

УДК 517.9:530.182

## РЕЖИМЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ НЕАВТОНОМНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ВНЕШНЕМ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Р.И. Коржик, С.П. Жогаль

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

## THE REGIMES FUNCTIONING OF NON-AUTONOMOUS VAN DER POL OSCILLATOR WITH DELAY AND EXTERNAL HARMONIC EFFECT

R.I. Korzhik, S.P. Zhogal

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Исследованы режимы функционирования неавтономного осциллятора Ван дер Поля с запаздыванием при внешнем гармоническом воздействии. Построены карты режимов функционирования системы с наличием запаздывания и без него.

**Ключевые слова:** осциллятор Ван дер Поля, стационарные состояния, запаздывание, укороченное уравнение, внешнее периодическое воздействие, бифуркации.

The effect of delay on the dynamical regimes of non-autonomous van der Pol oscillator with an external harmonic influence was investigated. The maps of dynamical regimes for oscillator with delay and without delay were presented.

**Keywords:** van der Pol oscillator, stationary states, delays, abridged equation, external periodic effect, bifurcation.

### Введение

В статье [1] было проведено исследование влияния запаздывания на стационарные состояния укороченного уравнения осциллятора Ван дер Поля с внешним гармоническим воздействием. Из модельного уравнения

$$\ddot{x}_t - (\lambda - \beta x_{t-\delta}^2) \dot{x}_{t-\delta} + x_t = b \sin(\omega t) \quad (0.1)$$

была получена система, соответствующая укороченному уравнению:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= (R - R^3) \cos \theta - \varepsilon \cos \phi, \\ \dot{\phi} &= -(1 - R^2) \sin \theta + (\varepsilon / R) \sin \phi - \Delta. \end{aligned} \quad (0.2)$$

При переходе от системы (0.1) к системе (0.2) использовалась замена:

$$\Delta = \frac{\omega^2 - 1}{\lambda \omega}, \quad \varepsilon = \frac{b}{2\omega\lambda\sqrt{\lambda/\beta}}, \quad \theta = \delta\omega. \quad (0.3)$$

В системе (0.1) пять параметров ( $b$  и  $\omega$  – соответственно амплитуда и частота внешнего гармонического воздействия,  $\delta$  – неотрицательное запаздывание,  $\lambda$  и  $\beta$  – управляющие параметры). Такое количество параметров затрудняет исследование системы, поэтому при исследовании системы удобно использовать укороченное уравнение (0.2), в котором параметров уже три.

### 1 Укороченное уравнение осциллятора Ван дер Поля

Для укороченного уравнения построены линии бифуркации (рисунок 1.1). Для каждой из

полученных областей был определен режим функционирования системы в ней.

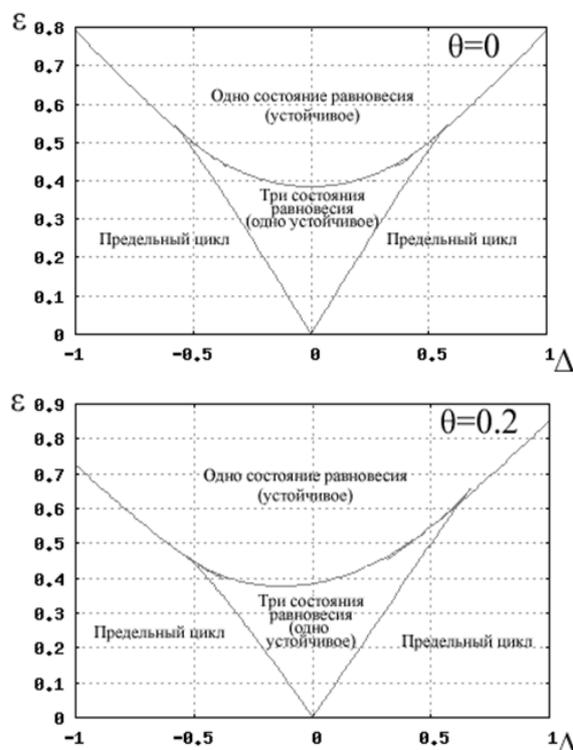


Рисунок 1.1 – Линии бифуркации для укороченного уравнения

На рисунке 1.1 линии бифуркации разделяют плоскость параметров  $\Delta - \varepsilon$  на шесть частей. На рисунке отчетливо видны четыре основные области, для каждой области определен режим функционирования. Подробное описание всех областей можно найти в работе [1].

## 2 Функционирование осциллятора Ван дер Поля при отсутствии запаздывания

Из рисунка 1.1 видно, что во всех областях есть устойчивое состояние равновесия или устойчивый предельный цикл. Это означает, что и в исходном уравнении (0.1) должен наблюдаться периодический режим работы. При помощи численных методов можно построить карту динамических режимов, зафиксировав некоторые параметры. Вид карты динамических режимов с зафиксированными параметрами  $\delta = 0$ ,  $\beta = 1.5$ ,  $b = 0.5$  приведен на рисунке 2.1.

Оттенком серого цвета на рисунке 2.1 обозначена характеристика периода предельного цикла. Так как система подвержена внешнему гармоническому воздействию с периодом  $\frac{2\pi}{\omega}$ , то в целях упрощения тон обозначает не сам период, а его кратность  $\frac{2\pi}{\omega}$ . Белым цветом обозначена область, в которой определить период не удалось (при построении карты производился поиск периода, не превосходящего  $4\frac{2\pi}{\omega}$ ). На рисунке 2.2 приведена кривая в фазовом пространстве с периодом  $2\frac{2\pi}{\omega}$  для  $\lambda = 1.76$ ,  $\omega = 1.71$ . Приведенная фазовая

кривая соответствует области с предельным циклом на рисунке 1.1 ( $\Delta \approx 0.64$ ;  $\varepsilon \approx 0.08$ ).

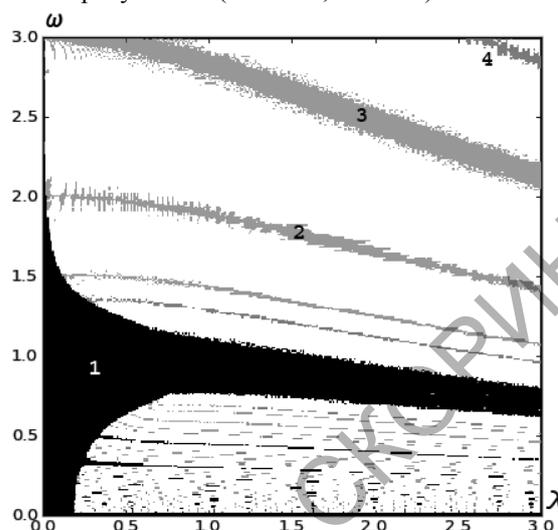


Рисунок 2.1 – Режимы функционирования системы (0.1) в плоскости параметров  $\lambda - \omega$

## 3 Функционирование осциллятора Ван дер Поля при наличии запаздывания

При появлении запаздывания в системе (0.1), т. е. когда  $\delta \neq 0$ , карта режимов функционирования системы будет иной. Для демонстрации этого явления численными методами построена карта динамических режимов при  $\delta \approx 0.5$ . Результат построения приведен на рисунке 3.1. Как и в предыдущем случае, производился поиск циклов с периодом не более  $4\frac{2\pi}{\omega}$ .

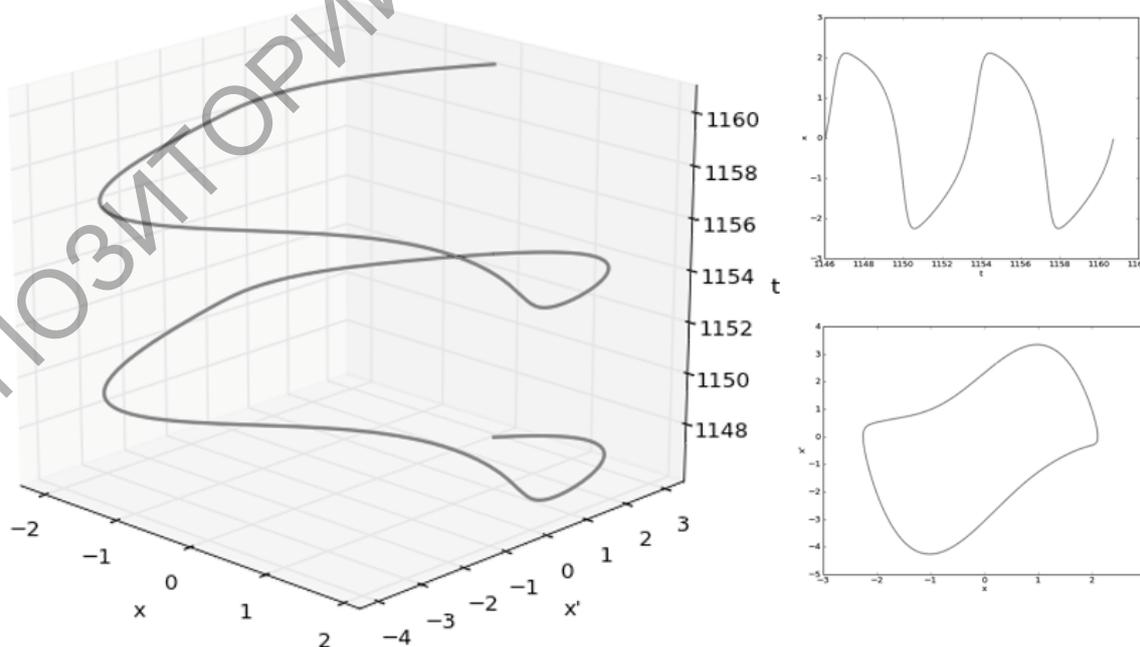


Рисунок 2.2 – Фазовая кривая для системы (0.1) при  $\lambda = 1.76$ ;  $\omega = 1.71$

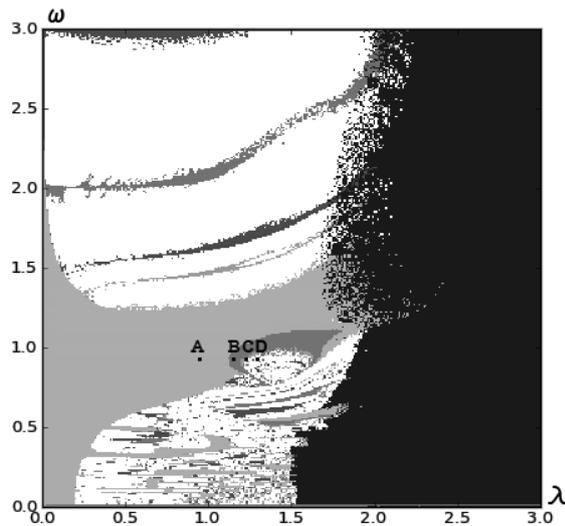


Рисунок 3.1 – Режимы функционирования системы (0.1) в плоскости параметров  $\lambda - \omega$  при  $\delta \approx 0.5$

Как видно из рисунка 3.1, поведение системы значительно изменилось. Появилась новая область, в которой фазовые кривые устремляются в бесконечность (на рисунке 3.1 эта область обозначена черным цветом). В области с периодом

$\frac{2\pi}{\omega}$  появился новый переходный процесс, который в системе без запаздывания не наблюдался (его площадь была незначительной). На рисунке 3.2 приведены фазовые кривые, демонстрирующие этот переходный процесс. В точке А в системе наблюдается цикл с периодом  $\frac{2\pi}{\omega}$ , в точке

В период цикла уже составляет  $2\frac{2\pi}{\omega}$ , в точке С период равен  $4\frac{2\pi}{\omega}$ . Из рисунка и самих значений

периодов видно, что в данной области наблюдается сложная бифуркационная картина. Также следует отметить, что из-за наличия запаздывания фазовое пространство является фактически бесконечномерным, и приведенные фазовые кривые на рисунке 3.2 не являются единственно-возможными. Для построения этих кривых начальные значения брались случайными из интервала (0,5;1,5). Экспериментально удалось найти еще и циклы другого вида. Пример такого цикла приведен на рисунке 3.3.

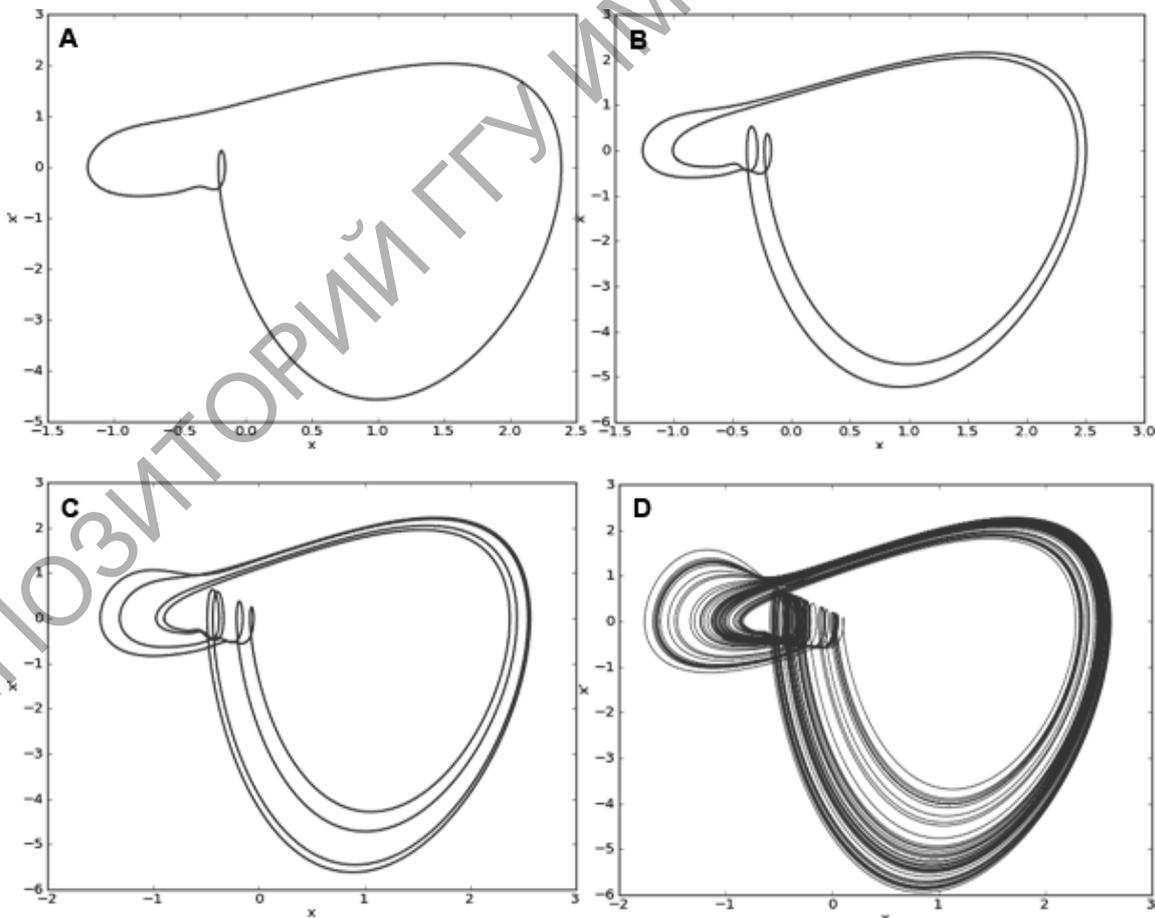


Рисунок 3.2 – Фазовые кривые для осциллятора Ван дер Поля с запаздыванием

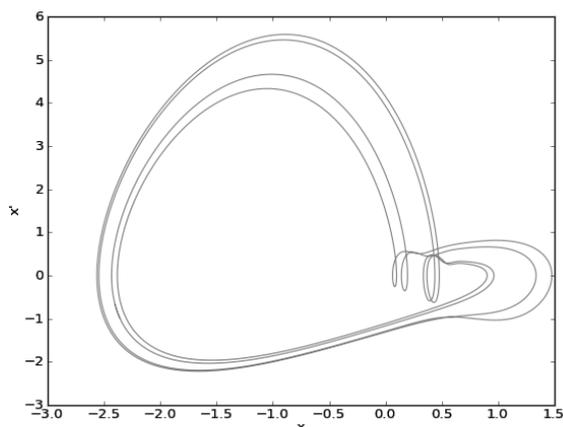


Рисунок 3.3 – Фазовая кривая для осциллятора Ван дер Поля с запаздыванием

Полученные результаты соответствуют результатам исследования системы (0.2), которые приведены в работе [1]. Областям с одним устойчивым состоянием равновесия системы (0.2) соответствует область с периодом  $\frac{2\pi}{\omega}$  системы (0.1). Области с иными периодами (рисунок 2.1, рисунок 3.1) соответствуют областям с предельным циклом (рисунок 1.1). Это объясняется тем, что при получении системы (0.2) производилось усреднение за период  $\frac{2\pi}{\omega}$ . Если взять любой набор параметров, соответствующий белой области на рисунке 3.1 (область, в которой период больше  $4\frac{2\pi}{\omega}$ ), и отобразить на плоскости только

точки, соответствующие значениям  $t = \frac{2\pi}{\omega}k$ , где  $k$  – целое число, то получится цикл (рисунок 3.4).

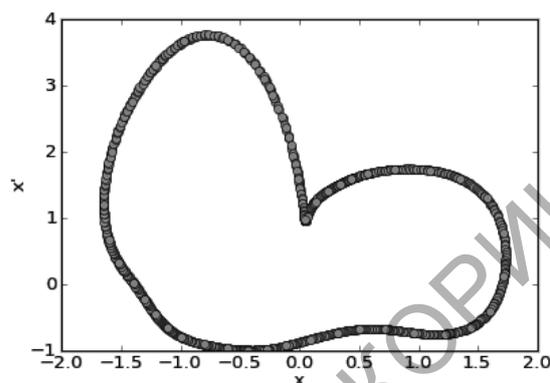


Рисунок 3.4 – Цикл в фазовой плоскости для осциллятора Ван дер Поля с запаздыванием

#### Заключение

Таким образом, на основе проведенных исследований можно сделать вывод, что наличие запаздывания в системе (0.1) приводит к существенному изменению ее динамики в области параметров.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коржик, Р.И. Влияние запаздывания на стационарные состояния неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля / Р.И. Коржик, С.П. Жогаль // Известия Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. – 2010. – № 3 (60). – С. 206–210.

Поступила в редакцию 20.06.12.