Проблемы физики, математики и техники, № 4 (13), 2012

**МАТЕМАТИКА**

УДК 512.548

# СОПРЯЖЕННЫЕ ВЕКТОР-МАТРИЦЫ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МАТРИЦЫ

**А.М. Гальмак**

*Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв*

# THE CONUJGATE VECTOR-MATRIX AND SPACEMATRIX

**A.M. Gal'mak**

*Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev*

В статье определяются и изучаются комплексно сопряженные и эрмитово сопряженные вектор-матрицы и пространственные матрицы.

***Ключевые слова***: *матрица, вектор-матрица, пространственная матрица.*

The conujgate vector-matrix and spacematrix are defined and studied in this paper.

***Keywords***: *matrix, vector-matrix, spacematrix.*



### *Введение*

Многоместные операции на множествах упорядоченных наборов обычных матриц изучали Э. Пост [1] и А.К. Слипенко [2]. Упорядоченные наборы матриц, имеющие $k$ компонент, в дальнейшем будем называть $k$-компонентными вектор-матрицами. В [3] для произвольных целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma$ из $S_k$ на множестве всех $k$-компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом была определена частичная $l$-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая является $l$-арным аналогом бинарной операции умножения обычных матриц. В [4] аналогичные $l$-арные операции были определены для пространственных матриц. В данной работе определяются и изучаются комплексно сопряженные и эрмитово сопряженные вектор-матрицы и пространственные матрицы.

### *1 Сопряженные вектор-матрицы*

Сумма вектор-матриц $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ и $\mathbf{B} = (B_1, \ldots, B_k)$ одинаковых размеров над кольцом $P$, а также произведение элемента $\lambda \in P$ на вектор-матрицу $\mathbf{A}$ определяются покомпонентно:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1, \ldots, A_k + B_k),$$
$$\lambda\mathbf{A} = (\lambda A_1, \ldots, \lambda A_k).$$

***Определение*** **1.1**. Для всякой вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ над $\mathbb{C}$ назовем комплексно сопряженной вектор-матрицу $\overline{\mathbf{A}} = (\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_k)$, у которой каждая компонента $\overline{A}_j$ является комплексно сопряженной с компонентой $A_j$ вектор-матрицы $\mathbf{A}$.

***Определение*** **1.2**. Для всякой вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ над $\mathbb{C}$ назовем эрмитово сопряженной вектор-матрицу $\mathbf{A}^* = (A_1^*, \ldots, A_k^*)$, у которой каждая компонента $A_j^*$ является эрмитово сопряженной с компонентой $A_j$ вектор-матрицы $\mathbf{A}$.

Ясно, что для действительной вектор-матрицы $\mathbf{A}$, то есть вектор-матрицы, у которой все компоненты являются действительными матрицами, вектор-матрицы $\mathbf{A}^*$ и $\mathbf{A}'$ совпадают, где $\mathbf{A}'$ – транспонированная вектор-матрица [5].

***Замечание*** **1.1.** Так как всякий элемент $\lambda \in \mathbb{C}$ можно рассматривать как квадратную матрицу первого порядка, то упорядоченный набор $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ элементов $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ из $\mathbb{C}$ является вектор-матрицей первого порядка, для которой, согласно определениям 1.1 и 1.2,

$$\overline{\boldsymbol{\lambda}} = (\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_k),\ \boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*).$$

Каждое из восьми равенств в следующем предложении является следствием соответствующего равенства для обычных матриц.

***Предложение*** **1.1**. *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *– произвольные k-компонентные вектор-матрицы над* $\mathbb{C}$. *Тогда:*

1) *если* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *имеют одинаковые размеры, то*
$$\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}},\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*;$$

2) *если* $\lambda \in \mathbb{C}$, *то*
$$\overline{\lambda\mathbf{A}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{A}},\ (\lambda\mathbf{A})^* = \overline{\lambda}\,\mathbf{A}^*;$$

3) *операция транспонирования перестановочна и с операцией комплексного сопряжения, и с операцией эрмитового сопряжения, то есть*
$$\overline{\mathbf{A}'} = \overline{\mathbf{A}}',\ (\mathbf{A}')^* = (\mathbf{A}^*)';$$

4) *операции комплексного сопряжения и эрмитового сопряжения инволютивны, то есть*
$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A},\ (\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}.$$

***Теорема* 1.1.** *Пусть* σ *– подстановка из* $S_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \ldots, A_{ik}),\ i = 1, \ldots, l \qquad (1.1)$$

*такие вектор-матрицы над* ℂ, *что определена вектор-матрица*

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\,\sigma,\,k}. \qquad (1.2)$$

*Тогда определены вектор-матрицы*

$$\overline{[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_l]}_{l,\,\sigma,\,k},\ [\overline{\mathbf{A}}_1\overline{\mathbf{A}}_2 \ldots \overline{\mathbf{A}}_l]_{l,\,\sigma,\,k}, \qquad (1.3)$$

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_l]^*_{l,\,\sigma,\,k},\ [\mathbf{A}^*_l \ldots \mathbf{A}^*_2\mathbf{A}^*_1]_{l,\,\sigma^{-1},\,k} \qquad (1.4)$$

*и верны равенства*

$$\overline{[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_l]}_{l,\,\sigma,\,k} = [\overline{\mathbf{A}}_1\overline{\mathbf{A}}_2 \ldots \overline{\mathbf{A}}_l]_{l,\,\sigma,\,k}, \qquad (1.5)$$

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_l]^*_{l,\,\sigma,\,k} = [\mathbf{A}^*_l \ldots \mathbf{A}^*_2\mathbf{A}^*_1]_{l,\,\sigma^{-1},\,k}. \qquad (1.6)$$

*Доказательство.* Так как $\overline{UV} = \overline{U}\,\overline{V}$ для обычных матриц, то

$$\overline{A_{1j}A_{2\sigma(j)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(j)}} = \overline{A}_{1j}\overline{A}_{2\sigma(j)} \ldots \overline{A}_{l\sigma^{l-1}(j)} \qquad (1.7)$$

для любого $j = 1, \ldots, k$. Левая (правая) часть последнего равенства является $j$-ой компонентой первой (второй) вектор-матрицы из (1.3), то есть обе указанные вектор-матрицы существуют. Равенство (1.5) вытекает из (1.7).

Существование первой матрицы в (1.4) является следствием существования матрицы (1.2).

Выпишем $j$-ую компоненту вектор-матрицы (1.2):

$$Y_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}A_{l\sigma^{l-1}j} =$$

$$= A_{1j}A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}A_{lj},\ j = 1, \ldots, k.$$

Если положить $\tau = \sigma^{-1}$, то из условия $\sigma^l = \sigma$ получаем

$$\tau = \sigma^{l-2}, \ldots, \tau^{l-2} = \sigma,\ \tau^{l-1} = \varepsilon,\ \tau^l = \tau. \qquad (1.8)$$

Обозначив $j$-ую компоненту вектор-матрицы в левой части (1.6) через $U_j$, и используя соответствующий бинарный результат и (1.8), получим

$$U_j = Y^*_j = (A_{1j}A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}A_{lj})^* =$$

$$= A^*_{lj}A^*_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} \ldots A^*_{2\sigma(j)}A^*_{1j} =$$

$$A^*_{lj}A^*_{(l-1)\tau(j)} \ldots A^*_{2\tau^{l-2}(j)}A^*_{1j},$$

то есть

$$U_j = A^*_{lj}A^*_{(l-1)\tau(j)} \ldots A^*_{2\tau^{l-2}(j)}A^*_{1j}. \qquad (1.9)$$

Так как

$$\mathbf{A}^*_i = (A^*_{i1}, \ldots, A^*_{ik}),\ i = 1, \ldots, l,$$

то из (1.9) вытекает, что определена вторая вектор-матрица из (1.4), $j$-ая компонента которой совпадает с правой частью (1.9). Так как для любого $j = 1, \ldots, k$ $j$-ые компоненты в левой и правой частях равенства (1.6) совпадают, то указанное равенство верно. Теорема доказана.

***Замечание* 1.2.** Равенство (1.6) может быть получено как следствие равенства (1.5) и равенства (2.4) из [5] для транспонированных вектор-матриц.

## *2 Следствия из теоремы 1.1*

Если $k$-компонентные квадратные вектор-матрицы

$$\mathbf{A}_1 = (A_{11}, \ldots, A_{1k}), \ldots, \mathbf{A}_l = (A_{l1}, \ldots, A_{lk})$$

над ℂ таковы, что для любого $j = 1, \ldots, k$ матрицы

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \ldots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{l\sigma^{l-1}(j)} \qquad (2.1)$$

имеют одинаковый порядок, то существует вектор-матрица (1.2). Поэтому из теоремы 1.1 вытекает

***Следствие* 2.1**. *Пусть* σ *– подстановка из* $S_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$, *вектор-матрицы* (1.1) *являются квадратными и для любого* $j = 1, \ldots, k$ *матрицы* (2.1) *имеют одинаковый порядок. Тогда верны равенства* (1.5) и (1.6).

***Следствие* 2.2**. *Пусть* σ *– подстановка из* $S_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l$ *–* $k$*-компонентные квадратные вектор-матрицы над* ℂ *одного и того же порядка* $n$. *Тогда верны равенства* (1.5) и (1.6).

Если σ – цикл длины $t$ из $S_k$, $m \geq 1$, $l = mt + 1$, то $\sigma^l = \sigma$. Поэтому имеют место следующие три следствия.

***Следствие* 2.3**. *Пусть* σ *– цикл длины* $t$ *из* $S_k$, $m \geq 1$

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \ldots, A_{ik}),\ i = 1, \ldots, mt + 1 \qquad (2.2)$$

*такие вектор-матрицы над* ℂ, *что определена вектор-матрица* $[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{mt+1}]_{mt+1,\,\sigma,\,k}$. *Тогда определены вектор-матрицы*

$$[\overline{\mathbf{A}}_1 \ldots \overline{\mathbf{A}}_{mt+1}]_{mt+1,\,\sigma,\,k},\ [\mathbf{A}^*_{mt+1} \ldots \mathbf{A}^*_1]_{mt+1,\,\sigma^{-1},\,k}$$

*и верны равенства*

$$\overline{[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{mt+1}]}_{mt+1,\,\sigma,\,k} = [\overline{\mathbf{A}}_1 \ldots \overline{\mathbf{A}}_{mt+1}]_{mt+1,\,\sigma,\,k}, \qquad (2.3)$$

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{mt+1}]^*_{mt+1,\,\sigma,\,k} = [\mathbf{A}^*_{mt+1} \ldots \mathbf{A}^*_1]_{mt+1,\,\sigma^{-1},\,k}. \qquad (2.4)$$

*В частности, если* $m = 1$, *то*

$$\overline{[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{t+1}]}_{t+1,\,\sigma,\,k} = [\overline{\mathbf{A}}_1 \ldots \overline{\mathbf{A}}_{t+1}]_{t+1,\,\sigma,\,k}, \qquad (2.5)$$

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{t+1}]^*_{t+1,\,\sigma,\,k} = [\mathbf{A}^*_{t+1} \ldots \mathbf{A}^*_1]_{t+1,\,\sigma^{-1},\,k}. \qquad (2.6)$$

***Следствие* 2.4**. *Пусть* σ *– цикл длины* $t$ *из* $S_k$, $m \geq 1$, *вектор-матрицы* (2.2) *являются квадратными, и для любого* $j = 1, \ldots, k$ *матрицы*

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \ldots, A_{(mt)\sigma^{mt-1}(j)}, A_{(mt+1)\sigma^{mt}(j)} = A_{(mt+1)j}$$

*имеют один и тот же порядок. Тогда верны равенства* (2.3) и (2.4). *В частности, если* $m = 1$, *то верны равенства* (2.5) и (2.6).

***Следствие* 2.5**. *Пусть* σ *– цикл длины* $t$ *из* $S_k$, $m \geq 1$, $\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{mt+1}$ *–* $k$*-компонентные квадратные вектор-матрицы над* ℂ *одного и того же порядка* $n$. *Тогда верны равенства* (2.3) и (2.4). *В частности, если* $m = 1$, *то верны равенства* (2.5) *и* (2.6).

Полагая в следствиях 2.3–2.5 $t = k$, получим еще три следствия.

**Следствие 2.6**. *Пусть* σ *– цикл длины* $k$ *из* $S_k$, $m \geq 1$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \ldots, A_{ik}),\ i = 1, \ldots, mk + 1 \qquad (2.7)$$

*такие вектор-матрицы над* $\mathbb{C}$*, что определена вектор-матрица* $[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{mk+1}]_{mk+1,\,\sigma,\,k}$. *Тогда определены вектор-матрицы*

$$[\bar{\mathbf{A}}_1 \ldots \bar{\mathbf{A}}_{mk+1}]_{mk+1,\,\sigma,\,k},\ [\mathbf{A}^*_{mk+1} \ldots \mathbf{A}^*_1]_{mk+1,\,\sigma^{-1},\,k}$$

*и верны равенства*

$$\overline{[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{mk+1}]}_{mk+1,\,\sigma,\,k} = [\bar{\mathbf{A}}_1 \ldots \bar{\mathbf{A}}_{mk+1}]_{mk+1,\,\sigma,\,k}, \quad (2.8)$$

$$[\mathbf{A} \ldots \mathbf{A}_{mk+1}]^*_{mk+1,\,\sigma,\,k} = [\mathbf{A}^*_{mk+1} \ldots \mathbf{A}^*_1]_{mk+1,\,\sigma^{-1},\,k}. \quad (2.9)$$

*В частности, если* $m = 1$, *то*

$$\overline{[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{k+1}]}_{k+1,\,\sigma,\,k} = [\bar{\mathbf{A}}_1 \ldots \bar{\mathbf{A}}_{k+1}]_{k+1,\,\sigma,\,k}, \quad (2.10)$$

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{k+1}]^*_{k+1,\,\sigma,\,k} = [\mathbf{A}^*_{k+1} \ldots \mathbf{A}^*_1]_{k+1,\,\sigma^{-1},\,k}. \quad (2.11)$$

***Следствие* 2.7**. *Пусть* $\sigma$ *– цикл длины* $k$ *из* $S_k$, $m \geq 1$, *вектор-матрицы* (2.7) *являются квадратными и для любого* $j = 1, \ldots, k$ *матрицы*

$$A_{1j},\ A_{2\sigma(j)}, \ldots,\ A_{(mk)\sigma^{mk-1}(j)},\ A_{(mk+1)\sigma^{mk}(j)} = A_{(mk+1)j}$$

*имеют одинаковый порядок. Тогда верны равенства* (2.8) и (2.9). *В частности, если* $m = 1$, *то верны равенства* (2.10) и (2.11).

***Следствие* 2.8**. *Пусть* $\sigma$ *– цикл длины* $k$ *из* $S_k$, $m \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{mk+1}$ *–* $k$*-компонентные квадратные вектор-матрицы над* $\mathbb{C}$ *одного и того же порядка* $n$. *Тогда верны равенства* (2.8) и (2.9). *В частности, если* $m = 1$, *то верны равенства* (2.10) и (2.11).

Полагая в следствиях 2.6–2.8 $\sigma = (12 \ldots k)$, получим еще три следствия.

***Следствие* 2.9**. *Пусть* $\sigma = (12 \ldots k)$, $m \geq 1$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \ldots, A_{ik}),\ i = 1, \ldots, mk + 1 \quad (2.12)$$

*такие вектор-матрицы над* $\mathbb{C}$*, что определена вектор-матрица* $[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{mk+1}]_{mk+1,\,(12\ldots k),\,k}$. *Тогда определены вектор-матрицы*

$$[\bar{\mathbf{A}}_1 \ldots \bar{\mathbf{A}}_{mk+1}]_{mk+1,\,(12\ldots k),\,k},\ [\mathbf{A}^*_{mk+1} \ldots \mathbf{A}^*_1]_{mk+1,\,(k\ldots 21),\,k}$$

*и верны равенства*

$$\overline{[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{mk+1}]}_{mk+1,\,(12\ldots k),\,k} = [\bar{\mathbf{A}}_1 \ldots \bar{\mathbf{A}}_{mk+1}]_{mk+1,\,(12\ldots k),\,k}, \quad (2.13)$$

$$[\mathbf{A} \ldots \mathbf{A}_{mk+1}]^*_{mk+1,\,(12\ldots k),\,k} = [\mathbf{A}^*_{mk+1} \ldots \mathbf{A}^*_1]_{mk+1,\,(k\ldots 21),\,k}. \quad (2.14)$$

*В частности, если* $m = 1$, *то*

$$\overline{[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{k+1}]}_{k+1,\,(12\ldots k),\,k} = [\bar{\mathbf{A}}_1 \ldots \bar{\mathbf{A}}_{k+1}]_{k+1,\,(12\ldots k),\,k}, \quad (2.15)$$

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{k+1}]^*_{k+1,\,(12\ldots k),\,k} = [\mathbf{A}^*_{k+1} \ldots \mathbf{A}^*_1]_{k+1,\,(k\ldots 21),\,k}. \quad (2.16)$$

***Следствие* 2.10**. *Пусть* $\sigma = (12 \ldots k)$, $m \geq 1$, *вектор-матрицы* (2.12) *являются квадратными и для любого* $j = 1, \ldots, k$ *матрицы*

$$A_{1j},\ A_{2\sigma(j)}, \ldots,\ A_{(mk)\sigma^{mk-1}(j)},\ A_{(mk+1)\sigma^{mk}(j)} = A_{(mk+1)j}$$

*имеют одинаковый порядок. Тогда верны равенства* (2.13) и (2.14). *В частности, если* $m = 1$, *то верны равенства* (2.15) и (2.16).

***Следствие* 2.11**. *Пусть* $\sigma = (12 \ldots k)$, $m \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{mk+1}$ *–* $k$*-компонентные квадратные вектор-матрицы над* $\mathbb{C}$ *одного и того же порядка* $n$. *Тогда верны равенства* (2.13) и (2.14). *В частности, если* $m = 1$, *то верны равенства* (2.15) и (2.16).

Так как для любой транспозиции $\sigma \in S_k$ верно $\sigma = \sigma^{-1}$, то, полагая в следствиях 2.3–2.5 $t = 2$, получим еще три следствия.

***Следствие* 2.12**. *Пусть* $\sigma$ *– транспозиция из* $S_k$, $m \geq 1$

$$\mathbf{A}_1 = (A_{11}, \ldots, A_{1k}), \ldots,$$
$$\mathbf{A}_{2m+1} = (A_{(2m+1)1}, \ldots, A_{(2m+1)k}) \quad (2.17)$$

*такие вектор-матрицы над* $\mathbb{C}$*, что определена вектор-матрица* $[A_1 \ldots A_{2m+1}]_{2m+1,\,\sigma,\,k}$. *Тогда определены вектор-матрицы*

$$[\bar{\mathbf{A}}_1 \ldots \bar{\mathbf{A}}_{2m+1}]_{2m+1,\,\sigma,\,k},\ [\mathbf{A}^*_{2m+1} \ldots \mathbf{A}^*_1]_{2m+1,\,\sigma,\,k}$$

*и верны равенства*

$$\overline{[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{2m+1}]}_{2m+1,\,\sigma,\,k} = [\bar{\mathbf{A}}_1 \ldots \bar{\mathbf{A}}_{2m+1}]_{2m+1,\,\sigma,\,k}, \quad (2.18)$$

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{2m+1}]^*_{2m+1,\,\sigma,\,k} = [\mathbf{A}^*_{2m+1} \ldots \mathbf{A}^*_1]_{2m+1,\,\sigma,\,k}. \quad (2.19)$$

*В частности, если* $m = 1$, *то*

$$\overline{[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3]}_{3,\,\sigma,\,k} = [\bar{\mathbf{A}}_1\bar{\mathbf{A}}_2\bar{\mathbf{A}}_3]_{3,\,\sigma,\,k}, \quad (2.20)$$

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3]^*_{3,\,\sigma,\,k} = [\mathbf{A}^*_3\mathbf{A}^*_2\mathbf{A}^*_1]_{3,\,\sigma,\,k}. \quad (2.21)$$

***Следствие* 2.13**. *Пусть* $\sigma$ *– транспозиция из* $S_k$, $m \geq 1$, *вектор-матрицы* (2.17) *являются квадратными, и для любого* $j = 1, \ldots, k$ *матрицы*

$$A_{1j},\ A_{2\sigma(j)}, \ldots,\ A_{2m\sigma^{2m-1}(j)},\ A_{(2m+1)\sigma^{2m}(j)} = A_{(2m+1)j}$$

*имеют один и тот же порядок. Тогда верны равенства* (2.18) и (2.19). *В частности, если* $m = 1$, *то верны равенства* (2.20) и (2.21).

***Следствие* 2.14**. *Пусть* $\sigma$ *– транспозиция из* $S_k$, $m \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{2m+1}$ *–* $k$*-компонентные квадратные вектор-матрицы над* $\mathbb{C}$ *одного и того же порядка* $n$. *Тогда верны равенства* (2.18) и (2.19). *В частности, если* $m = 1$, *то верны равенства* (2.20) и (2.21).

Полагая в следствиях 2.12–2.14 $k = 2$, получим еще три следствия.

***Следствие* 2.15**. *Пусть* $\sigma = (12) \in S_2$, $m \geq 1$,

$$\mathbf{A}_1 = (A_{11}, A_{12}), \ldots, \mathbf{A}_{2m+1} = (A_{(2m+1)1}, A_{(2m+1)2}) \quad (2.22)$$

*такие вектор-матрицы над* $\mathbb{C}$*, что определена вектор-матрица* $[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{2m+1}]_{2m+1,\,(12),\,2}$. *Тогда определены вектор-матрицы*

$$[\bar{\mathbf{A}}_1 \ldots \bar{\mathbf{A}}_{2m+1}]_{2m+1,\,(12),\,k},\ [\mathbf{A}^*_{2m+1} \ldots \mathbf{A}^*_1]_{2m+1,\,(12),\,2}$$

*и верны равенства*

$$\overline{[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{2m+1}]}_{2m+1,\,(12),\,k} = [\bar{\mathbf{A}}_1 \ldots \bar{\mathbf{A}}_{2m+1}]_{2m+1,\,(12),\,k}, \quad (2.23)$$

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{2m+1}]^*_{2m+1,\,(12),\,2} =$$

$$= [\mathbf{A}^*_{2m+1} \ldots \mathbf{A}^*_1]_{2m+1,\,(12),\,2}. \qquad (2.24)$$

*В частности, если* $m = 1$, *то*

$$\overline{[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3]}_{3,\,(12),\,k} = [\overline{\mathbf{A}}_1\overline{\mathbf{A}}_2\overline{\mathbf{A}}_3]_{3,\,(12),\,k}, \qquad (2.25)$$

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3]^*_{3,\,(12),\,2} = [\mathbf{A}^*_3\mathbf{A}^*_2\mathbf{A}^*_1]_{3,\,(12),\,2}. \qquad (2.26)$$

***Следствие* 2.16**. *Пусть* $\sigma = (12) \in S_2$, $m \geq 1$, 2-*компонентные вектор-матрицы* (2.22) *являются квадратными, компоненты* $A_{11}, A_{22}, A_{31}, \ldots, \ldots, A_{(2m)2}, A_{(2m+1)1}$ *имеют один и тот же порядок, один и тот же порядок имеют также компоненты* $A_{12}, A_{21}, A_{32}, \ldots, A_{(2m)1}, A_{(2m+1)2}$. *Тогда верны равенства* (2.23) и (2.24). *В частности, если* $m = 1$, *то верны равенства* (2.25) *и* (2.26).

***Следствие* 2.17**. *Пусть* $\sigma = (12) \in S_2$, $m \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{2m+1}$ – 2-*компонентные квадратные вектор-матрицы над* $\mathbb{C}$ *одного и того же порядка* $n$. *Тогда верны равенства* (2.23) *и* (2.24). *В частности, если* $m = 1$, *то верны равенства* (2.25) *и* (2.26).

***Замечание* 2.1.** Следствия 2.15 – 2.17 могут быть получены из следствий 2.9–2.11 при $k = 2$.

***Пример* 2.1.** Пусть $k = 3$, $l = 4$, $\sigma = (123) \in S_3$, $P = \mathbb{C}$,

$$\mathbf{A}_1 = \left(\begin{pmatrix}-1 & 0 & i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i & 0\\1-i & 1\end{pmatrix}\right),$$

$$\mathbf{A}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i & 0\\-1 & 1\\1 & i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\right),$$

$$\mathbf{A}_3 = \left(\begin{pmatrix}i & -1 & 1\\1 & 0 & -i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i & 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1+i\\-i\end{pmatrix}\right),$$

$$\mathbf{A}_4 = \left(\begin{pmatrix}-i & i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\-i\\-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1+i\\i\\1-i\end{pmatrix}\right).$$

Тогда

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4]_{4,\,(123),\,3} =$$

$$\left(\begin{pmatrix}-1 & 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 0\\-1 & 1\\1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+i\\-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & i\end{pmatrix},\right.$$

$$\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & -1 & 1\\1 & 0 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\-i\\-i\end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{pmatrix}i & 0\\1-i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+i\\i\\1-i\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3-2i\\1+5i\end{pmatrix}\right).$$

Следовательно,

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4]^*_{4,\,(123),\,3} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3+2i & 1-5i\end{pmatrix}\right). \qquad (2.27)$$

Так как

$$\mathbf{A}^*_1 = \left(\begin{pmatrix}-1\\0\\-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-i & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-i & 1+i\\0 & 1\end{pmatrix}\right),$$

$$\mathbf{A}^*_2 = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-i & -1 & 1\\0 & 1 & -i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right),$$

$$\mathbf{A}^*_3 = \left(\begin{pmatrix}-i & 1\\-1 & 0\\1 & i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-i\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1-i & i\end{pmatrix}\right),$$

$$\mathbf{A}^*_4 = \left(\begin{pmatrix}i\\-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-i & i & i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1-i & -i & 1+i\end{pmatrix}\right),$$

то, ввиду $\sigma^{-1} = (132)$, имеем

$$[\mathbf{A}^*_4\ \mathbf{A}^*_3\ \mathbf{A}^*_2\ \mathbf{A}^*_1]_{4,\,(132),\,3} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix}i\\-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & -1 & 1\\0 & 1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\-i\end{pmatrix},\right.$$

$$\begin{pmatrix}-i & i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & 1\\-1 & 0\\1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & 1\end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{pmatrix}1-i & -i & 1+i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & 1+i\\0 & 1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3+2i & 1-5i\end{pmatrix}\right),$$

то есть

$$[\mathbf{A}^*_4\ \mathbf{A}^*_3\ \mathbf{A}^*_2\ \mathbf{A}^*_1]_{4,\,(132),\,3} =$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3+2i & 1-5i\end{pmatrix}\right). \qquad (2.28)$$

Сравнивая (2.27) и (2.28), видим, что

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4]^*_{4,\,(123),\,3} = [\mathbf{A}^*_4\ \mathbf{A}^*_3\ \mathbf{A}^*_2\ \mathbf{A}^*_1]_{4,\,(132),\,3}.$$

### *3 Связь между сопряженными и косыми вектор-матрицами*

Обозначим через $\mathbf{GL}_n(k, P)$ множество всех $k$-компонентных квадратных вектор-матриц $n$-го порядка над полем $P$, у которых определитель каждой компоненты отличен от нуля. Ясно, что $\mathbf{GL}_n(k, P)$ совпадает с декартовой степенью $\underbrace{\mathbf{GL}_n(P) \times \ldots \times \mathbf{GL}_n(P)}_{k}$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(P)$. Так как $\mathbf{GL}_n(P)$ – группа с операцией умножения матриц, то, полагая в теореме 3.6.2 из [6] $\mathbf{A} = \mathbf{GL}_n(P)$, получим следующий результат.

***Предложение* 3.1.** *Если подстановка* $\sigma \in S_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *– l-арная группа.*

***Замечание* 3.1.** Из соответствующих результатов книги [6] следует, что $l$-арная группа $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ не имеет единиц, а при $n \geq 2$ является неполуабелевой, в частности, неабелевой.

***Замечание* 3.2.** Пост рассматривал [1] частный случай $l$-арной группы $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ при $P = \mathbb{C}$, $l = k + 1$, $\sigma = (12 \ldots k)$. $(k + 1)$-Арную группу $< \mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C}), [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$ он называл полной линейной $(k + 1)$-арной группой.

В следующей теореме обобщаются равенства

$$\overline{(\mathbf{A}^{-1})} = (\overline{\mathbf{A}})^{-1}, \quad (\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1},$$

справедливые для квадратных невырожденных матриц. Символ $\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,k}}}$ используется для обозначения косого элемента вектор-матрицы $\mathbf{A}$ $l$-арной группы $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

***Теорема* 3.1**. *Если подстановка* $\sigma \in S_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то для любой вектор-матрицы* $\mathbf{A}$ *из* $\mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C})$ *верны равенства*

$$\overline{\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,k}}}} = \overline{\mathbf{A}}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,k}}}, \quad (\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{l,\sigma^{-1},k}}}, \quad (3.1)$$

*то есть в* $\mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C})$ *операция взятия косого элемента перестановочна и с операцией комплексного сопряжения, и с операцией эрмитового сопряжения.*

*Доказательство.* Докажем второе равенство. Положим

$$\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k), \ (\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,k}}})^* = (D_1, \ldots, D_k),$$

$$(\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{l,\sigma^{-1},k}}} = (C_1, \ldots, C_k).$$

Так как по лемме 2.5.1 [6]

$$\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,k}}} = (B_1, \ldots, B_k),$$

где

$$B_j = A^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots A^{-1}_{\sigma(j)}$$

для любого $j = 1, \ldots, k$, то, используя соответствующий бинарный результат, получим

$$D_j = B_j^* = (A^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots A^{-1}_{\sigma(j)})^* = (A^{-1}_{\sigma(j)})^* \ldots (A^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)})^*,$$

то есть

$$D_j = (A^{-1}_{\sigma(j)})^* \ldots (A^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)})^*, \ j = 1, \ldots, k. \quad (3.2)$$

С другой стороны, так как $\mathbf{A}^* = (A_1^*, \ldots, A_k^*)$, то, полагая $\tau = \sigma^{-1}$, и используя (1.8), лемму 2.5.1 [6] и соответствующий бинарный результат (операции эрмитового сопряжения и взятия обратного элемента перестановочны), получим

$$C_j = (A^*_{\tau^{l-2}(j)})^{-1} \ldots (A^*_{\tau(j)})^{-1} =$$

$$= (A^*_{\sigma(j)})^{-1} \ldots (A^*_{\sigma^{l-2}(j)})^{-1} = (A^{-1}_{\sigma(j)})^* \ldots (A^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)})^*,$$

то есть

$$C_j = (A^{-1}_{\sigma(j)})^* \ldots (A^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)})^*, \ j = 1, \ldots, k. \quad (3.3)$$

Из (3.2) и (3.3) вытекает (3.1).

Первое равенство из (3.1) доказывается аналогично. Теорема доказана.

***Замечание* 3.3.** Второе равенство в (3.1) может быть получено как следствие первого равенства в (3.1) и равенства (4.2) из [5] для транспонированных вектор-матриц.

***Следствие* 3.1**. *Если* $\sigma$ *– цикл длины* $t$ *из* $S_k$, $m \geq 1$, $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C})$, *то*

$$\overline{\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{mt+1,\sigma,k}}}} = \overline{\mathbf{A}}^{\overline{[\ ]_{mt+1,\sigma,k}}},$$

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{mt+1,\sigma,k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{mt+1,\sigma^{-1},k}}}.$$

*В частности, если* $m = 1$, *то*

$$\overline{\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{t+1,\sigma,k}}}} = \overline{\mathbf{A}}^{\overline{[\ ]_{t+1,\sigma,k}}}, \ (\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{t+1,\sigma,k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{t+1,\sigma^{-1},k}}}.$$

***Следствие* 3.2**. *Если* $\sigma$ *– цикл длины* $k$ *из* $S_k$, $m \geq 1$, $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C})$, *то*

$$\overline{\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{mk+1,\sigma,k}}}} = \overline{\mathbf{A}}^{\overline{[\ ]_{mk+1,\sigma,k}}},$$

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{mk+1,\sigma,k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{mk+1,\sigma^{-1},k}}}.$$

*В частности, если* $m = 1$, *то*

$$\overline{\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{k+1,\sigma,k}}}} = \overline{\mathbf{A}}^{\overline{[\ ]_{k+1,\sigma,k}}}, \ (\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{k+1,\sigma,k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{k+1,\sigma^{-1},k}}}.$$

***Следствие* 3.3**. *Если* $\sigma = (12 \ldots k)$, $m \geq 1$, $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C})$, *то*

$$\overline{\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{mk+1,(12\ldots k),k}}}} = \overline{\mathbf{A}}^{\overline{[\ ]_{mk+1,(12\ldots k),k}}},$$

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{mk+1,(12\ldots k),k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{mk+1,(k\ldots 21),k}}}.$$

*В частности, если* $m = 1$, *то*

$$\overline{\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{k+1,(12\ldots k),k}}}} = \overline{\mathbf{A}}^{\overline{[\ ]_{k+1,(12\ldots k),k}}},$$

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{k+1,(12\ldots k),k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{k+1,(k\ldots 21),k}}}.$$

***Следствие* 3.4**. *Если* $\sigma$ *– транспозиция из* $S_k$, $m \geq 1$, $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(k, \mathbb{C})$, *то*

$$\overline{\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{2m+1,\sigma,k}}}} = \overline{\mathbf{A}}^{\overline{[\ ]_{2m+1,\sigma,k}}}, \ (\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{2m+1,\sigma,k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{2m+1,\sigma,k}}}.$$

*В частности, если* $m = 1$, *то*

$$\overline{\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{3,\sigma,k}}}} = \overline{\mathbf{A}}^{\overline{[\ ]_{3,\sigma,k}}}, \ (\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{3,\sigma,k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{3,\sigma,k}}}.$$

***Следствие* 3.5**. *Если* $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(2, \mathbb{C})$, *то*

$$\overline{\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{3,(12),2}}}} = \overline{\mathbf{A}}^{\overline{[\ ]_{3,(12),2}}}, \ (\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{3,(12),2}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{3,(12),2}}}.$$

### *4 Вектор-определители и определители сопряженных вектор-матриц*

Если $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ – квадратная вектор-матрица над ассоциативным коммутативным кольцом $P$ с единицей, то есть вектор-матрица, у которой все компоненты $A_1, \ldots, A_k$ являются квадратными матрицами над $P$, не обязательно одного порядка, то для неё определены [7] вектор-определитель

$$\mathbf{det}\mathbf{A} = (\det A_1, \ldots, \det A_k) \in P^k$$

и определитель

$$\det\mathbf{A} = \det A_1 \det A_2 \ldots \det A_k \in P.$$

Ясно, что при $k = 1$ понятия вектор-определителя и определителя совпадают: $\mathbf{det}\mathbf{A} = \det\mathbf{A}$.

***Предложение* 4.1.** *Пусть* $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ – *квадратная вектор-матрица над* $\mathbb{C}$. *Тогда*

$$\mathbf{det}\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{det}\mathbf{A}}, \quad \det\overline{\mathbf{A}} = \overline{\det\mathbf{A}},$$

$$\mathbf{det}\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{det}\mathbf{A}}, \quad \det\mathbf{A}^* = \overline{\det\mathbf{A}}.$$

*Доказательство.* Докажем второе и третье равенства.

Используя соответствующие равенства для обычных матриц, получим:

$$\det\overline{\mathbf{A}} = \det(\overline{A_1, \ldots, A_k}) =$$

$$= \det(\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_k) = \det\overline{A}_1 \ldots \det\overline{A}_k =$$

$$= \overline{\det A_1} \ldots \overline{\det A_k} =$$

$$= \overline{\det A_1 \ldots \det A_k} = \overline{\det\mathbf{A}},$$

то есть верно второе равенство;

$$\mathbf{det}\mathbf{A}^* = \mathbf{det}(A_1, \ldots, A_k)^* =$$

$$= \mathbf{det}(A_1^*, \ \ldots, \ A_k^*) = (\det A_1^*, \ \ldots, \det A_k^*) =$$

$$= (\overline{\det A_1}, \ldots, \overline{\det A_k}) =$$

$$= \overline{(\det A_1, \ldots, \det A_k)} = \overline{\mathbf{det}\mathbf{A}},$$

то есть верно третье равенство.

Первое и четвертое равенства доказываются аналогично. Предложение доказано.

## *5 Полиадические операции на множестве пространственных матриц*

Для обозначения множества всех пространственных матриц размера $m \times n \times p$ над $P$ будем использовать символ $\mathbf{M}_{m\times n\times p}(P)$.

Зафиксируем целое $m \geq 1$ и выделим во множестве всех пространственных матриц над кольцом $P$ три подмножества:

множество $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ всех пространственных матриц, у которых число сечений ориентации $(i)$ равно $m$;

множество $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$ всех пространственных матриц, у которых число сечений ориентации $(j)$ равно $m$;

множество $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$ всех пространственных матриц, у которых число сечений ориентации $(k)$ равно $m$.

Зафиксируем целое $l \geq 2$, подстановку $\sigma \in S_m$, и пусть $P$ – ассоциативное кольцо. Если

$$A_1 = (a_{ijk})_1, A_2 = (a_{ijk})_2, \ldots, A_l = (a_{ijk})_l$$

такие пространственные матрицы из $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$, что число сечений ориентации $(k)$ предыдущей пространственной матрицы равно числу сечений ориентации $(j)$ последующей пространственной матрицы, то определены произведения

$$(a_{1jk})_1(a_{\sigma(1)jk})_2 \ldots (a_{\sigma^{l-2}(1)jk})_{l-1}(a_{\sigma^{l-1}(1)jk})_l = U_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(a_{mjk})_1(a_{\sigma(m)jk})_2 \ldots (a_{\sigma^{l-2}(m)jk})_{l-1}(a_{\sigma^{l-1}(m)jk})_l = U_m.$$

Полагая $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(i)}(m, P)$, где

$$(a_{1jk}) = U_1, \ldots, (a_{mjk}) = U_m,$$

видим, что на $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ определена частичная $l$-арная операция

$$[A_1 A_2 \ldots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} = A = (a_{ijk}), \qquad (5.1)$$

где

$$(a_{rjk}) = (a_{rjk})_1(a_{\sigma(r)jk})_2 \ldots (a_{\sigma^{l-2}(r)jk})_{l-1}(a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l, \quad (5.2)$$

$$r = 1, \ldots, m.$$

Таким образом, для любых целых $p_0 \geq 1$, …, $p_l \geq 1$ и любых пространственных матриц

$$A_1 = (a_{ijk})_1 \in \mathbf{M}_{m\times p_0\times p_1}(P),$$

$$A_2 = (a_{ijk})_2 \in \mathbf{M}_{m\times p_1\times p_2}(P), \ \ldots$$

$$\ldots, A_{l-1} = (a_{ijk})_{l-1} \in \mathbf{M}_{m\times p_{l-2}\times p_{l-1}}(P),$$

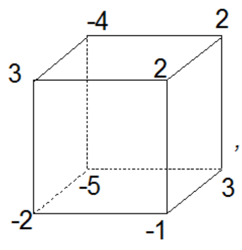
$$A_l = (a_{ijk})_l \in \mathbf{M}_{m\times p_{l-1}\times p_l}(P)$$

определена пространственная матрица (5.1) из $\mathbf{M}_{m\times p_0\times p_l}$, у которой для любого $r = 1, \ldots, m$ $r$-ое сечение ориентации $(i)$ определяется равенством (5.2). Все сечения ориентации $(i)$ пространственной матрицы $A$ являются матрицами размера $p_0 \times p_l$. Ясно, что на множестве $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ частичная $l$-арная операция $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$ совпадает с $l$-арной операцией $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$ из [4].

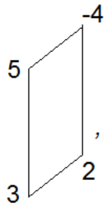
Если в определении частичной $l$-арной операции $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$ заменить ориентацию $(i)$ ориентацией $(j)$, а множество $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ – множеством $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$, то получим определение частичной $l$-арной операции $[\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}$, частным случаем которой является $l$-арная операция $[\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}$ из [4].

Если в определении частичной $l$-арной операции $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$ заменить ориентацию $(i)$ ориентацией $(k)$, а множество $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ – множеством $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$, то получим определение частичной $l$-арной операции $[\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}$, частным случаем которой является $l$-арная операция $[\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}$ из [4].

***Пример* 5.1.** Рассмотрим три пространственные матрицы над $\mathbb{Z}$:

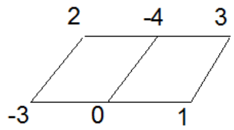
$A = (a_{ijk}) =$  ,

$B = (b_{ijk}) =$




,

$C = (c_{ijk}) =$




соответственно размеров $2 \times 2 \times 2$, $2 \times 2 \times 1$ и $2 \times 1 \times 3$, для которых найдем матрицу

$$D = (d_{ijk}) = [ABC]^{(i)}_{3,\,(12),\,2}.$$

Так как

$$(a_{1jk}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ (a_{2jk}) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$(b_{1jk}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix},\ (b_{2jk}) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$(c_{1jk}) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ (c_{2jk}) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

то, согласно определению операции $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$, имеем

$$(d_{1jk}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

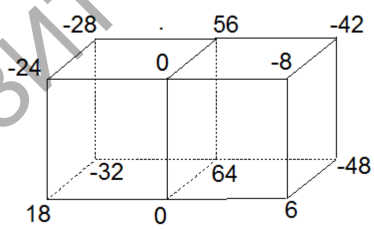
$$= \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 0 & -8 \\ 18 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(d_{2jk}) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 \\ -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 56 & -42 \\ -32 & 64 & -48 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$D = (d_{ijk}) =$




Зафиксируем целое $m \geq 1$ и выделим во множестве $\mathbf{M}(m, P)$ всех $m$-компонентных вектор-матриц над кольцом $P$ множество $\mathbf{K}(m, P)$ всех вектор-матриц, у которых все компоненты имеют один и тот же размер. Заметим, что у разных вектор-матриц из $\mathbf{K}(m, P)$ размеры компонент не обязаны совпадать.

Для каждой вектор-матрицы

$$\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k) \in \mathbf{K}(m, P) \qquad (5.3)$$

положим

$$A_1 = (a_{1jk}), \ldots, A_m = (a_{mjk}), \qquad (5.4)$$

то есть отождествим компоненты вектор-матрицы (5.3) с соответствующими сечениями ориентации ($i$) пространственной матрицы

$$(a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(i)}(m, P). \qquad (5.5)$$

В этом случае отображение

$$\varphi_{(i)}\colon ((a_{1jk}), \ldots, (a_{mjk})) \to (a_{ijk})$$

является биекцией множества $\mathbf{K}(m, P)$ на множество $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$.

Если для вектор-матриц (5.3) положить

$$A_1 = (a_{i1k}), \ldots, A_m = (a_{1mk}), \qquad (5.6)$$

то есть отождествить компоненты вектор-матрицы (5.3) с соответствующими сечениями ориентации ($j$) пространственной матрицы

$$(a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(j)}(m, P), \qquad (5.7)$$

то получим биекцию

$$\varphi_{(j)}\colon ((a_{i1k}), \ldots, (a_{1mk})) \to (a_{ijk})$$

множества $\mathbf{K}(m, P)$ на множество $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$.

Если для вектор-матриц (5.3) положить

$$A_1 = (a_{ij1}), \ldots, A_m = (a_{ijm}), \qquad (5.8)$$

то есть отождествить компоненты вектор-матрицы (5.3) с соответствующими сечениями ориентации ($k$) пространственной матрицы

$$(a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(k)}(m, P), \qquad (5.9)$$

то получим биекцию

$$\varphi_{(k)}\colon ((a_{ij1}), \ldots, (a_{ijm})) \to (a_{ijk})$$

множества $\mathbf{K}(m, P)$ на множество $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$.

Ясно, что сужения отображений $\varphi_{(i)}$, $\varphi_{(j)}$ и $\varphi_{(k)}$ на множество $\mathbf{M}_{s\times t}(m, P)$ всех $m$-компонентных вектор-матриц порядка $s \times t$ над $P$ совпадают с биекциями

$$\varphi_{(i)}\colon \mathbf{M}_{s\times t}(m, P) \to \mathbf{M}_{m\times s\times t}(P),$$
$$\varphi_{(j)}\colon \mathbf{M}_{s\times t}(m, P) \to \mathbf{M}_{s\times m\times t}(P),$$
$$\varphi_{(k)}\colon \mathbf{M}_{s\times t}(m, P) \to \mathbf{M}_{s\times t\times m}(P)$$

из [8].

Ясно, что отображение $\psi_{(i)}$, ставящее в соответствие каждой пространственной матрице (5.5) вектор-матрицу (5.3) с компонентами (5.4), является биекцией $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ на $\mathbf{K}(m, P)$. Аналогично, отображение $\psi_{(j)}$, ставящее в соответствие каждой пространственной матрице (5.7) вектор-матрицу (5.3) с компонентами (5.6), является биекцией $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$ на $\mathbf{K}(m, P)$; отображение $\psi_{(k)}$, ставящее в соответствие каждой пространственной матрице (5.9) вектор-матрицу (5.3) с компонентами (5.8), является биекцией $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$ на $\mathbf{K}(m, P)$.

Имеет место

***Предложение* 5.1.** *Справедливы следующие утверждения:*

1) *для любого $r \in \{i, j, k\}$ отображения $\varphi_{(r)}$ и $\psi_{(r)}$ являются взаимообратными, то есть для любых $\mathbf{A} \in \mathbf{K}(m, P)$, $A \in \mathbf{M}^{(r)}(m, P)$ верны равенства*

$$\psi_{(r)}(\varphi_{(r)}(\mathbf{A})) = \mathbf{A},\ \varphi_{(r)}(\psi_{(r)}(A)) = A;$$

2) *если для вектор-матриц* $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_l \in \mathbf{K}(m, P)$ *определена вектор-матрица* $[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,m}$, *то для любого* $r \in \{i, j, k\}$ *определена пространственная матрица*

$$[\varphi_{(r)}(\mathbf{A}_1) \ldots \varphi_{(r)}(\mathbf{A}_l)\,]^{(r)}_{l,\sigma,m}$$

*и верно равенство*

$$\varphi_{(r)}([\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,m}) = [\varphi_{(r)}(\mathbf{A}_1) \ldots \varphi_{(r)}(\mathbf{A}_l)\,]^{(r)}_{l,\sigma,m};$$

3) *если для пространственных матриц*

$$A_1, \ldots, A_l \in \mathbf{M}^{(r)}(m, P),\ r \in \{i, j, k\}$$

*определена пространственная матрица* $[A_1 \ldots A_l\,]^{(r)}_{l,\sigma,m}$, *то определена вектор-матрица* $[\psi_{(r)}(A_1) \ldots \psi_{(r)}(A_l)]_{l,\sigma,m}$ *и верно равенство*

$$\psi_{(r)}([A_1 \ldots A_l\,]^{(r)}_{l,\sigma,m}) = [\psi_{(r)}(A_1) \ldots \psi_{(r)}(A_l)\,]_{l,\sigma,m}.$$

Следующую теорему можно доказать непосредственно, а можно получить как следствие ассоциативности соответствующей $l$-арной операции на множестве вектор-матриц, используя предложение 5.1.

***Теорема* 5.1.** *Пусть* $P$ *– ассоциативное кольцо,* $r \in \{i, j, k\}$, $\sigma$ *– подстановка из* $S_m$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$, $A_1, A_2, \ldots, A_{2l-1}$ *– пространственные матрицы из* $\mathbf{M}^{(r)}(m, P)$. *Тогда, если для некоторого* $s = 0, 1, \ldots, l-1$ *определена пространственная матрица*

$$[A_1\ldots A_s[A_{s+1}\ldots A_{s+l}\,]^{(r)}_{l,\sigma,m}\, A_{s+l+1}\ldots A_{2l-1}\,]^{(r)}_{l,\sigma,m} \in \mathbf{M}^{(r)}(m,P),$$

*то для любого* $t = 0, 1, \ldots, l-1$ *определена пространственная матрица*

$$[A_1\ldots A_t[A_{t+1}\ldots A_{t+l}\,]^{(r)}_{l,\sigma,m}\, A_{t+l+1}\ldots A_{2l-1}\,]^{(r)}_{l,\sigma,m} \in \mathbf{M}^{(r)}(m,P)$$

*и верно равенство*

$$[A_1 \ldots A_s[A_{s+1} \ldots A_{s+l}\,]^{(r)}_{l,\sigma,m}\, A_{s+l+1} \ldots A_{2l-1}\,]^{(r)}_{l,\sigma,m} =$$
$$= [A_1 \ldots A_t[A_{t+1} \ldots A_{t+l}\,]^{(r)}_{l,\sigma,m}\, A_{t+l+1} \ldots A_{2l-1}\,]^{(r)}_{l,\sigma,m}.$$

Далее $P$ – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

Выделим во множестве $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ множество $\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$ всех пространственных матриц, у которых все сечения ориентации ($i$) являются обратимыми матрицами в $\mathbf{M}_n(P)$. Ясно, что множество $\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$ совпадает с множеством всех пространственных матриц, у которых определители всех сечений ориентации ($i$) являются обратимыми в $P$. Аналогично множеству $\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$ определяются множества $\mathbf{GL}^{(j)}_{n\times m\times n}(P)$ и $\mathbf{GL}^{(k)}_{n\times n\times m}(P)$.

Имеет место

***Теорема* 5.2**. *Если подстановка* $\sigma \in S_m$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то универсальные алгебры* $<\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P), [\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}>$, $<\mathbf{GL}^{(j)}_{n\times m\times n}(P), [\,]^{(j)}_{l,\sigma,m}>$ и $<\mathbf{GL}^{(k)}_{n\times n\times m}(P), [\,]^{(k)}_{l,\sigma,m}>$ *являются неполуабелевыми* $l$*-арными группами, изоморфными* $l$*-арной группе* $<\mathbf{GL}_n(m, P), [\,]_{l,\sigma,m}>$. *Если* $\sigma$ *– нетождественная подстановка, то в этих* $l$*-арных группах нет единиц.*

***Замечание* 5.1.** Теорему 5.2 можно конкретизировать следующим образом. *Сужения отображений* $\varphi_{(i)}$, $\varphi_{(j)}$ и $\varphi_{(k)}$ *на множество* $\mathbf{GL}_n(m, P)$ *являются изоморфизмами* $l$*-арной группы* $<\mathbf{GL}_n(m, P), [\,]_{l,\sigma,m}>$ *вектор-матриц на соответствующие* $l$*-арные группы пространственных матриц из формулировки теоремы* 5.2; *сужения отображений* $\psi_{(i)}$, $\psi_{(j)}$ и $\psi_{(k)}$ *соответственно на те же* $l$*-арные группы пространственных матриц являются их изоморфизмами на* $l$*-арную группу* $<\mathbf{GL}_n(m, P), [\,]_{l,\sigma,m}>$.

Для обозначения косого элемента для пространственной матрицы $A$ из $l$-арной группы $<\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P), [\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}>$ будем использовать символ $A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}}$. Аналогично, $A^{\overline{[\,]^{(j)}_{l,\sigma,m}}}$ – косой элемент для пространственной матрицы $A$ из $l$-арной группы $<\mathbf{GL}^{(j)}_{n\times m\times n}(P), [\,]^{(j)}_{l,\sigma,m}>$; $A^{\overline{[\,]^{(k)}_{l,\sigma,m}}}$ – косой элемент для пространственной матрицы $A$ из $l$-арной группы $<\mathbf{GL}^{(k)}_{n\times n\times m}(P), [\,]^{(k)}_{l,\sigma,m}>$.

Так как при изоморфизме $l$-арных групп косой элемент переходит в косой элемент, то из теоремы 5.2, ввиду замечания 5.1, вытекает

***Следствие* 5.1.** *Пусть подстановка* $\sigma \in S_m$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *если* $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(m, P)$, *то*

$$\varphi_{(i)}(\mathbf{A}^{\overline{[\,]_{l,\sigma,m}}}) = (\varphi_{(i)}(\mathbf{A}))^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}} \in \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P),$$

$$\varphi_{(j)}(\mathbf{A}^{\overline{[\,]_{l,\sigma,m}}}) = (\varphi_{(j)}(\mathbf{A}))^{\overline{[\,]^{(j)}_{l,\sigma,m}}} \in \mathbf{GL}^{(j)}_{n\times m\times n}(P),$$

$$\varphi_{(k)}(\mathbf{A}^{\overline{[\,]_{l,\sigma,m}}}) = (\varphi_{(k)}(\mathbf{A}))^{\overline{[\,]^{(k)}_{l,\sigma,m}}} \in \mathbf{GL}^{(k)}_{n\times n\times m}(P);$$

2) *если*

$A \in \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(P)$, $B \in \mathbf{GL}^{(j)}_{n\times m\times n}(P)$, $C \in \mathbf{GL}^{(k)}_{n\times n\times m}(P)$, *то*

$$\psi_{(i)}(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}}) = (\psi_{(i)}(A))^{\overline{[\,]_{l,\sigma,m}}} \in \mathbf{GL}_n(m, P),$$

$$\psi_{(j)}(B^{\overline{[\,]^{(j)}_{l,\sigma,m}}}) = (\psi_{(j)}(B))^{\overline{[\,]_{l,\sigma,m}}} \in \mathbf{GL}_n(m, P),$$

$$\psi_{(k)}(C^{\overline{[\,]^{(k)}_{l,\sigma,m}}}) = (\psi_{(k)}(C))^{\overline{[\,]_{l,\sigma,m}}} \in \mathbf{GL}_n(m, P).$$

## *6 Сопряженные пространственные матрицы*

***Определение* 6.1**. Пространственная матрица $B = (b_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m\times n\times p}(\mathbb{C})$ называется ($i$)*-комплексно сопряжённой* для пространственной матрицы $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m\times n\times p}(\mathbb{C})$, если все её сечения ориентации ($i$) являются комплексно сопряжёнными матрицами для соответствующих сечений ориентации ($i$) пространственной матрицы $A$, то есть

$$(b_{tjk}) = \overline{(a_{tjk})},\ t = 1, \ldots, m.$$

Аналогично определяются ($j$)*-комплексно сопряжённые* пространственные матрицы и

$(k)$-*комплексно сопряжённые* пространственные матрицы.

Для обозначения $(r)$-комплексно сопряжённой пространственной матрицы для пространственной матрицы $A$, где $r \in \{i, j, k\}$, будем употреблять следующее обозначение:

$$A^{(\bar{\ },\, r)} = (a_{ijk})^{(\bar{\ },\, r)}.$$

***Определение* 6.2**. Пространственная матрица $B = (b_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m\times p\times n}(\mathbb{C})$ называется $(i)$-*эрмитово сопряжённой* для пространственной матрицы $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m\times n\times p}(\mathbb{C})$, если все ее сечения ориентации $(i)$ являются эрмитово сопряжёнными матрицами для соответствующих сечений ориентации $(i)$ пространственной матрицы $A$, то есть

$$(b_{tjk}) = (a_{tjk})^*,\ t = 1, \ldots, m.$$

Аналогично определяются $(j)$-*эрмитово сопряжённые* пространственные матрицы и $(k)$-*эрмитово сопряжённые* пространственные матрицы.

Для обозначения $(r)$-эрмитово сопряжённой пространственной матрицы для пространственной матрицы $A$, где $r \in \{i, j, k\}$, будем употреблять следующее обозначение: $A^{(*,\, r)} = (a_{ijk})^{(*,\, r)}$.

***Предложение* 6.1.** Справедливы следующие утверждения:

1) если вектор-матрица $\mathbf{B}$ комплексно сопряжена (эрмитово сопряжена) с вектор-матрицей $\mathbf{A}$, то для любого $r \in \{i, j, k\}$ пространственная матрица $\varphi_{(r)}(\mathbf{B})$ $(r)$-комплексно сопряжена ($(r)$-эрмитово сопряжена) с пространственной матрицей $\varphi_{(r)}(\mathbf{A})$;

2) если для некоторого $r \in \{i, j, k\}$ пространственная матрица $B$ $(r)$-комплексно сопряжена ($(r)$-эрмитово сопряжена) с пространственной матрицей $A$, то вектор-матрица $\psi_{(r)}(B)$ комплексно сопряжена (эрмитово сопряжена) с вектор-матрицей $\psi_{(r)}(A)$.

Предложение 6.1 можно переформулировать следующим образом.

***Предложение* 6.2.** *Для любого* $r \in \{i, j, k\}$ *и любых* $\mathbf{A} \in \mathbf{K}(m, \mathbb{C})$, $A \in \mathbf{M}^{(r)}(m, \mathbb{C})$ *верны равенства*

$$(\varphi_{(r)}(\mathbf{A}))^{(\bar{\ },\, r)} = \varphi_{(r)}(\overline{\mathbf{A}}),\ \overline{\psi_{(r)}(A)} = \psi_{(r)}(A^{(\bar{\ },\, r)}),$$

$$(\varphi_{(r)}(\mathbf{A}))^{(*,\, r)} = \varphi_{(r)}(\mathbf{A}^*),\ (\psi_{(r)}(A))^* = \psi_{(r)}(A^{(*,\, r)}).$$

***Замечание* 6.1.** Для транспонированных вектор-матриц и транспонированных пространственных матриц имеют место формулы, аналогичные формулам из предложения 6.2:

$$(\varphi_{(r)}(\mathbf{A}))^{(',\, r)} = \varphi_{(r)}(\mathbf{A}'),\ (\psi_{(r)}(A))' = \psi_{(r)}(A^{(',\, r)}).$$

***Теорема* 6.1**. *Пусть подстановка* $\sigma$ *из* $S_m$, *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $r \in \{i, j, k\}$, $A_1, \ldots, A_l$ *– такие пространственные матрицы из* $\mathbf{M}^{(r)}(m, \mathbb{C})$, *что определена пространственная матрица* $[A_1 \ldots A_l]^{(r)}_{l,\sigma,m}$. *Тогда определены пространственные матрицы*

$$[A_1^{(\bar{\ },\, r)} \ldots A_l^{(\bar{\ },\, r)}]^{(r)}_{l,\sigma,m},\ [A_l^{(*,\, r)} \ldots A_1^{(*,\, r)}]^{(r)}_{l,\sigma^{-1},m}$$

*и верны равенства*

$$([A_1 \ldots A_l]^{(r)}_{l,\sigma,m})^{(\bar{\ },\, r)} = [A_1^{(\bar{\ },\, r)} \ldots A_l^{(\bar{\ },\, r)}]^{(r)}_{l,\sigma,m},$$

$$([A_1 \ldots A_l]^{(r)}_{l,\sigma,m})^{(*,\, r)} = [A_l^{(*,\, r)} \ldots A_1^{(*,\, r)}]^{(r)}_{l,\sigma^{-1},m}.$$

*Доказательство.* Последовательно используя 1) из предложения 5.1, 4-ое равенство из предложения 6.2, 3) из предложения 5.1, теорему 1.1, 4-ое равенство из предложения 6.2, 2) из предложения 5.1 и 1) из предложения 5.1, получим

$$([A_1 \ldots A_l]^{(r)}_{l,\sigma,m})^{(*,\, r)} =$$

$$= \varphi_{(r)}(\psi_{(r)}(([A_1 \ldots A_l]^{(r)}_{l,\sigma,m})^{(*,\, r)})) =$$

$$= \varphi_{(r)}((\psi_{(r)}([A_1 \ldots A_l]^{(r)}_{l,\sigma,m}))^*) =$$

$$= \varphi_{(r)}(([\psi_{(r)}(A_1) \ldots \psi_{(r)}(A_l)]_{l,\sigma,m})^*) =$$

$$= \varphi_{(r)}([(\psi_{(r)}(A_l))^* \ldots (\psi_{(r)}(A_1))^*]_{l,\sigma^{-1},m}) =$$

$$= \varphi_{(r)}([\psi_{(r)}(A_l^{(*,\, r)}) \ldots \psi_{(r)}(A_1^{(*,\, r)})]_{l,\sigma^{-1},m}) =$$

$$= [\varphi_{(r)}(\psi_{(r)}(A_l^{(*,\, r)})) \ldots \varphi_{(r)}(\psi_{(r)}(A_1^{(*,\, r)}))]^{(r)}_{l,\sigma^{-1},m} =$$

$$= [A_l^{(*,\, r)} \ldots A_1^{(*,\, r)}]^{(r)}_{l,\sigma^{-1},m},$$

то есть верно второе равенство из формулировки теоремы.

Первое равенство доказывается аналогично. Теорема доказана.

Для теоремы 6.1 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 2.1–2.17 из теоремы 1.1.

***Теорема* 6.2**. *Если подстановка* $\sigma \in S_m$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $A \in \mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(\mathbb{C})$, то

$$(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}})^{(\bar{\ },\, i)} = (A^{(\bar{\ },\, i)})^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}},$$

$$(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}})^{(*,\, i)} = (A^{(*,\, i)})^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma^{-1},m}}},$$

*то есть в* $\mathbf{GL}^{(i)}_{m\times n\times n}(\mathbb{C})$ *операция взятия косого элемента перестановочна и с операцией комплексного сопряжения, и с операцией эрмитового сопряжения.*

*Доказательство*. Последовательно используя 1) из предложения 5.1, 4-ое равенство из предложения 6.2, 4-ое равенство из следствия 5.1, теорему 3.1, первое равенство из следствия 5.1, третье равенство из предложения 6.2 и 1) из предложения 5.1, получим

$$(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}})^{(*,\, i)} = \varphi_{(i)}(\psi_{(i)}((A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}})^{(*,\, i)})) =$$

$$= \varphi_{(i)}((\psi_{(i)}(A^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma,m}}}))^*) = \varphi_{(i)}(((\psi_{(i)}(A))^{\overline{[\,]_{l,\sigma,m}}})^*) =$$

$$= \varphi_{(i)}(((\psi_{(i)}(A))^*)^{\overline{[\,]_{l,\sigma^{-1},m}}}) = (\varphi_{(i)}(\psi_{(i)}(A))^*)^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma^{-1},m}}} =$$

$$= ((\varphi_{(i)}(\psi_{(i)}(A)))^{(*,\, i)})^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma^{-1},m}}} = (A^{(*,\, i)})^{\overline{[\,]^{(i)}_{l,\sigma^{-1},m}}},$$

то есть верно второе равенство из формулировки теоремы. Первое равенство доказывается аналогично. Теорема доказана.

***Замечание* 6.2.** Для теоремы 6.2 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 3.1–3.5 из теоремы 3.1.

***Замечание* 6.3.** Для ориентаций ($j$) и ($k$) справедливы теоремы, аналогичные теореме 6.2.

Напомним [8], что определителем ориентации ($i$) пространственной матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ называется произведение определителей всех ее сечений ориентации ($i$), обозначаемое символом $\det^{(i)}A$; определителем ориентации ($j$) пространственной матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ называется произведение определителей всех ее сечений ориентации ($j$), обозначаемое символом $\det^{(j)}A$; определителем ориентации ($k$) пространственной матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$ называется произведение определителей всех ее сечений ориентации ($k$), обозначаемое символом $\det^{(k)}A$.

Таким образом, если $A = (a_{ijk})$, то, согласно определению,

$$\det{}^{(i)}(a_{ijk})_{m\times n\times n} = \det(a_{1jk})\det(a_{2jk}) \ldots \det(a_{mjk}),$$

$$\det{}^{(j)}(a_{ijk})_{n\times m\times n} = \det(a_{i1k})\det(a_{i2k}) \ldots \det(a_{imk}),$$

$$\det{}^{(k)}(a_{ijk})_{n\times n\times m} = \det(a_{ij1})\det(a_{ij2}) \ldots \det(a_{ijm}).$$

Понятно, что для кубической матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{n\times n\times n}(P)$ определены все три определителя $\det^{(i)}A$, $\det^{(j)}A$ и $\det^{(k)}A$. Полным определителем кубической матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{n\times n\times n}(P)$ называется [8] произведение ее определителей ориентаций ($i$), ($j$) и ($k$), обозначаемое символом $\det A$, то есть

$$\det A = \det{}^{(i)}A\cdot\det{}^{(j)}A\cdot\det{}^{(k)}A.$$

***Предложение* 6.3.** *Пусть* $r \in \{i, j, k\}$, $A$ – *пространственная матрица над* $\mathbb{C}$, *у которой сечения ориентации* ($r$) *являются квадратными. Тогда*

$$\det{}^{(r)}\overline{A} = \overline{\det{}^{(r)}A}, \quad \det{}^{(r)}A^* = \overline{\det{}^{(r)}A}.$$

*Доказательство.* Пусть для определенности $r = i$,

$$A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m\times n\times n}(\mathbb{C}).$$

Согласно определению 6.2, $A^* = (b_{ijk})$, где

$$(b_{tjk}) = (a_{tjk})^*,\ t = 1, \ldots, m.$$

Используя соответствующие бинарные результаты, получим

$$\det{}^{(i)}A^* = \det(a_{1jk})^* \ldots \det(a_{mjk})^* =$$

$$= \overline{\det(a_{1jk})} \ldots \overline{\det(a_{mjk})} =$$

$$= \overline{\det(a_{1jk}) \ldots \det(a_{mjk})} = \overline{\det{}^{(i)}A},$$

то есть верно второе равенство при $r = i$.

Первое равенство для ориентации ($i$) доказывается аналогично.

Аналогично доказываются и оба равенства для ориентаций ($j$) и ($k$). Предложение доказано.

***Следствие* 6.1.** *Если* $A$ – *кубическая матрица над* $\mathbb{C}$, *то*

$$\det \overline{A} = \overline{\det A}, \quad \det A^* = \overline{\det A}.$$

*Доказательство.* Так как

$$\det A^* = \det{}^{(i)}A^* \cdot \det{}^{(j)}A^* \cdot \det{}^{(k)}A^* =$$

$$= \overline{\det{}^{(i)}A} \cdot \overline{\det{}^{(j)}A} \cdot \overline{\det{}^{(k)}A} =$$

$$= \overline{\det{}^{(i)}A \cdot \det{}^{(j)}A \cdot \det{}^{(k)}A} = \overline{\det A},$$

то верно второе равенство.

Первое равенство доказывается аналогично. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Post, E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, №2. – P. 208–350.

2. *Слипенко, А.К.* Абстрактная характеристика матричных оперативов / А.К. Слипенко // Укр. мат. журнал. – 1974. – Т. 26, №1. – С. 112–114.

3. *Гальмак, А.М.* Вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – № 1 (37), серия В. – С. 30–37.

4. *Гальмак, А.М.* Полиадические операции на множестве пространственных матриц / А.М. Гальмак // Веснік ВДУ ім. П.М. Машэрава. – 2011. – № 2 (62). – С. 15–21.

5. *Гальмак, А.М.* Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 52–56.

6. *Гальмак, А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

7. *Гальмак, А.М.* Вектор-определители и определители вектор-матриц / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2 (7). – С. 1–5.

8. *Гальмак, А.М.* О вектор-матрицах и пространственных матрицах / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 75–86.

*Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА – 002).*

*Поступила в редакцию 07.03.12.*