МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГОМЕРНОГО *P*-АДИЧЕСКОГО АРГУМЕНТА

М.А. Заренок

Белорусский государственный университет, Минск

CONVERGENCE OF THE FOURIER SERIES FOR DIFFERENTIABLE FUNCTIONS OF A MULTIDIMENSIONAL P-ADIC ARGUMENT

M.A. Zarenok

Belarusian State University, Minsk

В данной статье рассматривается сходимость рядов Фурье функций многомерного *p*-адического аргумента. Даны определения многомерной функции Малера и частичных сумм ряда Фурье функций многомерного *p*-адического аргумента. Для получения основного результата был доказан ряд вспомогательных теорем: вычислена норма m -ой производной одномерной и многомерной функций Малера, получен критерий принадлежности функции пространству m раз непрерывно-дифференцируемых функций $C^m(\mathbb{Z}_p^n)$ в терминах коэффициентов Малера. Доказана лемма о представлении коэффициентов и частичных сумм кратного ряда Фурье через коэффициенты и частичные суммы одномерного ряда. На основании данных результатов доказана теорема о том, что если $f \in C^m(\mathbb{Z}_p^n),$ тогда ряд Фурье функции сходится равномерно, если $m \geq n.$ Приведен пример функции $f \in C^{n-1}(\mathbb{Z}_p^n)$ с расходящимся рядом Фурье.

Ключевые слова: *функция p-адического векторного аргумента, ряд Фурье, коэффициенты Фурье, функция Малера.*

This article discusses the convergence of the Fourier series for functions of the multidimensional p-adic argument. For this purpose we define the multidimensional Mahler function and partial sums of Fourier series for the functions of multidimensional p-adic argument. We calculate the norm of the m -th derivatives of multidimensional Mahler functions and prove the criterion of m times continuously differentiability in terms of Mahler coefficients. We represent coefficients and partial sums of multidimensional Fourier series in terms of coefficients and partial sums of one-dimensional Fourier series. The main result states that for positive integers $m \geq n$ the Fourier series for function $C^m(\mathbb{Z}_p^n)$ converges uniformly. An example of $f \in C^{n-1}(\mathbb{Z}_p^n)$ with divergent Fourier series is given.

Keywords: *function of multidimensional p-adic argument, Fourier series, Fourier coefficients, Mahler function.*

Введение

Исследование связи между гладкостью функции и убыванием ее образа Фурье имеет давнюю историю. Результаты такого рода имеют обобщающее название теорем типа Пэли-Винера. В частности, в анализе известен результат о том, что если функция k раз непрерывно-дифференцируема на n -мерном торе, то ряд Фурье функции для $k > n/2$ сходится равномерно [1, с. 279].

Данная работа посвящена изучению варианта этой теоремы в случае функций многомерного p -адического аргумента, принимающих p -адические значения. Основным результатом, представленным в данной статье, является доказательство теоремы о сходимости кратных рядов Фурье. Получена зависимость между гладкостью функции, размерностью ее аргумента и сходимостью частичных сумм ряда Фурье.

1 Базис Малера пространства непрерывных функций векторного p-адического аргумента

Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{Z}_p^n$. Рассмотрим функции $f : \mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Q}_p$ такие, что $f \in \mathbb{C}^m(\mathbb{Z}_p^n)$.

***Определение* 1.1.** n -Мерным замкнутым шаром с центром в точке $x \in \mathbb{Z}_p^n$ и радиусом $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ будем называть множество

$$B_\delta[x] = \{y \in \mathbb{Z}_p^n : | x_i - y_i |_p < \delta_i, \forall i = \overline{1,n}\}. \quad (1.1)$$

***Определение* 1.2.** Функция f на $\mathbb{Z}_p^n$ называется локально-постоянной функцией, если для любого $x \in \mathbb{Z}_p^n$ существует шар $B_\delta[x]$ такой, что $f_{|B_\delta[x]} \equiv Const.$

***Определение* 1.3.** n -Мерной функцией Малера, определенной на $\mathbb{Z}_p^n$ со значениями в $\mathbb{Q}_p$, будем называть функцию

$$\binom{x}{k}_n = \prod_{i=1}^n \binom{x_i}{k_i}, \quad (1.2)$$

где $k = (k_1, ..., k_n)$, $k_i \geq 0$ для любого $i = \overline{0,n}.$

Покажем, что n -мерные функции Малера образуют ортонормированный базис пространства $C(\mathbb{Z}_p^n)$. Под пространством $C(\mathbb{Z}_p^n)$ будем понимать пространство непрерывных на $\mathbb{Z}_p^n$ функций.

На данном пространстве можно задать норму следующей формулой

$$\|f\| = \max_{x\in\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p .$$

***Теорема* 1.1.** Пусть $f \in C(\mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Q}_p)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует локально-постоянная функция $g:\mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Q}_p$ такая, что $|f(x)-g(x)|_p < \varepsilon$ для любого $x \in \mathbb{Z}_p^n$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию

$$f \in C(\mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Q}_p).$$

Определим на $\mathbb{Z}_p^n$ отношение эквивалентности $''\sim''$ следующим образом: $x \sim y$, если $|f(x)-f(y)|_p < \varepsilon$. Данное отношение эквивалентности разбивает множество $\mathbb{Z}_p^n$ на классы эквивалентности U_i, $i \in I$. Для любого $i \in I$ зафиксируем $a_i \in U_i$ и определим функцию $g:\mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Q}_p$ так, что $g(x) = f(a_i)$ для любого $x \in U_i$. Получаем, что функция $g(x)$ является локально-постоянной и для любого $x \in \mathbb{Z}_p^n$ имеет место неравенство $|f(x)-g(x)|_p < \varepsilon$.

***Теорема* 1.2.** Пусть $f \in C(\mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Q}_p)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует полиномиальная функция $P:\mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Q}_p$ такая, что $|f(x)-P(x)|_p < \varepsilon$ для любого $x \in \mathbb{Z}_p^n$.

Доказательство. Из теоремы 1.1 вытекает, что достаточно показать существование полиномиальной функции, удовлетворяющей условиям теоремы, для любой локально-постоянной функции f. Так как множество $\mathbb{Z}_p^n$ компактно, существует $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$, где $\delta_i \in (0,1)$ для любого $i = \overline{1,n}$, такое, что $f \equiv const$ на каждом из шаров радиуса δ. Очевидно, что $const$ на каждом шаре своя и количество шаров конечно. Поэтому такая локально-постоянная функция является конечной комбинацией характеристических функций шаров радиуса δ. Без ограничения общности будем считать, что f характеристическая функция шара радиуса δ и $f(x) = 1$. Несложно видеть, что

$$B_\delta[x] = B_{\delta_1}[x_1] \times B_{\delta_2}[x_2] \times ... \times B_{\delta_n}[x_n].$$

Следовательно, характеристическая функция n-мерного шара есть произведение характеристических функций одномерных шаров, то есть

$$f_{B_\delta}(x) = \prod_{i=1}^{n} f_{B_{\delta_i}}(x_i).$$

По теореме Капланского [2, с. 127], характеристическая функция одномерного шара приближается полиномом вида

$$P(x) = \prod_{j=1}^{m}\left(1 - \left(\frac{x}{c_j}\right)^s\right)^{n_j},$$

то есть для любого $i = \overline{1,n}$ существует такой полином $P_i(x_i):\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$, что для любого $x \in \mathbb{Z}_p$ $|f_{B_{\delta_i}}(x_i) - P_i(x_i)|_p < \varepsilon$.

Пусть $n = 2$, тогда $f(x) = f_1(x_1)f_2(x_2)$, $P(x) = P_1(x_1)P_2(x_2)$. Для любого $x \in \mathbb{Z}_p^2$ и $i = 1,2$ имеют место неравенства

$$|f_i(x_i) - P_i(x_i)|_p < \varepsilon.$$

Оценим разность

$$|f(x)-P(x)|_p =$$
$$= |f_1(x_1)f_2(x_2) - P_1(x_1)P_2(x_2)|_p =$$
$$= |f_2(x_2)(f_{x_1} - P_1(x_1)) - P(x_2)(f_{x_2} - P_2(x_2))|_p \le$$
$$\le |f_2(x_2)|_p\ \varepsilon + |P_1(x_1)|_p\ \varepsilon \le C\varepsilon.$$

Аналогично для произвольного n можно показать, что

$$|f(x)-P(x)|_p =$$
$$= |f_1(x_1)...f_n(x_n) - P_1(x_1)...P_n(x_n)|_p \le C'\varepsilon.$$

Из предыдущих рассуждений следует, что для характеристической функции

$$f_{B_\delta}(x) = \prod\nolimits_{i=1}^{n} f_{B_{\delta_i}}(x_i)$$

существует полином

$$P(x) = \prod\nolimits_{i=1}^{n} P_i(x_i)$$

такой, что $|f_{B_\delta}(x) - P(x)|_p < \varepsilon'$ для любого $x \in \mathbb{Z}_p^n$.

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ – банахово пространство над полем $\mathbb{Q}_p$ с нормой $\|\cdot\|$, которая удовлетворяет сильному неравенству треугольника, и $x, y \in E$. Говорят, что x ортогонально y $(x \perp y)$, если $\|x\| \le \|x - \lambda y\|$, для любого $\lambda \in \mathbb{Q}_p$.

***Теорема* 1.3** [3, с. 56]. Пусть

$$x_1, x_2, ..., x_n, ... \in E.$$

(1) *Набор* $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ *ортогонален тогда и только тогда, когда векторы* $x_1, x_2, ..., x_n$ *ортогональны между собой для любого* n.

(2) *Набор* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *ортогонален тогда и только тогда, когда для любого набора* p*-адических чисел* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *верно равенство*

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right\| = \max_{1\le j\le n} |\lambda_j|_p \|x_j\|.$$

(3) Набор $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ортогонален тогда и только тогда, когда для любого набора p-адических чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ верны неравенства

$$\left\|\sum_{j=m}^{n} \lambda_j x_j\right\| \ge |\lambda_m|_p \|x_m\|,\ m = 1, 2, .., n-1.$$

***Теорема* 1.4.** n-Мерные функции Малера

$$\left\{\binom{x}{k}_n : x \in \mathbb{Z}_p^n,\ k = (k_1,...,k_n),\ k_i = 0,1,2...\forall i = \overline{1,n}\right\}$$

образуют ортонормированный базис пространства $C(\mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Q}_p)$, т. е. любая функция $f \in C(\mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Q}_p)$ может быть представлена в виде сходящегося ряда

$$f(x) = \sum f_k \binom{x}{k}_n.$$

Доказательство. Из определения n-мерной функции Малера $\binom{x}{k}_n$ следует, что она является полиномиальной функцией от n переменных $x_1,...,x_n$ степени $k_1+...+k_n$. Очевидно, что любая полиномиальная функция из $\mathbb{Z}_p^n$ в $\mathbb{Q}_p$ представима в виде конечной линейной комбинации n-мерных функций Малера. Тогда из теоремы 1.2 вытекает, что линейная оболочка n-мерных функций Малера плотна в $C(\mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Q}_p)$.

В пространстве непрерывных на $\mathbb{Z}_p^n$ функций зададим норму по формуле

$$\|f\| = \max_{x\in\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p .$$

Несложно видеть, что

$$\left\|\binom{x}{k}_n\right\| = \max_{x\in\mathbb{Z}_p^n}\left|\prod_{i=1}^n \binom{x_i}{k_i}\right|_p = \max_{x\in\mathbb{Z}_p^n}\prod_{i=1}^n \left|\binom{x_i}{k_i}\right|_p \le 1$$

и равенство достигается при $x = k$, где $k = (k_1,...,k_n)$. Тогда $\left\|\binom{x}{k}_n\right\| = 1$ для любого $k = (k_1,...,k_n)$, $k_i \ge 0$, $i = \overline{1,n}$.

Для доказательства ортогональности рассмотрим множество векторов

$$\{k = (k_1,...,k_n) : k_i \ge 0, i = \overline{1,n}\}.$$

Очевидно, что рассматриваемое множество счетно. Упорядочим введенное множество при помощи лексикографического порядка. Получаем упорядоченную последовательность векторов $k^0, k^1, ..., k^n, ...$ Тогда если $l, m \ge 0$ и $l < m$, то существует такое i, $0 \le i \le n$, что $k_i^l < k_i^m$. Отметим, что для любых l, m таких, что $l < m$, верно

$$\binom{k^l}{k^m}_n = \prod_{i=1}^n \binom{k_i^l}{k_i^m} = 0,$$

так как $\binom{k_i^l}{k_i^m} = 0$, если $k_i^l < k_i^m$ [2].

Зафиксируем $r \ge 0$ и возьмем произвольные числа $a_{k^0}, a_{k^1}, ..., a_{k^r} \in \mathbb{Q}_p$. Тогда для любого m такого, что $0 \le m \le r$, верно

$$\left\| a_{k^m}\binom{x}{k^m}_n + a_{k^{m+1}}\binom{x}{k^{m+1}}_n + ... + a_{k^r}\binom{x}{k^r}_n \right\| \ge$$

$$\ge \left|\sum_{j=m}^r a_{k^j}\binom{k^m}{k^j}_n\right|_p =$$

$$= \left|\sum_{j=m}^r a_{k^j}\prod_{i=1}^n \binom{k_i^m}{k_i^j}\right|_p = |a_{k^m}|_p .$$

Что по пункту 3 теоремы 1.3 означает ортогональность семейства функций

$$\left\{\binom{x}{k^0}_n, \binom{x}{k^1}_n, ..., \binom{x}{k^r}_n\right\}.$$

Так как r выбрано произвольно, то множество n-мерных функций Малера ортогонально.

2 Критерий пространства m раз непрерывно-дифференцируемых функций p-адического векторного аргумента

***Определение* 2.1.** Пусть $m \in \mathbb{N}$. Определим множество

$$\nabla^m \mathbb{Z}_p = \{(x_1,...,x_m) \in \mathbb{Z}_p^m : \text{если } i \ne j, \text{ тогда } x_i \ne x_j\}.$$

Для функции $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ индуктивно определим функцию $\Phi_m f : \nabla^{m+1}\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ так, что $\Phi_0 f := f$, а

$$\Phi_m f(x_1,...,x_m,x_{m+1}) = = \frac{\Phi_{m-1}f(x_1,...,x_{m-1},x_m) - \Phi_{m-1}f(x_1,...,x_{m-1},x_{m+1})}{x_m - x_{m+1}}.$$

Функция $f \in C^m(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$, если $\Phi_m f$ непрерывна на $\mathbb{Z}_p^{m+1}$. В пространстве m раз непрерывно-дифференцируемых функций $C^m(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$ можно определить норму по формуле

$$\|f\|_m = \max_{i=\overline{0,m}}\{\|\Phi_i f\|\},$$

где $\|\Phi_i f\| = \max_{x\in Z_p^{i+1}} |\Phi_i f(x)|_p$.

***Теорема* 2.1.** *Пусть* $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ *и* $f(x) = \binom{x}{k}$, *где* $k \ge 0$. *Тогда*

$$\|\Phi_m f\| =$$

a)
$$= \max_{j_1=\overline{1,k}}\left\{\frac{1}{|j_1|_p}\left\{...\max_{j_{m-1}=\overline{1,j_{m-2}-(m-2)}}\left\{\frac{1}{|j_{m-1}|_p}\times \right.\right.\right. \quad (2.1)$$

$$\left.\left.\left.\times \max_{j_m=\overline{1,j_{m-1}-(m-1)}}\frac{1}{|j_m|_p}\right\}...\right\}\right\}.$$

b)
$$\|\Phi_m f\| \asymp \max_{j=\overline{1,k}}\frac{1}{|j|_p^m}, \quad (2.2)$$

то есть $\|\Phi_m f\| = O(\max_{j=\overline{1,k}}\frac{1}{|j|_p^m})$ *и* $\max_{j=\overline{1,k}}\frac{1}{|j|_p^m} = O(\|\Phi_m f\|)$ *при* $k \to +\infty$.

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathbb{Z}_p$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ верна следующая формула [2, с. 138]

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{x}{j}\binom{y}{n-j}. \qquad (2.3)$$

Тогда с учетом предыдущего равенства преобразуем функцию $\Phi_1 f(x+y, x)$

$$\Phi_1 f(x+y,x) = \frac{1}{y}\left(\binom{x+y}{k} - \binom{x}{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{y}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\binom{x}{j}\binom{y}{k-j}\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{y}\frac{y}{k-j}\binom{x}{j}\binom{y-1}{k-j-1}\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{k-j}\binom{x}{j}\binom{y-1}{k-j-1}\right).$$

С учетом ортогональности двумерных функций Малера (теорема 1.4) получаем, что

$$\left\|\Phi_1 f\right\| = \max_{j=\overline{0,k-1}}\left\{\left|\frac{1}{k-j}\right|_p \left\|\binom{x}{j}\binom{y-1}{k-j-1}\right\|\right\} =$$

$$= \max_{j=\overline{1,k}}\frac{1}{|j|_p}.$$

Очевидно, что пункт $b)$ теоремы выполняется для $\left\|\Phi_1 f\right\|$.

Покажем, что в общем случае $\Phi_{m-1} f(x_1,\dots,x_m)$ имеет следующий вид

$$\Phi_{m-1} f(x_1,\dots,x_m) = \qquad (2.4)$$

$$= \sum_{j_1=0}^{k_{j_1}} A_1\binom{x_1}{j_1}\left(\sum_{j_2=0}^{k_{j_2}} A_2\binom{x_2}{j_2}\left(\dots\sum_{j_{m-1}=0}^{k_{j_{m-1}}} A_{m-1}\binom{x_{m-1}}{j_{m-1}}\binom{x_m}{k_{j_m}}\right)\dots\right),$$

где $k_{j_1} = k-1$, $k_{j_{m-i}} = k_{j_{m-i-1}} - j_{m-i-1} - 1$,

$$A_{m-i} = \frac{1}{k_{j_{m-i-1}} - j_{m-i}}.$$

Очивидно, что $\Phi_1 f(x_1, x_2)$ удовлетворяет приведенной выше формуле. Формула 2.4 верна для $k=1$ и пусть она верна для $k = m-1$. Покажем, что она верна для $k = m$:

$$\Phi_m f(x_1,\dots,x_m,y) =$$

$$= \frac{1}{y}(\Phi_{m-1} f(x_1,\dots,x_m) - \Phi_{m-1} f(x_1,\dots,x_m+y)) =$$

$$= \frac{1}{y}\sum_{j_1} A_1\binom{x_1}{j_1}\left(\dots\sum_{j_{m-1}} A_{m-1}\binom{x_{m-1}}{j_{m-1}}\left(\binom{x_m}{k_{j_m}} - \binom{x_m+y}{k_{j_m}}\right)\dots\right) =$$

$$= \frac{1}{y}\sum_{j_1} A_1\binom{x_1}{k_{j_1}}\times$$

$$\times\left(\dots\sum_{j_{m-1}} A_{m-1}\binom{x_{m-1}}{k_{j_m}}\left(\sum_{j_m=0}^{k_{j_m}}\binom{x_m}{j_m}\binom{y}{k_{j_m}-j_m}\right)\dots\right) =$$

$$= \sum_{j_1} A_1\binom{x_1}{k_{j_1}}\left(\dots\left(\sum_{j_m=0}^{k_{j_m}-1}\frac{1}{k_{j_m}-j_m}\binom{x_m}{j_m}\binom{y-1}{k_{j_m}-j_m-1}\right)\dots\right).$$

Следовательно, формула (2.4) верна и для $k = m$. С учетом ортогональности n-мерных функций Малера получаем, что

$$\left\|\Phi_m f(x_1,\dots,x_m,y)\right\| =$$

$$= \max_{j_1=\overline{0,k_{j_1}-1}}\dots\max_{j_{m-1}=\overline{0,k_{j_{m-1}}-1}}\ \max_{j_m=\overline{0,k_{j_m}-1}} |A_1 \dots A_{m-1}A_m|_p =$$

$$= \max_{j_1=\overline{0,k_{j_1}-1}}\left\{|A_1|_p\left\{\dots\max_{j_{m-1}=\overline{0,k_{j_{m-1}}-1}}\left\{|A_{m-1}|_p\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\max_{j_m=\overline{0,k_{j_m}-1}}|A_m|_p\right\}\dots\right\}\right\} =$$

$$= \max_{j_1=\overline{0,k_{j_1}-1}}\left\{\frac{1}{|k_{j_1}-j_1|_p}\left\{\dots\max_{j_{m-1}=\overline{0,k_{j_{m-1}}-1}}\left\{\frac{1}{|k_{j_{m-1}}-j_{m-1}|_p}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\max_{j_m=\overline{0,k_{j_m}-1}}\frac{1}{|k_{j_m}-j_m|_p}\right\}\dots\right\}\right\} =$$

$$= \max_{j_1=\overline{0,k_{j_1}}}\left\{\frac{1}{|j_1|_p}\left\{\dots\max_{j_{m-1}=\overline{0,k_{j_{m-1}}}}\left\{\frac{1}{|j_{m-1}|_p}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\max_{j_m=\overline{0,k_{j_m}}}\frac{1}{|j_m|_p}\right\}\dots\right\}\right\}.$$

С учетом замен, введенных в формуле 2.4, получаем доказательство пункта a).

В общем случае для любого $i, s \in \mathbb{N}$ существует константа $C_{i,s}$ такая, что

$$\max_{j=\overline{1,k}}\left\{\frac{1}{|j|_p}\max_{l=\overline{1,j-i}}\frac{1}{|l|_p^s}\right\} \le \max_{j=\overline{1,k}}\frac{1}{|j|_p^{s+1}} \le$$

$$\le C_{i,s}\max_{j=\overline{1,k}}\left\{\frac{1}{|j|_p}\max_{l=\overline{1,j-i}}\frac{1}{|l|_p^s}\right\}$$

и

$$\frac{1}{C_{i,s}}\max_{j=\overline{1,k}}\frac{1}{|j|_p^{s+1}} \le \max_{j=\overline{1,k}}\left\{\frac{1}{|j|_p}\max_{l=\overline{1,j-i}}\frac{1}{|l|_p^s}\right\} \le$$

$$\le \max_{j=\overline{1,k}}\frac{1}{|j|_p^{s+1}}.$$

С учетом предыдущих неравенств получаем

$$\max_{j_1=\overline{1,k}}\frac{1}{|j_1|_p^m} \ge$$

$$\ge \max_{j_1=\overline{1,k}}\left\{\frac{1}{|j_1|_p}\left\{\dots\max_{j_{m-1}=\overline{1,j_{m-2}-(m-2)}}\left\{\frac{1}{|j_{m-1}|_p}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\max_{j_m=\overline{1,j_{m-1}-(m-1)}}\frac{1}{|j_m|_p}\right\}\dots\right\}\right\} \ge$$

$$\ge \frac{1}{C_m}\max_{j_1=\overline{1,k}}\left\{\frac{1}{|j_1|_p}\left\{\dots\max_{j_{m-1}=\overline{1,j_{m-2}-(m-2)}}\left\{\frac{1}{|j_{m-1}|_p^2}\right\}\dots\right\}\right\} \ge$$

$$\geq ... \geq \frac{1}{C_2 ... C_m} \max_{j_1=\overline{1,k}} \frac{1}{|j_1|_p^m}.$$

Предыдущие неравенства доказывают пункт b) для произвольного $\|\Phi_m f\|$.

***Определение* 2.2.** Пусть $X = \left(\mathbb{C}_p^n\right)'$ – пространство, линейно сопряженное к $\mathbb{C}_p^n$, $m \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что $f : \mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{C}_p$ является m раз непрерывно-дифференцируемой функцией, и писать $f \in C^m(\mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{C}_p)$, если существуют непрерывные функции

$$\Phi_j f : \mathbb{Z}_p^{n(j+1)} \to X^{\otimes m}, \ \ 0 \leq j \leq m,$$

удовлетворяющие равенствам $\Phi_0 f := f$,

$$\Phi_j f(x_1, ..., x_j, x_{j+1})(x_j - x_{j+1}) =$$
$$= \Phi_{j-1} f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j) - \Phi_{j-1} f(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}),$$

где $1 \leq j \leq m$,

$$x_j - x_{j+1} = (x_j^{(1)} - x_{j+1}^{(1)}, x_j^{(2)} - x_{j+1}^{(2)}, ..., x_j^{(n)} - x_{j+1}^{(n)}).$$

***Замечание* 2.1.** Отметим, что функция из определения 2.2, вообще говоря, не единственна. Например, пусть $f : \mathbb{Z}_p^2 \to \mathbb{Q}_p$ и $f(x) = x^{(1)}$ равняется первой координате аргумента. Тогда

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^{(1)} - x_2^{(1)} = \begin{pmatrix}1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(1)} - x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} - x_2^{(2)} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}1 + x_2^{(1)} - x_2^{(2)}, & 0 - (x_1^{(1)} - x_2^{(1)})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(1)} - x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} - x_2^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\Phi_1 f$ не определена однозначно.

Для цилиндрических функций $f : \mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{Q}_p$ и $f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) ... f_n(x_n)$, где $f_i(x_i) : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ для любого $i = \overline{1,n}$, функцию $\Phi_m f$ можно построить следующим образом. Из определения 2.2 получаем, что

$$(\Phi_1 f)(x_1, x_2)(x_1 - x_2) = (\Phi_0 f)(x_1) - (\Phi_0 f)(x_2).$$

Т. к. $(\Phi_1 f)(x_1, x_2)$ принимает значения в пространстве $\left(\mathbb{C}_p^n\right)'$, то предыдущее равенство можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} (\Phi_1 f)_i (x_1, x_2)(x_1^{(i)} - x_2^{(i)}) =$$
$$= (\Phi_0 f)(x_1) - (\Phi_0 f)(x_2) =$$
$$= f_1(x_1^{(1)}) f_2(x_1^{(2)}) ... f_n(x_1^{(n)}) -$$
$$- f_1(x_2^{(1)}) f_2(x_2^{(2)}) ... f_n(x_2^{(n)}) =$$
$$= f_1(x_1^{(1)}) f_2(x_1^{(2)}) ... f_n(x_1^{(n)}) -$$
$$- f_1(x_2^{(1)}) f_2(x_1^{(2)}) ... f_n(x_1^{(n)}) +$$
$$+ f_1(x_2^{(1)}) f_2(x_1^{(2)}) ... f_n(x_1^{(n)}) -$$
$$- f_1(x_2^{(1)}) f_2(x_2^{(2)}) ... f_n(x_1^{(n)}) -$$
$$...$$
$$+ f_1(x_2^{(1)}) f_2(x_2^{(2)}) ... f_n(x_1^{(n)}) -$$
$$- f_1(x_2^{(1)}) f_2(x_2^{(2)}) ... f_n(x_2^{(n)}) =$$
$$= \frac{(f_1(x_1^{(1)}) - f_1(x_2^{(1)}))}{(x_1^{(1)} - x_2^{(1)})}(x_1^{(1)} - x_2^{(1)}) f_2(x_1^{(2)}) ... f_n(x_1^{(n)}) + ...$$
$$+ f_1(x_2^{(1)}) f_2(x_2^{(2)}) ... \frac{(f_n(x_1^{(n)}) - f_n(x_2^{(n)}))}{(x_1^{(n)} - x_2^{(n)})}(x_1^{(n)} - x_2^{(n)}) =$$
$$= (\Phi_1 f_1)(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})(x_1^{(1)} - x_2^{(1)}) \times$$
$$\times (\Phi_0 f_2)(x_1^{(2)}) ... (\Phi_0 f_n)(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) +$$
$$+ (\Phi_0 f_1)(x_2^{(1)})(\Phi_1 f_2)(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \times$$
$$\times (x_1^{(2)} - x_2^{(2)}) ... (\Phi_0 f_n)(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) + ... +$$
$$+ (\Phi_0 f_1)(x_2^{(1)})(\Phi_0 f_2)(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \times$$
$$\times ... (\Phi_1 f_n)(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})(x_1^{(n)} - x_2^{(n)}).$$

Откуда следует, что

$$(\Phi_1 f)_i (x_1, x_2) = \prod_{i' < i} \Phi_0 f_{i'}(x_2^{(i')}) \times$$
$$\times \Phi_1 f_i (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \times \prod_{i' > i} \Phi_0 f_{i'}(x_1^{(i')}) \qquad (2.5)$$

для любого $1 \leq i \leq n$.

Из определения 2.2 получаем, что для произвольного $m \geq 1$

$$\Phi_m f(x_1, ..., x_{m+1}) =$$
$$= ((\Phi_m f)_{i_1 ... i_m}(x_1, ..., x_{m+1}) : 1 \leq i_k \leq n, \forall k = \overline{1,m}). \qquad (2.6)$$

Предположим, что $(\Phi_m f)_{i_1 ... i_m}(x_1, ..., x_{m+1})$ для фиксированного $m \geq 1$ имеет вид

$$(\Phi_m f)_{i_1 ... i_m}(x_1, ..., x_{m+1}) = \qquad (2.7)$$
$$= \prod_{i_m < i_m} \Phi_0 f_{i_m}(x_{m+1}^{(i_m)}) \times \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)}, ..., x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+1}^{(i_m)}) \times$$
$$\times \prod_{i_m > i_m} \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)}, ..., x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{j_{k_{i_m}+1}}^{(i_m)}),$$

где $k_{i_m} + \sum_{i_m} k_{i_m} = m$ и $1 \leq j_{k_{i_m}}, j_{k_{i_m}}, j_{k_{i_m}+1} \leq m$ для любых значений k_{i_m} и k_{i_m}, т. е. третий множитель не зависит от $x_{m=1}$, либо

$$(\Phi_m f)_{i_1 ... i_m}(x_1, ..., x_{m+1}) = 0.$$

Очевидно, что элементы $\Phi_1 f(x_1, x_2)$ удовлетворяет формуле 2.7. ассмотрим $\Phi_{m+1} f(x_1, ..., x_{m+2})$.

$$\sum_{i_{m+1}=1}^{n} (\Phi_{m+1} f)_{i_1, ..., i_{m+1}}(x_1, ..., x_{m+1}, x_{m+2})(x_{m+1}^{(i_{m+1})} - x_{m+2}^{(i_{m+1})}) =$$
$$= (\Phi_m f)_{i_1 ... i_m}(x_1, ..., x_m, x_{m+1}) -$$
$$- (\Phi_m f)_{i_1 ... i_m}(x_1, ..., x_m, x_{m+2}) =$$
$$= \prod_{i_m < i_m} \Phi_0 f_{i_m}(x_{m+1}^{(i_m)}) \times \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)}, ..., x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+1}^{(i_m)}) \times$$
$$\times \prod_{i_m > i_m} \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)}, ..., x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{j_{k_{i_m}+1}}^{(i_m)}) -$$
$$- \prod_{i_m < i_m} \Phi_0 f_{i_m}(x_{m+2}^{(i_m)}) \times \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)}, ..., x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{m+2}^{(i_m)}) \times$$
$$\times \prod_{i_m > i_m} \Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)}, ..., x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)}, x_{j_{k_{i_m}+1}}^{(i_m)}) =$$

$$=\Bigg(\prod_{i_m<i_m}\Phi_0 f_{i_m}(x_{m+1}^{(i_m)})\times\Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)},...,x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)},x_{m+1}^{(i_m)})-$$

$$-\Phi_0 f_1(x_{m+2}^{(1)})\prod_{1<i_m<i_m}\Phi_0 f_{i_m}(x_{m+1}^{(i_m)})\times$$

$$\times\Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)},...,x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)},x_{m+1}^{(i_m)})+$$

$$+\Phi_0 f_1(x_{m+2}^{(1)})\prod_{1<i_m<i_m}\Phi_0 f_{i_m}(x_{m+1}^{(i_m)})\times$$

$$\times\Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)},...,x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)},x_{m+1}^{(i_m)})-$$

$$-\Phi_0 f_1(x_{m+2}^{(1)})\Phi_0 f_2(x_{m+2}^{(2)})\prod_{2<i_m<i_m}\Phi_0 f_{i_m}(x_{m+1}^{(i_m)})\times$$

$$\times\Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)},...,x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)},x_{m+1}^{(i_m)})+$$

$$+\Phi_0 f_1(x_{m+2}^{(1)})\Phi_0 f_2(x_{m+2}^{(2)})\prod_{2<i_m<i_m}\Phi_0 f_{i_m}(x_{m+1}^{(i_m)})\times$$

$$\times\Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)},...,x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)},x_{m+1}^{(i_m)})-$$

$$-...+$$

$$+\prod_{i_m<i_m}\Phi_0 f_{i_m}(x_{m+2}^{(i_m)})\times\Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)},...,x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)},x_{m+1}^{(i_m)})-$$

$$-\prod_{i_m<i_m}\Phi_0 f_{i_m}(x_{m+2}^{(i_m)})\times\Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)},...,x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)},x_{m+2}^{(i_m)})\Bigg)\times$$

$$\times\prod_{i_m>i_m}\Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)},...,x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)},x_{j_{k_{i_m}+1}}^{(i_m)})=$$

$$=\Bigg(\Phi_1 f_1(x_{m+1}^{(1)},x_{m+2}^{(1)})(x_{m+1}^{(1)}-x_{m+2}^{(1)})\prod_{1<i_m<i_m}\Phi_0 f_{i_m}(x_{m+1}^{(i_m)})\times$$

$$\times\Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)},...,x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)},x_{m+1}^{(i_m)})+$$

$$+...+$$

$$+\prod_{i_m<i_m}\Phi_0 f_{i_m}(x_{m+2}^{(i_m)})\times$$

$$\times\Phi_{k_{i_m}+1} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)},...,x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)},x_{m+1}^{(i_m)},x_{m+2}^{(i_m)})(x_{m+1}^{(i_m)}-x_{m+2}^{(i_m)})\Bigg)$$

$$\times\prod_{i_m>i_m}\Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)},...,x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)},x_{j_{k_{i_m}+1}}^{(i_m)}).$$

Тогда для $i_{m+1}<i_m$ элемент

$$(\Phi_{m+1}f)_{i_1,...,i_{m+1}}(x_1,...,x_{m+1},x_{m+2})=$$

$$=\prod_{i_{m+1}<i_{m+1}}\Phi_0 f_{i_{m+1}}(x_{m+2}^{(i_{m+1})})\times\Phi_1 f_{i_{m+1}}(x_{m+1}^{(i_{m+1})},x_{m+2}^{(i_{m+1})})\times$$

$$\times\prod_{i_{m+1}>i_{m+1}}\Phi_0 f_{i_{m+1}}(x_{m+1}^{(i_{m+1})})\times$$

$$\times\Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)},...,x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)},x_{m+1}^{(i_m)})\times$$

$$\times\prod_{i_m>i_m}\Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)},...,x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)},x_{j_{k_{i_m}+1}}^{(i_m)}),$$

где $1+k_{i_m}+\sum_{i_m}k_{i_m}=m+1$ и третий, чертвый и пятый множители не зависят от x_{m+2}.

Для $i_{m+1}=i_m$ элемент

$$(\Phi_{m+1}f)_{i_1,...,i_{m+1}}(x_1,...,x_{m+1},x_{m+2})=$$

$$=\prod_{i_{m+1}<i_{m+1}}\Phi_0 f_{i_{m+1}}(x_{m+2}^{(i_{m+1})})\times$$

$$\times\Phi_{k_{i_m}+1} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)},...,x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)},x_{m+1}^{(i_m)},x_{m+2}^{(i_m)})\times$$

$$\times\prod_{i_m>i_m}\Phi_{k_{i_m}} f_{i_m}(x_{j_1}^{(i_m)},...,x_{j_{k_{i_m}}}^{(i_m)},x_{j_{k_{i_m}+1}}^{(i_m)}),$$

где $k_{i_m}+1+\sum_{i_m}k_{i_m}=m+1$ и третий множитель не зависит от x_{m+2}. При $i_{m+1}>i_m$ получаем, что $(\Phi_{m+1}f)_{i_1,...,i_{m+1}}(x_1,...,x_{m+1},x_{m+2})=0$. Таким образом, представление для $(\Phi_{m+1}f)_{i_1,...,i_{m+1}}(x_1,...,x_{m+1},x_{m+2})$ удовлетворяет предположению 2.7. Из чего следует, что для цилиндрической функции получена рекурентная формула для выражения элементов $\Phi_{m+1}f$ через элементы $\Phi_m f$. В данном случае функция $\Phi_m f$ определена однозначно, т. к. ее элементы представляются в виде произведения однозначно определенных функций $\Phi_i f_j$, где $f_j:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Q}_p$.

Из полученного выражения для матричных элементов $(\Phi_m f)_{i_1...i_m}$ непосредственно вытекает следующая теорема.

***Теорема* 2.2.** Пусть $f\in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$ и $f(x)=f_1(x_1)f_2(x_2)...f_n(x_n)$, где $f_i\in C^1(\mathbb{Z}_p)$ для любого $i=\overline{1,n}$. Тогда

$$\|\Phi_m f\|=$$
$$=\max\{\|\Phi_{i_1}f_1\|\cdot\|\Phi_{i_2}f_2\|\cdot...\cdot\|\Phi_{i_n}f_n\|:\quad(2.8)$$
$$i_1,...,i_n\ge 0, i_1+...+i_n=m\},$$

где $\Phi_0 f_i:=f_i$ для любого $i=\overline{1,n}$.

***Замечание* 2.2.** Т. к. n-мерная функция Малера является цилиндрической функцией и для любой функции $f\in C(\mathbb{Z}_p^n)$ имеет место представление $f(x)=\sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty}f_{k_1,...,k_n}\binom{x}{k}_n$, то можем определить $\Phi_m f$ следующим образом

$$\Phi_m f(x_1,...,x_{m+1})=\sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty}f_{k_1,...,k_n}\Phi_m\binom{x}{k}_n,$$

причем в данном случае $\Phi_m f$ определена однозначно.

***Теорема* 2.3.** *Пусть имеет место представление*

$$f(x)=\sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty}f_{k_1,...,k_n}\binom{x}{k}_n,$$

где $k=(k_1,...,k_n)$ *и* $\binom{x}{k}_n=\prod_{i=1}^{n}\binom{x_i}{k_i}$. *Тогда* $f(x)\in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{k_1,...,k_n\to\infty}|f_{k_1,...,k_n}|_p\max_{j=\overline{1,k_M}}\frac{1}{|j|_p^m}=0,$$

где $k_M=\max\{k_1,...,k_n\}$.

Доказательство. Функция $f(x)\in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$ тогда и только тогда, когда

$$\|f\| = \max_{i=\overline{1,m}} \{\|\Phi_i f\|\} < +\infty,$$

то есть $\|\Phi_i f\| < +\infty$ для любого $i = \overline{1,m}$. Ряд $f(x) = \sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty} f_{k_1,...,k_n} \binom{x}{k}_n$ сходится равномерно и абсолютно, значит, для любого $i = \overline{1,m}$ имеет место формула $\Phi_i f(x) = \sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty} f_{k_1,...,k_n} \Phi_i \binom{x}{k}_n$.

А так как $\|\Phi_i f\| < +\infty$, следовательно, ряд $\sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty} f_{k_1,...,k_n} \Phi_i \binom{x}{k}_n$ сходится. Из критерия сходимости рядов в пространствах с ультраметрикой ([3], с. 24) вытекает, что

$$\lim_{k_1,...,k_n \to +\infty} \left\| f_{k_1,...,k_n} \Phi_i \binom{x}{k}_n \right\| = 0.$$

Тогда с учетом теоремы 2.2 получаем

$$\lim_{k_1,...,k_n \to +\infty} | f_{k_1,...,k_n} |_p \times$$
$$\times \max_{i_1,...,i_n \geq 0, i_1+...+i_n=i} \left\{ \left\| \Phi_{i_1} \binom{x_i}{k_i} \right\| ... \left\| \Phi_{i_n} \binom{x_n}{k_n} \right\| \right\} = 0.$$

По теореме 2.1 предыдущее равенство эквивалентно

$$\lim_{k_1,...,k_n \to +\infty} | f_{k_1,...,k_n} |_p \times$$
$$\times \max_{i_1,...,i_n \geq 0, i_1+...+i_n=i} \left\{ \max_{j=\overline{1,k_1}} \frac{1}{| j |_p^{i_1}} \cdot ... \cdot \max_{j=\overline{1,k_n}} \frac{1}{| j |_p^{i_n}} \right\} = 0,$$

которое в свою очередь эквивалентно

$$\lim_{k_1,...,k_n \to \infty} | f_{k_1,...,k_n} |_p \max_{j=\overline{1,k_M}} \frac{1}{| j |_p^i} = 0, \tag{2.9}$$

где $k_M = \max\{k_1,...,k_n\}$.

Приведенные выше рассуждения верны для любого $i = \overline{1,m}$. Очевидно, что если для $i = m$ выполняется равенство 2.9, то оно выполняется и для $i = \overline{1,m-1}$. Следовательно, $f(x) \in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k_1,...,k_n \to \infty} | f_{k_1,...,k_n} |_p \max_{j=\overline{1,k_M}} \frac{1}{| j |_p^m} = 0,$$

где $k_M = \max\{k_1,...,k_n\}$.

3 Условие сходимости ряда Фурье функций p-адического векторного аргумента

Напомним определение частичных сумм ряда Фурье. Обозначим $\mathbb{Z}_p^n$ через *G*. Очевидным является тот факт, что G – компактная группа. Пусть $H_0 \hookrightarrow G$ – открыто-компактная подгруппа, а $H_N = p^N H_0 \subset \mathbb{Z}_p^n$. С учетом двойственности Понтрягина имеем точные последовательности

$$H \hookrightarrow G \; G \twoheadrightarrow G/H, \quad \widehat{H} \twoheadleftarrow \widehat{G} \hookleftarrow \widehat{G/H} = H_G^{\perp}.$$

Фактор-группа компактной группы по открытой подгруппе является конечной. Так как $(H_N)_G^{\perp} \cong G/H_N$, то $(H_N)_G^{\perp}$ имеет конечное число элементов. Тогда определим частичную сумму ряда Фурье функции заданной на $\mathbb{Z}_p^n$.

***Определение* 3.1.** Частичной суммой ряда Фурье функции $f(t): C^1(\mathbb{Z}_p^n \to \mathbb{C}_p)$ будем называть функцию

$$(S_N f)(x) = \sum_{k \in (H_N)_G^{\perp}} f_k \chi_p((k,x)), \tag{3.1}$$

где $(k,x) = \sum_{j=1}^{n} k_j x_j$, k_j – представитель класса смежности в $\mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p$ с нулевой целой частью $[k_j]_p = 0$. Коэффициенты Фурье находятся по формуле $f_k = V\int_{\mathbb{Z}_p^n} f(t)\overline{\chi_p((k,t))}dt$, где $V\int_{\mathbb{Z}_p^n}$ – интеграл Волкенборна [2, с. 106].

Более детальное обоснование введенного определения можно найти в [4].

***Лемма* 3.1.** Пусть $f \in C(\mathbb{Z}_p^n)$ и

$$f(x) = f_1(x_1)...f_n(x_n).$$

Тогда $f_k = f_{k_1}...f_{k_n}$ и $S_N f = S_N f_1 ... S_N f_n$, где f_k, f_{k_i} – коэффициенты Фурье, а $S_N f, S_N f_i$ – частичные суммы ряда Фурье.

Доказательство. Из определения 3.1 получаем, что

$$f_k = V\int_{Z_p^n} f(x)\overline{\chi_p((k,x))}dx =$$
$$= V\int_{Z_p^n} \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i) \prod_{i=1}^{n} \overline{\chi_p(k_i x_i)}dx =$$
$$= V\int_{Z_p^n} \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)\overline{\chi_p(k_i x_i)}dx = f_{k_i}...f_{k_n},$$

где $k = (k_1,...,k_n)$, $k_i \in \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p$.

Далее рассмотрим частичные суммы ряда Фурье

$$S_N f(x) = \sum_{k \in (H_N)_G^{\perp}} f_k \chi_p((k,x)) =$$
$$= \sum_{k \in (H_N)_G^{\perp}} \left(\prod_{i=1}^{n} f_{k_i} \prod_{i=1}^{n} \chi_p(k_i x_i) \right) =$$
$$= \sum_{k \in (H_N)_G^{\perp}} \left(\prod_{i=1}^{n} f_{k_i} \chi_p(k_i x_i) \right) =$$
$$= \sum_{|k_1| \leq p^N, ..., |k_n| \leq p^N} \prod_{i=1}^{n} \left(f_{k_i} \chi_p(k_i x_i) \right) =$$
$$= \sum_{|k_1| \leq p^N} ... \sum_{|k_n| \leq p^N} \prod_{i=1}^{n} \left(f_{k_i} \chi_p(k_i x_i) \right) =$$
$$= \sum_{|k_1| \leq p^N} f_{k_1} \chi_p(k_1 x_1) ... \sum_{|k_n| \leq p^N} f_{k_n} \chi_p(k_n x_n) =$$
$$= S_N f_1(x_1) ... S_N f_n(x_n).$$

***Теорема* 3.1.** Пусть $f \in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$. Тогда ряд Фурье функции f сходится, если $m \geq n$.

Доказательство. По теореме 1.4 имеет место представление

$$f(x)=\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty} f_k \binom{x}{k}_n, \text{ где } k=(k_1,\dots,k_n).$$

Обозначим через $x^{\{N\}}$ остаток деления числа x на p^N, то есть $x^{\{N\}}=\sum_{i=0}^{N-1} x_i p^i$. Пусть $r_{k,N}(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\binom{x^{\{N\}}}{j}\frac{(-1)^{k-j}p^N}{k-j+1}$. Тогда из [5] известно, что частичные суммы ряда Фурье одномерной функции Малера имеют вид

$$\left(S_N\binom{x}{k}\right)(x)=\binom{x^{\{N\}}}{k}+r_{k,N}(x),$$

а также $\left\|r_{k,N}\right\|=p^{-N}\max\limits_{j=2,k+1}\frac{1}{|j|_p}$.

Рассмотрим частичные суммы ряда Фурье функции f:

$$S_N f(x)=\sum_{k_1,\dots,k_N=0}^{+\infty} f_k S_N\binom{x}{k}_n=\sum_{k_1,\dots,k_N=0}^{+\infty} f_k\prod_{i=1}^{n} S_N\binom{x_i}{k_i}=$$

$$=\sum_{k_1,\dots,k_N=0}^{+\infty} f_k\left(\left(\binom{x_1^{\{N\}}}{k_1}+r_{k_1,N}(x_1)\right)\dots\left(\binom{x_n^{\{N\}}}{k_n}+r_{k_n,N}(x_n)\right)\right)=$$

$$=\sum_{k_1,\dots,k_N=0}^{+\infty} f_k\binom{x_1^{\{N\}}}{k_1}\dots\binom{x_n^{\{N\}}}{k_n}+$$

$$+\sum_{k_1,\dots,k_N=0}^{+\infty} f_k\left(\sum_{A\subset\{1,\dots,n\}}\prod_{i\in A}\binom{x_i^{\{N\}}}{k_i}\prod_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus A} r_{k_j,N}(x_j)\right)=$$

$$=\sum_{k_1,\dots,k_N=0}^{+\infty} f_k\binom{x_1^{\{N\}}}{k_1}\dots\binom{x_n^{\{N\}}}{k_n}+$$

$$+\sum_{A\subset\{1,\dots,n\}}\left(\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty} f_k\prod_{i\in A}\binom{x_i^{\{N\}}}{k_i}\prod_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus A} r_{k_j,N}(x_j)\right)=:$$

$$=:A_N(x)+B_N(x).$$

Очевидно, что $A_N(x)\to f(x)$ при $N\to\infty$ для любого $x\in\mathbb{Z}_p^n$. Покажем, что $B_N(x)\to 0$ при $N\to\infty$ для любого $x\in\mathbb{Z}_p^n$.

По теореме 2.3 функция $f(x)\in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k_1,\dots,k_n\to\infty}|f_{k_1,\dots,k_n}|_p\max_{j=1,k_M}\frac{1}{|j|_p^m}=0,$$

где $k_M=\max\{k_1,\dots,k_n\}$. И пусть l – количество элементов в множетсве $\{1,\dots,n\}\setminus A$, $0\le l\le n$. Рассмотрим

$$\left\|\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty} f_k\prod_{i\in A}\binom{x_i^{\{N\}}}{k_i}\prod_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus A} r_{k_j,N}(x_j)\right\|\le$$

$$\le\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty}\left\|f_k\prod_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus A} r_{k_j,N}(x_j)\right\|\le$$

$$\le p^{-lN}\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty}|f_k|_p\max_{j=2,k_{i_1}+1}\frac{1}{|j|_p}\dots\max_{j=2,k_{i_n}+1}\frac{1}{|j|_p}\le$$

$$\le p^{-lN}\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty}|f_k|_p\max_{j=2,k_M+1}\frac{1}{|j|_p^l},$$

где $k_M=\max\{k_1,\dots,k_n\}$.

Так как $m\ge n$, то для любого $l\in\{0,\dots,n\}$ имеем $\lim_{k\to\infty}|f_k|_p\max_{j=\overline{2,k_M+1}}\frac{1}{|j|_p^l}=0$. Это означает, что ряд $\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty}|f_k|_p\max_{j=\overline{2,k_M+1}}\frac{1}{|j|_p^l}$ сходится и его значение не зависит от N. Это означает, что

$$p^{-lN}\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty}|f_k|_p\max_{j=2,k_M+1}\frac{1}{|j|_p^l}\to 0, \text{ при } N\to\infty.$$

Следовательно,

$$\left\|\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{+\infty} f_k\prod_{i\in A}\binom{x_i^{\{N\}}}{k_i}\prod_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus A} r_{k_j,N}(x_j)\right\|\to 0,$$

$$\text{при } N\to\infty.$$

Сумма $B_N(x)$ содержит конечное число членов, стремящихся к нулю, при $N\to\infty$. Значит, $B_N(x)\to 0$ при $N\to\infty$ для любого $x\in Z_p^n$.

***Замечание* 3.1.** Приведем пример функции $f\in C^m(\mathbb{Z}_p^n)$, $m<n$, ряд Фурье которой не сходится. Пусть $m=1$, $n=2$ и

$$f(x)=\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} f_k\binom{x_1}{k_1}\binom{x_2}{k_2}.$$

Коэффициент f_k удовлетворяет следующему условию

$$|f_k|_p=p^{[(N_1+2N_1)/2]}=p^{[3N_1/2]},$$

где $\max\limits_{i=1,\max\{k_1,k_2\}}\frac{1}{|j|_p}=p^{N_1}$ и $\max\limits_{i=1,\max\{k_1,k_2\}}\frac{1}{|j|_p^2}=2p^{N_1}$.

Из условия определения коэффициентов Малера следует, что $f\in C(\mathbb{Z}_p^2)$, так как

$$\lim_{k\to\infty}|f_k|_p\max_{i=1,\max\{k_1,k_2\}}\frac{1}{|j|_p}=0.$$

Как было показано в предыдущей теореме, $S_N f$ можно представить в виде

$$S_N f(x)=\sum_{k_1,k_2=0}^{+\infty} f_k\binom{x_1^{\{N\}}}{k_1}\binom{x_2^{\{N\}}}{k_2}+$$

$$+\sum_{k_1,k_2=0}^{+\infty} f_k\binom{x_1^{\{N\}}}{k_1}r_{k_2,N}(x_2)+$$

$$+\sum_{k_1,k_2=0}^{+\infty} f_k\binom{x_2^{\{N\}}}{k_2}r_{k_1,N}(x_1)+\sum_{k_1,k_2=0}^{+\infty} f_k r_{k_1,N}(x_1)r_{k_2,N}(x_2).$$

Рассмотрим $\sum_{k_1,k_2=0}^{+\infty} f_k r_{k_1,N}(x_1)r_{k_2,N}(x_2)$. Из условия определения f_k получаем, что

$$\lim_{k_1,k_2\to\infty}\left\|f_k r_{k_1,N}(x_1)r_{k_2,N}(x_2)\right\|=$$

$$=\lim_{k_1,k_2\to\infty}|f_k|_p\max_{i=1,k_1}\frac{1}{|j|_p}\max_{i=1,k_2}\frac{1}{|j|_p}=$$

$$= \lim_{k_1,k_2\to\infty} |f_k|_p \max_{i=1,\max\{k_1,k_2\}} \frac{1}{|j|_p^2} = \infty.$$

Это означает, что ряд

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{+\infty} f_k r_{k_1,N}(x_1) r_{k_2,N}(x_2)$$

расходится, так как не сходится ряд представляющий частичную сумму ряда Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вейс, Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс; пер. с англ. В.В. Жаринова; под ред. Е.Д. Соломенцева, С.Б. Стечкина. – М. : Мир, 1974. – 333 с.

2. *Schikhov, W.* Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis / W. Schikhov. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984. – 306 p.

3. *Радына, А.Я.* Пачаткі нархімедавага аналізу: дапам. для студэнтаў мех.-мат. фак. / А.Я. Радына, Я.М. Радына, Я.В. Радына. – Мінск: БДУ, 2010. – 111 с.

4. *Заренок М.А.* p-Адическое ядро Дирихле и сходимость многомерного ряда Фурье для непрерывных и суммируемых функций на $\mathbb{Z}_p^n$. // Вестник БГУ. Серия 1. – 2012. – № 1. – С. 90–95.

5. *Заренок М.А.* Сходимость рядов Фурье непрерывно-дифференцируемых функций *p*-адического аргумента. // Вестник ВГУ. – 2012. № 1 (67). – С. 12–17.

6. *Владимиров, В.С.* p-Адический анализ и математическая физика / В.С. Владимиров, В.И. Волович, Е.И. Зеленов. – М. : Наука: Физматлит, 1994. – 352 с.

Поступила в редакцию 16.05.12.