Проблемы физики, математики и техники, № 4 (13), 2012

ИНФОРМАТИКА

УДК 681.3.06:624.131

АНАЛИТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ ФУНДАМЕНТОВ

В.Е. Быховцев[1], **В.В. Бондарева**[2], **Д.В. Прокопенко**[1], **С.В. Торгонская**[1]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*
[2]*Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель*

ANALYTICAL ALGORITHM OF CONSTRUCTION AND RESEARCH OF THE MATHEMATICAL MODEL OF NONLINEAR DEFORMATIONS OF THE EARTH BASES OF THE BASES

V.E. Bykhautsau[1], **V.V. Bondareva**[2], **D.V. Prokopenko**[1], **S.V. Torgonskaya**[1]

[1]*F. Scorina Gomel State University, Gomel*
[2]*Belarusian Trade and Economic University of Consumer Cooperatives, Gomel*

В работе грунты рассматриваются как нелинейно-деформируемые твёрдые тела. Закономерность деформационного процесса соответствует аппроксимирующей кривой параболического типа. Особенности аппроксимирующей функции в настоящей работе используются для определения параметров уравнения деформационного процесса. Алгоритм построения и исследования математической модели системы нелинейно-деформируемого грунтового основания разработан на основе принципа минимума полной энергии системы и метода энергетической линеаризации.

Ключевые слова: *деформации грунтов, нелинейные математические модели, алгоритм построения и исследования моделей.*

In the paper soil are considered as nonlinear-deformable firm bodies. Law of deformation process corresponds to an approximating curve of parabolic type. Features of approximating function in the present work are used for definition of parameters of the equation of deformation process. The algorithm of construction and research of mathematical model of system of the nonlinear-deformable earth basis are developed on the basis of the principle of a minimum of full energy of a system and a power linearization method.

Keywords: *deformations soil, nonlinear mathematical models, algorithm of construction and research of models.*

Введение

Характерной особенностью современной строительной индустрии является проектирование и возведение высоких и большепролётных зданий, при этом происходит значительное увеличение нагрузки на несущие элементы конструкции и грунтовое основание, вследствие этого их деформации будут происходить за пределом упругости. В целях обеспечения промышленной безопасности строительных сооружений, возникает необходимость разработки новых методик, методов, алгоритмов и программного обеспечения, учитывающих нелинейность деформирования материала конструктивных элементов здания и грунтового основания на стадии проектирования. Это проблемная многокритериальная задача. Определяющим её критерием является условие устойчивости здания на грунтовом основании как единой нелинейной физической системы. Достаточные условия устойчивости определяются признаком Лагранжа-Дирихле: в устойчивом состоянии равновесия потенциальная энергия системы имеет минимум (энергетический критерий) [1]. Функционал полной энергии системы содержит уравнение деформирования материала конструктивных элементов физической системы. В физическом плане деформационный процесс элемента системы представляется монотонно возрастающей функцией, имеющей экстремум (максимум) и нулевое начальное значение деформации, т. е. на интервале допустимых нагрузок это будет кривая параболического типа. Указанные особенности аппроксимирующей функции в настоящей работе используются для определения её параметров.

1 Структура и закономерности деформирования грунтов

Грунтами называют рыхлые горные породы, слагающие верхние слои земной коры, образованные в результате выветривания. Именно эта особенность, рыхлость, является определяющей характеристикой грунтов как природных тел при оценке их в качестве оснований фундаментов зданий и сооружений [2], [5]. Структурно грунтовые основания представляют собой весьма сложные напластования различных грунтовых слоев, линз, включений и вклиниваний, которые могут находиться на различной глубине от поверхности, что является осложняющим фактором при оценке грунтов как оснований фундаментов.

Геометрические и физико-механические характеристики и законы деформирования каждого из указанных элементов структуры могут быть самые разнообразные.

Основными свойствами грунтовых оснований являются их сжимаемость (закон уплотнения), водопроницаемость (закон ламинарной фильтрации), контактная сопротивляемость сдвигу (условие прочности) и структурно-фазовая деформируемость (принцип линейной деформируемости) [5]. Принцип линейной деформируемости для грунтов заключается в том, что при небольших изменениях давлений грунты можно рассматривать как линейно деформируемые тела.

При действии внешних сил на грунты как природные минерало-дисперсные дискретные образования возникают как общие деформации, присущие всем сплошным телам, так и деформации, обусловленные взаимными перемещениями отдельных зёрен грунтов и их твёрдых минеральных частиц [5]. Если при действии внешних сил прочность структурных связей между минеральными частицами грунтов не нарушается, то грунты будут деформироваться как сплошные тела; в противном случае деформации будут определяться, главным образом, перемещениями отдельных зёрен грунтов. Поэтому, кроме общих закономерностей, которым подчиняются деформации сплошных тел, для грунтов будет ещё ряд особенностей и закономерностей, обусловленных их природой. Эти закономерности, рассмотренные совместно с уравнениями теоретической механики и механики деформируемых сплошных тел, дают систему зависимостей, достаточную для решения задач механики грунтов, оснований и фундаментов. В теории упругости показано [1], [4], что для изотропного тела все коэффициенты упругости могут быть выражены через две упругие характеристики: модуль нормальной упругости E и коэффициент относительной поперечной деформации μ (коэффициент Пуассона). По многочисленным экспериментальным данным зависимость между напряжением и деформацией для многих тел, в том числе и для грунтов, является нелинейной [2], [5].

2 Механико-математические модели деформирования грунтов

Физико-механические свойства любого деформируемого твёрдого тела определяют его состояние под нагрузкой. Характер и особенности деформационного процесса описываются аналитически или дискретно. Для любого деформируемого твёрдого тела, в том числе элементов структуры грунтового основания, при упругой стадии работы имеет место соотношение (закон Гука)

$$\sigma_i = E\varepsilon_i, \qquad (2.1)$$

где σ_i, ε_i – интенсивности напряжений и деформаций.

В этом случае достаточно двух физико-механических характеристик: линейного модуля деформации E и коэффициента Пуассона μ. Существует несколько хорошо отработанных методик их определения [5].

Как следует из многочисленных экспериментов, в физическом плане процесс деформирования твёрдых тел представляется монотонно возрастающей функцией, имеющей экстремум (максимум) и нулевое начальное значение деформации. Для всех твердых тел

$$\varepsilon_i\big|_{\sigma_i = 0} = 0 . \qquad (2.2)$$

Экстремум соответствует переходу в пластическое состояние деформируемого тела. Нагрузка, соответствующая этому экстремуму, называется предельной нагрузкой, до которой реальное нагружение не должно доходить. Реальные нагрузки на деформируемое тело задаются в интервале $[0, P_{пред.}]$. В теоретических исследованиях аппроксимация деформационного процесса в указанном интервале нагрузок может быть представлена некоторой кривой параболического типа. Касательная к кривой деформирования в точке $O(0,0)$ будет выражать закон линейного деформирования твёрдого тела (2.1).

Рассматривая в качестве деформируемых твёрдых тел грунты, следует отметить, что строительные нормы и правила содержат все основные физико-механические характеристики грунта, методика которых хорошо отработана. Поэтому *актуальной является задача определения параметров принимаемой формы закона деформирования на основании нормативных характеристик грунтов, содержащихся в строительных нормах и правилах.*

3 Определение параметров закона деформирования параболического типа

Результаты компьютерного моделирования ряда задач механики грунтов, для которых имелись результаты экспериментальных исследований, показали, что погрешность аппроксимации экспериментальных данных получается меньше при законе деформирования в форме

$$\sigma_i^{н} = A\varepsilon_i^{н} - B(\varepsilon_i^{н})^m; \; A > 0; \; m > 1, \; B > 0. \qquad (3.1)$$

Эта функция в точке (0,0) имеет касательную, которая будет являться графиком закона линейного деформирования. Максимум этой функции будет соответствовать предельному состоянию деформируемого твёрдого тела. Эти данные используем при определении параметров закона деформирования в форме (3.1).

Для функции $y = f(x)$ уравнение касательной в т. $P(x_0, y_0)$ будет иметь вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

следовательно, для уравнения (3.1) получим

$$\sigma_i^{н} - f(e_{i,0}^{н}) = f'(e_{i,0}^{н})(e_i^{н} - e_{i,0}).$$

Учитывая закономерность деформационного процесса (2.2), из (3.1) получим $f'(e^{н}_{i,0}) = A$, следовательно, для уравнения (3.1) уравнение касательной в точке (0,0) будет

$$\sigma_i^{н} = Ae_i^{н}.$$

Это уравнение описывает процесс линейного деформирования (2.1), поэтому $A = E$ и выражение (3.1) примет вид

$$\sigma_i^{н} = E\varepsilon_i^{н} - B(\varepsilon_i^{н})^m;\ m > 1,\ B > 0. \qquad (3.2)$$

Для нелинейных деформаций всякий секущий модуль $E^* < E$. Это утверждение следует также из (3.2):

$$E^* = \sigma_i^{н} / e_i^{н} = E - B(e_i^{н})^{m-1},$$

что полностью соответствует физическому процессу.

Условие максимума для (3.2) дает:

$$\sigma_i' = E - mB\varepsilon_{i,\max}^{m-1} = 0, \qquad (3.3)$$

откуда:

$$\varepsilon_{i,\max} = \left(\frac{E}{mB}\right)^{\frac{1}{m-1}}. \qquad (3.4)$$

Подставив (3.4) в (3.2), будем иметь:

$$E\left(\frac{E}{mB}\right)^{\frac{1}{m-1}} - B\left(\frac{E}{mB}\right)^{\frac{m}{m-1}} = \sigma_{i,\max}. \qquad (3.5)$$

После ряда несложных преобразований из (3.5) получим

$$B = \frac{\sigma_{i,\max}}{m-1}\left(\frac{(m-1)\,E}{m\,\sigma_{i,\max}}\right)^m, \qquad (3.6)$$

где $\sigma_{i,\max}$ – предельное напряжение для рассматриваемого элемента грунта.

Учитывая полученное выражение, закон деформирования получим в следующем общем виде

$$\sigma_i^{н} = \mathrm{E}\varepsilon_i^{н} - \frac{\sigma_{i,\max}}{m-1}\left(\frac{(m-1)\,E\,\varepsilon_i^{н}}{m\,\sigma_{i,\max}}\right)^m. \qquad (3.7)$$

Принимая во внимание, что при нагрузке $P \le P_{кр}$ процесс деформирования близок к линейному и будет характеризоваться модулем упругости $E^* = \alpha E$, можем записать

$$\sigma_{i,\,кр} = E^*\varepsilon_{i,кр} \equiv \alpha E\varepsilon_{i,кр},\ \ 0 < \alpha < 1,$$

откуда следует

$$\varepsilon_{i,кр} = \frac{\sigma_{i,\,кр}}{\alpha E}, \qquad (3.8)$$

где $\sigma_{i,\,кр}$ – напряжение, до которого грунт деформируется квазилинейно.

Для уравнения (3.2), согласно методу энергетической линеаризации [2] (см. п. 4), имеет место соотношение

$$\sigma_i^{e} = E\varepsilon_i^{н} - \frac{2}{1+m}B(\varepsilon_i^{н})^m;\ m > 1,\ B > 0.$$

Подставив (3.8) в это уравнение, после ряда преобразований, будем иметь

$$B = (1-\alpha)\frac{1+m}{2}\left(\frac{\alpha\,E}{\sigma_{i,\,кр}}\right)^{m-1} E. \qquad (3.9)$$

Рассматривая совместно (3.6) и (3.9), после ряда преобразований, получим

$$\frac{m-1}{m\,\alpha}\left(\frac{2}{m\,(1+m)(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{m-1}} = \sigma_i^{\wedge}, \qquad (3.10)$$

где $\sigma_i^{\wedge} = \dfrac{\sigma_{i,\max}}{\sigma_{i,\,кр}}$.

Критическое $\sigma_{i,кр}$ и предельное $\sigma_{i,\max}$ напряжения определяются на основании теории предельного равновесия и нормативных физико-механических характеристик грунта или принимаются по экспериментальным данным [2], [5]. Для каждой экспериментальной зависимости с допустимым приближением можно установить значение $\sigma_{i,кр}$. Методом компьютерного объектно-ориентированного моделирования на основании проведенного анализа результатов экспериментальных исследований ряда реальных задач механики грунтов были разработаны следующие эмпирические формулы для определения $\sigma_{i,кр}$ и $\sigma_{i,\max}$:

$$\sigma_{i,\max} = \frac{1-2\mu}{4\pi}\cdot E,\ \ \sigma_{i,кр} = \frac{(1-2\mu)^2}{8\pi}\cdot E. \qquad (3.11)$$

Значение коэффициента Пуассона μ можно определить по формуле [1], [6]

$$\mu = \frac{1-\sin\phi}{2-\sin\phi}, \qquad (3.12)$$

где φ – угол внутреннего трения.

Проведенный вычислительный эксперимент показал, что для определения α может быть использовано выражение $\alpha = 1 - \dfrac{\sigma_{i,кр}}{\sigma_{i,\max}}\mu.$

Из (3.10) параметр *m* определяется итерационно и далее из (3.6) или (3.9) находится параметр *B*. Этим самым параметры закона деформирования в форме двучлена степени *m* (3.2) определены полностью, что даёт возможность решать задачи по расчёту нелинейных деформаций грунта на основании его нормативных характеристик, содержащихся в строительных нормах и правилах.

4 Подходы к исследованию нелинейных деформаций грунтов

Системный подход. Совершенствование методов расчета грунтовых оснований и применение компьютерных технологий позволяет подойти к расчету оснований с общих позиций и учесть достаточно большое количество факторов, которые ранее не могли быть учтены в связи с возникающими математическими трудностями [1]–[4]. Стало возможным учесть многие особенности структуры оснований, нелинейность деформирования каждого ее элемента и др. Все это в целом дает возможность рассматривать грунтовые основания как *произвольную* неоднородную нелинейно-деформируемую среду с произвольными законами деформирования каждого ее элемента. В настоящей работе предметом исследования является сложная нелинейная физическая система, элементами которой являются грунтовое основание, фундаменты в плане здания и конструкция здания в целом, соответствующая реальной физической системе. Указанная система исследуется в соответствии с принципами системного подхода, суть которого состоит во взаимосвязанном рассмотрении всех элементов (подсистем) системы. При системном подходе система рассматривается не изолированно, а как подсистема более общей системы (системы более высокого ранга). Основным при системном подходе является определение цели, например, условие предельного равновесия деформируемой среды. Для каждой цели должен быть выбран свой надёжный критерий устойчивости. Например, для деформируемых систем это может быть удовлетворение принципа стационарности полной энергии системы. Это позволяет подойти к исследованию систем на довольно содержательном уровне. Наполнение системы определяет ее предметную направленность, и этим предопределяют методологию и технологию ее исследования.

Метод энергетической линеаризации. Метод энергетической линеаризации ориентирован для расчёта напряжённо-деформированного состояния изотропных нелинейно-деформируемых твёрдых тел в стадии активного нагружения [2, С. 114]. Уравнение закона деформирования твёрдого тела в общем случае представим в виде:

$$\sigma_i = f(**)\varepsilon_i, \tag{4.1}$$

где $f(**)$ – функция модуля упругости при нелинейном деформировании, ** – совокупность параметров, определяющих значение модуля упругости; при линейном деформировании $f(**) = E,\ E$ – модуль упругости.

Начальное значение модуля упругости $E = E_0$ и коэффициента Пуассона $\mu = \mu_0$.

Твёрдому телу объёма V с границей Γ и законом деформирования (4.1) поставим в соответствие геометрически тождественное гипотетическое линейно-упругое тело с законом деформирования

$$\sigma_i^r = E^r \varepsilon_i. \tag{4.2}$$

Модуль упругости E^r подлежит определению и должен быть таким, чтобы при тождественных граничных условиях для обоих тел их смещения совпадали. В соответствии с принципом возможных перемещений для всякой сплошной среды

$$\delta\left(\int_V \Pi dV - W\right) = 0, \tag{4.3}$$

где Π – потенциал деформации, W – работа внешних сил.

Для единичного элемента

$$\Pi = \frac{\varepsilon^2}{6k} + \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i, \quad k = \frac{1-2\mu}{E},$$

где ε – средняя деформация, k – коэффициент объемного сжатия.

В силу поставленного условия для модуля упругости E^r гипотетического линейно-упругого тела и тождественности граничных условий для рассматриваемых твёрдых тел можно утверждать, что работы внешних сил на смещениях для исследуемого нелинейно-деформируемого твёрдого тела и гипотетического линейно-упругого тела будут равны, т. е. будем иметь $W^n = W^r$, тогда

$$\delta\int_v (\Pi^n - \Pi^r)\, dV =$$

$$= \delta\int_v \left(\int \sigma_i^n d\varepsilon_i - \int \sigma_i^n d\varepsilon_i\right) =$$

$$= \delta\int_v \left(\int f(**)\,\varepsilon_i d\varepsilon_i - E^r \int \varepsilon_i d\varepsilon_i\right) dV = 0,$$

где Π^n – энергия деформации нелинейно-упругого тела, Π^r – энергия деформации гипотетического линейно-упругого тела, индексы “n” и “r” – признаки нелинейно-упругого и гипотетического линейно-упругого тела.

Полученное выражение представим в следующей форме

$$\begin{aligned} &\delta\int_v \left(f(**)\varepsilon_i d\varepsilon_i - E^r \int \varepsilon_i d\varepsilon_i\right) dV = \\ &= \int_v \left(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i^{-1} \int f(**)\varepsilon_i d\varepsilon_i - E^r \int \varepsilon_i d\varepsilon_i\right) dV = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Введём обозначение

$$F(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^{-1} \int f(**)\,\varepsilon_i d\varepsilon_i,$$

тогда из (4.4), после ряда несложных преобразований, учитывая (4.2), получим:

$$\begin{aligned} &\delta\int_v \varepsilon_i \left(F(\varepsilon_i) - \frac{\sigma_i^r}{2}\right) dV = \\ &= \int_v \delta\varepsilon_i \left(F(\varepsilon_i) - \frac{\sigma_i^r}{2}\right) dV = 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

В соответствии с основной леммой вариационного исчисления из (4.5) следует:

$$F(\varepsilon_i) - \frac{\sigma_i^r}{2} = 0. \tag{4.6}$$

Если уравнение закона деформирования твёрдого тела (4.1) имеет вид (3.7)

$$\sigma_i^н = \mathrm{E}\varepsilon_i^н - \frac{\sigma_{i,\max}}{m-1}\left(\frac{(m-1)\,E\,\varepsilon_i^н}{m\,\sigma_{i,\max}}\right)^m, \tag{4.7}$$

то $\varepsilon_i^н$ и гипотетический модуль деформации E^r определяются из уравнений:

$$\varepsilon_i^{н} - \frac{2\sigma_{i,\max}}{(m^2-1)\,E}\left(\frac{(m-1)\,E\,\varepsilon_i^{н}}{m\,\sigma_{i,\max}}\right)^m = \varepsilon_i^e,$$

$$E^r = \frac{\sigma_i^e}{\varepsilon_i^{н}}.$$

Параметры m и B определяются согласно (3.9)–(3.12).

Коэффициент Пуассона μ также является величиной переменной. Его значение определим исходя из закона изменения объема, согласно которому модуль объемной деформации остается постоянной величиной как в пределах так и за пределами упругости:

$$\frac{E_0}{1-2\mu_0} = \frac{E^r}{1-2\mu^*},$$

где μ, μ* – постоянный и переменный коэффициенты Пуассона.

Из полученного выражения следует:

$$\mu^* = 0,5 - \frac{E^r}{E_0}(0,5-\mu),$$

Для полученных значений E^r и μ* решается еще раз линейная задача, решение которой, согласно принятым условиям, будет являться и решением исходной нелинейной задачи.

Таким образом, предложенный метод позволяет решить нелинейную краевую задачу за два прохода.

Значительной особенностью метода энергетической линеаризации является возможность использования принципа независимости действия сил при решении нелинейных задач. Это возможно вследствие того, что этот метод устанавливает функциональную связь решений, полученных при условии линейного и нелинейного деформирования элементов исследуемой системы.

Методика исследования деформаций грунтовых оснований методом энергетической линеаризации. Учитывая произвольность постановки задачи, решать ее следует методом конечных элементов в сочетании с методом энергетической линеаризации.

Решение линейных задач теории упругости методом конечных элементов сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\{U\} = \{P\},$$

где $[K]$ – матрица жесткости системы, $\{P\}$ – вектор узловых сил, $\{U\}$ – вектор узловых перемещений.

Метод энергетической линеаризации является двухпроходным. Краевой задаче нелинейной теории упругости ставится в соответствие краевая задача линейной теории упругости.

Алгоритм решения поставленной задачи методом конечных элементов в сочетании с методом энергетической линеаризации может быть представлен следующим образом:

1. Для структурных элементов реального нелинейно-деформируемого грунтового основания должны быть заданы параметры уравнения состояния, модуль упругости E_0 и коэффициент Пуассона μ_0, соответствующие начальному деформированию (считается линейным), а также значение критического и предельного напряжений или данные для их расчета.

2. Для параметров E_0 и μ_0 решается линейная задача.

На основе полученного решения вычисляются напряжения, деформации, модуль упругости E^r и коэффициент Пуассона μ^r для гипотетического (эквивалентного) основания. Формируется новая матрица жесткости.

3. Для характеристик E^r и μ^r опять решается линейная задача. Полученное решение будет искомым.

Таким образом, метод энергетической линеаризации позволяет решить нелинейную задачу за два прохода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон, В.З.* Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 688 с.

2. *Быховцев, В.Е.* Компьютерное объектно-ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твёрдых тел / В.Е. Быховцев. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007. – 219 с.

3. *Зенкевич, О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 540 с.

4. *Журавков, М.А.* Математическое моделирование деформационных процессов в твёрдых деформируемых средах / М.А. Журавков. – Мн. : БГУ, 2002. – 456 с.

5. *Цытович, Н.А.* Механика грунтов / Н.А. Цытович. – М. : Стройиздат, 1963. – 542 с.

6. *Никитенко, М.И.* Буроинъекционные анкеры и сваи при возведении и реконструкции зданий и сооружений / М.И. Никитенко. – Мн. : БНТУ, 2007. – 580 с.

Поступила в редакцию 10.02.12.