.

10. $G \cong PSL_3(8)$. Порядок группы $PSL_3(8)$ равен $2^9{\cdot}3^2{\cdot}7^2{\cdot}73$. Пусть $|A|$ делится на 73. Из [2] следует, что $A \le 73:3$ и $r = 73$. Тогда $B \le 73:3$ и $G \ne AB$.

11. $G \cong PSL_2(q)$, $q = p^n > 3$. Обозначим $\varepsilon = (2, q-1)^{-1}$. Группа G содержит подгруппу Фробениуса $P = U : H$, где U – некоторая силовская p-подгруппа группы G, H – циклическая группа прядка $\varepsilon^{-1}(q-1)$; диэдральную подгруппу D порядка $2\varepsilon^{-1}(q+1)$ и циклическую подгруппу Z порядка $\varepsilon^{-1}(q+1)$. Из леммы 1.2 следует, что если группа G допускает факторизацию, то, так как оба сомножителя разрешимые группы, выполняется только один из следующих случаев: $G=PD$; $G=PZ$; $G=PSL_2(7)=PS_4=US_4$; $G=PSL_2(11)=PA_4$. Поскольку $(q-1,\ q+1) \in \{1,2\}$, то факторизации $G = PD$ и $G=PZ$ не удовлетворяют условию теоремы. Группа $PSL_2(7)$ исключается в силу изоморфизма $PSL_2(7) \cong PSL_3(2)$. Данный случай был рассмотрен в п. 5. В факторизации $G= PSL_2(11)= PA_4$ пересечение $P \cap A_4 = 1$, и данная группа не удовлетворяет условию теоремы. Теорема полностью доказана.

***Замечание* 2.2.** *Пусть $L = AB$ – конечная простая неабелева группа, где A и B – разрешимые подгруппы группы L, $r \notin \pi(L)$ и $U \cong Z_r$. Рассмотрим группу $G = U \times L =(UA)(UB)=A_1B_1$. Тогда $(|G : A_1|, r) = (|G : B_1|, r) = 1$ и L – композиционный фактор группы G. Этот пример показывает, что практически любая группа из списка работы* [1] *может быть композиционным фактором конечной группы, удовлетворяющей условию теоремы, и их нахождение не представляет интереса.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kazarin, L.S.* Product of two solvable subgroups / L.S. Kazarin // Comm. Algebra. – 1986. — Vol. 14, № 6. – P. 1001–1066.

2. *Atlas of finite groups* / J.H. Conway [et al.]. – London : Clarendon Press, 1985. – 252 p.

3. *Ito, N.* On the factorizations of the linear fractional groups $LF(2,p^n)$ / N. Ito // Acta Scient. Math. – 1953. – Vol. 15. – P. 79–84.

Поступила в редакцию 27.03.12.