МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53

ЭРМИТОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДВУХ ЭКСПОНЕНТ

Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов, Г.Н. Казимиров

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

HERMITIAN APPROXIMATION OF TWO EXPONENTS

N.V. Rjabchenko, A.P. Starovoitov, G.N. Kazimirov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Для системы, состоящей из функций $\{e^{z}, e^{2z}\}$, изучаются асимптотические свойства диагональных аппроксимаций Паде–Эрмита $\{\pi^{j}_{2n,2n}(z;e^{j\xi})\}^{2}_{j=1}$. В частности, для любого комплексного числа z найдены асимптотики поведения разностей $e^{jz}-\pi^{j}_{2n,2n}(z;e^{j\xi})$ при $j=1,2$ и $n\to\infty$. Полученные результаты дополняют исследования Эрмита, Паде, Перрона, Д. Браесса и А.И. Аптекарева, относящиеся к изучению сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы экспонент.

***Ключевые слова**: совершенная система функций, совместные аппроксимации Паде, аппроксимации Паде-Эрмита, асимптотические равенства, интегралы Эрмита.*

We study the asymptotic properties of diagonal Pade–Hermite approximants $\{\pi^{j}_{2n,2n}(z;e^{j\xi})\}^{2}_{j=1}$ for a system consisting of functions $\{e^{z}, e^{2z}\}$. In particular, we determine the asymptotic behavior of the differences $e^{jz}-\pi^{j}_{2n,2n}(z;e^{j\xi})$ for $j=1,2$ and $n\to\infty$ for any complex number z. The obtained results supplement research of Pade, Perron, Braess and A.I. Aptekarev dealing with the study of the convergence of joint Pade approximants for systems of exponents.

***Keywords**: perfect system of functions, joint Pade approximant, Pade-Hermite approximants, asymptotic equality, Hermite integrals.*

Введение

Рассмотрим набор

$$f_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k^j z^k,\ \ j=1,2,\dots,r \qquad (0.1)$$

голоморфных в нуле функций или формальных степенных рядов. Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа $n, m_1, m_2, \dots, m_r$. Обозначим

$$\sum_{j=1}^{r} m_j = m,\ \ n_j = n+m-m_j,\ \ j=1,2,\dots,r.$$

Известно [1], что при $j=1,2,\dots,r$ существуют такие многочлены $Q_m(z)$, $P^j_{n_j}(z)$, $deg\,Q_m\le m$, $deg\,P^j_{n_j}\le n_j$, для которых

$$R^j_{n,m}(z)=Q_m(z)f_j(z)-P^j_{n_j}(z)=A_j z^{n+m+1}+\dots. \qquad (0.2)$$

Если $r=1$, то согласно теореме Паде [2, теорема 1.1.1] многочлены $Q_m(z)$, $P^1_n(z)$ определяются с точностью до однородной константы, а их отношение задает единственную рациональную функцию

$$\pi_{n,m}(z,f_1)=\frac{P^1_n(z)}{Q_m(z)},$$

которую называют аппроксимацией Паде для $f_1(z)$.

При $r\ge 2$ дроби

$$\pi^j_{n,m}(z)=\pi^j_{n_j,m}(z,f_j)=\frac{P^j_{n_j}(z)}{Q_m(z)},\ \ j=1,2,\dots,r$$

условиями (0.2) определяются, вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества $\{\pi^j_{n,m}(z)\}^r_{j=1}$ его элементы называют совместными аппроксимациями Паде для системы функций (0.1). Единственность, в частности, имеет место для совершенных систем функций (определение и примеры совершенных систем функций см. в [1], [3]–[7]). Совершенной, в частности, является система экспонент

$$f_j(z)=e^{\lambda_j z},\ \ j=1,2,\dots,r,$$

где $\{\lambda_j\}^r_{j=1}$ – различные комплексные числа [1, теорема 2.1]. Без формального определения этот факт был установлен еще Ш. Эрмитом [8]. Именно при доказательстве трансцендентности числа e Эрмит [8], [9] ввел в рассмотрение интегралы

$$M=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^{\infty}\left[x\prod_{i=1}^{r}(x-i)\right]^{p-1}e^{-x}dx,$$

$$M_j=\frac{1}{(p-1)!}\int_j^{\infty}\left[x\prod_{i=1}^{r}(x-i)\right]^{p-1}e^{-x}dx, \qquad (0.3)$$

$$\varepsilon_j=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^{j}\left[x\prod_{i=1}^{r}(x-i)\right]^{p-1}e^{-x}dx,$$

которые при некотором простом числе p дают удобное приближение к набору $\{e^j\}_{j=1}^r$:

$$e^j - \frac{M_j}{M} = \frac{\varepsilon_j}{M}, \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Интегралы Эрмита (0.3) после небольших преобразований [1], [10] приводят к решению системы (0.2) для набора экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^r$:

$$Q_m(z) = \frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\infty}\left[x^n \prod_{i=1}^r (x-\lambda_i)^{m_i}\right]e^{-zx}dx,$$

$$P_{n_j}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_{\lambda_j}^{\infty}\left[x^n \prod_{i=1}^r (x-\lambda)^{m_i}\right]e^{-zx}dx, \quad (0.4)$$

$$R_{n,m}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\lambda_j}\left[x^n \prod_{i=1}^r (x-\lambda_i)^{m_i}\right]e^{-zx}dx.$$

В первых двух интегралах (0.4) интегрирование осуществляется по контуру, идущему в $+\infty$ и $\operatorname{Re} z > 0$. При $\operatorname{Re} z \le 0$ значения $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$ находятся с помощью аналитического продолжения. В интеграле, определяющем $R_{n,m}^j(z)$, интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j.

Для одной $(r=1)$ экспоненты e^z явный вид числителя и знаменателя $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ получил Паде [11]. Опираясь на полученные представления, Паде доказал, что при $\frac{n}{m} \to \gamma$, $0 \le \gamma \le +\infty$ на компактах $\mathbb{C}$ дроби $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ равномерно сходятся к e^z. О. Перрон [12] обобщил результаты о сходимости $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ к e^z, доказав ее при $n+m \to \infty$. Основываясь на результатах численного эксперимента, Г. Мейнардус сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z - \pi_{n,m}(z;e^{\xi})$. Гипотеза Г. Мейнардуса была доказана Д. Браессом [13] (подробнее см. [14]): для любого комплексного z при $n+m \to \infty$

$$e^z - \pi_{n,m}(z;e^{\xi}) =$$
$$= \frac{(-1)^m n! m! e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!(n+m+1)!} z^{n+m+1} \; (1+o(1)).$$

Е.М. Никишиным была поставлена задача об исследовании сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы экспонент. Ее решение было получено А.И. Аптекаревым [10], который доказал, что при $n+m \to \infty$ для любого $j = 1, 2, \ldots, r$ $\pi_{n_j,m}^j(z;e^{\lambda_j \xi})$ сходится равномерно на компактах в $\mathbb{C}$ к $e^{\lambda_j z}$. Для этого в [10] был установлен следующий аналог леммы Перрона [12], доказывающий сходимость $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ к e^z: для любых n, m_j

$$\left| Q_m(z) - \exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^r \lambda_j m_j}{n+m} z\right\}\right| \le$$

$$\le \frac{\left|z\sum_{j=1}^r |\lambda_j|\right|^2}{n+m}\left\{\exp\left|z\sum_{j=1}^r |\lambda_j|\right|\right\},$$

где $Q_m(z)$ – знаменатель совместных аппроксимаций Паде к $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^r$. Из этого неравенства следует, что при $n+m \to \infty$ для любого $z \in \mathbb{C}$

$$Q_m(z) = \exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^r \lambda_j m_j}{n+m} z\right\}(1+o(1)). \quad (0.5)$$

В данной работе исследуется асимптотика поведения совместных аппроксимаций Паде для систем из двух экспонент $\{e^z, e^{2z}\}$ при $n = m_1 = m_2$. Как уже отмечалось выше, именно этот диагональный случай рассматривался Эрмитом при доказательстве трансцендентности числа *e*. Основным результатом работы является следующая

***Теорема* 0.1.** *Пусть $\{e^z, e^{2z}\}$ – набор из двух экспонент. Тогда для любого комплексного z при $n = m_1 = m_2$ и $n \to \infty$*

$$e^z - \pi_{2n,2n}^1(z;e^{\xi}) =$$
$$= \frac{z^{3n+1}}{2\cdot(3n)!} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) e^{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)z}(1+o(1)),$$
$$e^{2z} - \pi_{2n,2n}^2(z;e^{2\xi}) =$$
$$= \frac{z^{3n+1}}{2\cdot(3n)!} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) e^{2z}\left\{e^{\frac{z}{\sqrt{3}}} + (-1)^n e^{-\frac{z}{\sqrt{3}}}\right\}(1+o(1)),$$

где $B(\cdot,\cdot)$ – бета-функция Эйлера.

1 Предварительные результаты

***Лемма* 1.1.** *При выполнении условий теоремы 0.1 равномерно по всем $|z| \le M$ при $n \to \infty$*

$$R_{2n,2n}^1(z) =$$
$$= \frac{z^{3n+1}}{2\cdot(3n)!} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) e^{\sqrt{n/(3n+2)}\,z}(1+o(1)). \quad (1.1)$$

Доказательство. Из (0.4) следует, что

$$R_{2n,2n}^1(z) = \frac{e^z z^{3n+1}}{(3n)!}\int_0^1 x^n (x-1)^n (x-2)^n e^{-zx} dx.$$

В интеграле

$$I_1(z) = \int_0^1 x^n (x-1)^n (x-2)^n e^{z(1-x)} dx$$

сделаем замену $x = 1-u$. В результате получим

$$I_1(z) = \int_0^1 (1-u^2)^n u^n e^{zu} du.$$

При $j = 0, 1, 2, \ldots$ рассмотрим интегралы

$$J_1^j(z) = \int_0^1 (1-u^2)^n u^n u^j du.$$

Тогда

$$J_1^0 = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-u^2)^n (u^2)^{(n-1)/2} du^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{(n-1)/2}(1-t)^n dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right). \quad (1.2)$$

Аналогично

$$J_1^1 = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-u^2)^n (u^2)^{n/2} du^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{n/2}(1-t)^n dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{n}{2}+1, n+1\right). \quad (1.3)$$

Подберем теперь u_0 так, чтобы $J_1^1 - u_0 J_1^0 = 0,$ т. е.

$$u_0 = \frac{J_1^1}{J_1^0} = \frac{B\left(\frac{n}{2}+1, n+1\right)}{B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3n}{2}+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3n}{2}+2\right)},$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Применяя формулу Стирлинга нетрудно получить, что при $n \to \infty$

$$u_0 = \sqrt{\frac{n}{3n+2}}\ (1+o(1)) = \frac{1}{\sqrt{3}}\ (1+o(1)).$$

Следовательно, при достаточно больших n $u_0 \in [0,1].$ Воспользовавшись теоремой Тейлора, будем иметь

$$e^{uz} = e^{u_0 z} e^{z(u-u_0)} =$$

$$= e^{u_0 z}\left\{1 + z(u-u_0) + \frac{z^2}{2}(u-u_0)^2 + \ldots\right\} =$$

$$= e^{u_0 z} + z(u-u_0)e^{u_0 z} + \rho_u(z),$$

где при $|z| \le M$ и $u \in [0,1]$

$$|\rho_u(z)| \le |u-u_0|^2 \left\{\frac{M^2}{2!} + \ldots + \frac{M^n}{n!} + \ldots\right\} \le M_1 |u-u_0|^2.$$

Тогда, учитывая выбор u_0 и равенство (1.2), получим

$$I_1(z) = \int_0^1 (1-u^2)^n u^n e^{u_0 z} du +$$

$$+ \int_0^1 (1-u^2)^n u^n \rho_u(z) du =$$

$$= \frac{e^{u_0 z}}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) + A_\rho(z), \quad (1.4)$$

где при $|z| \le M$ с учетом выбора u_0

$$|A_\rho(z)| \le M_1 \int_0^1 (1-u^2)^n u^n (u^2 - uu_0) du =$$

$$= M_1\left(J_1^2 - u_0 J_1^1\right).$$

По аналогии с доказательством равенств (1.2), (1.3) показывается, что

$$J_1^2 = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+3}{2}, n+1\right).$$

Поэтому из (1.3) и определения u_0 следует неравенство

$$|A_\rho(z)| \le \quad (1.5)$$

$$\le \frac{M_1}{2}\left\{\frac{B(\frac{n+3}{2}, n+1)}{B(\frac{n}{2}+1, n+1)} - \frac{B(\frac{n}{2}+1, n+1)}{B(\frac{n+1}{2}, n+1)}\right\} B\left(\frac{n}{2}+1, n+1\right).$$

Выражая бета-функции через гамма-функции, с помощью формулы Стирлинга нетрудно показать, что при $n \to \infty$

$$\frac{B(\frac{n+3}{2}, n+1)}{B(\frac{n}{2}+1, n+1)} \sim \sqrt{\frac{n+1}{3n+3}},$$
$$\frac{B(\frac{n}{2}+1, n+1)}{B(\frac{n+1}{2}, n+1)} \sim \sqrt{\frac{n}{3n+2}}. \quad (1.6)$$

Из (1.4), (1.5) и (1.6) следует, что равномерно по всем $|z| \le M$ при $n \to \infty$

$$I_1(z) = \frac{e^{u_0 z}}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right)(1+o(1)). \quad (1.7)$$

Отсюда с учетом определения функции $I_1(z)$ получим равенство (1.1). Лемма 1.1 доказана.

***Лемма* 1.2.** *При выполнении условий теоремы* 1.1 *равномерно по всем* $|z| \le M$ *при* $n \to \infty$

$$R_{2n,2n}^2(z) = \quad (1.8)$$

$$= \frac{z^{3n+1}}{2(3n)!} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) e^z \left[e^{\frac{z}{\sqrt{3}}} + (-1)^n e^{-\frac{z}{\sqrt{3}}}\right](1+o(1)).$$

Доказательство. В рассматриваемом случае

$$R_{2n,2n}^2(z) = \frac{e^{2z} z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^2 x^n (x-1)^n (x-2)^n e^{-zx} dx =$$

$$= \frac{e^z z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^1 x^n (x-1)^n (x-2)^n e^{z(1-x)} dx +$$

$$+ \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} \int_1^2 x^n (x-1)^n (x-2)^n e^{z(2-x)} dx =: R_1^2(z) + R_2^2(z).$$

Учитывая асимптотическое равенство (1.7), получаем, что

$$R_1^2(z) = \quad (1.9)$$

$$= \frac{z^{3n+1}}{2(3n)!} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) e^z\, e^{z\sqrt{n/(3n+2)}}\ (1+o(1)).$$

Преобразуем $R_2^2(z),$ производя замену $x-1=u$ переменной интегрирования в соответствующем интеграле. В результате будем иметь:

$$R_2^2(z) = \frac{e^{2z} z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^1 (1+u)^n u^n (u-1)^n e^{-z(1+u)} du =$$

$$= (-1)^n \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^1 (1-u^2)^n u^n e^{z(1-u)} du.$$

Применяя теорему Тейлора, получаем

$$e^{z(1-u)} = e^{z(1-u_0)} e^{z(u_0-u)} =$$

$$= e^{z(1-u_0)}\left\{1 - z(u-u_0) + \frac{z^2}{2}(u-u_0)^2 - \ldots\right\}.$$

Теперь, как и при доказательстве леммы 1.1, легко показать, что

$$R_2^2(z) =$$

$$= (-1)^n \frac{z^{3n+1}}{2(3n)!} B\left(\frac{n+1}{2}, n+1\right) e^z\, e^{-z\sqrt{n/(3n+2)}}\ (1+o(1)).$$

Отсюда и из (1.9) следует равенство (1.8). Лемма 1.2 доказана.

2 Доказательство теоремы 0.1.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1. Учитывая равенство (0.5) и условия теоремы, получаем, что при $n \to \infty$

$$Q_{2n}(z) = e^{-z}(1 + o(1)).$$

Поэтому из (0.2) и лемм 1.1 и 1.2 очевидным образом вытекает справедливость утверждений теоремы. Теорема 0.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин, Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М. : Наука, 1988.
2. *Бейкер, Дж.* Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М. : Мир, 1986.
3. *Mahler, K.* Perfect systems / K. Mahler // Compositio mathematica – 1968. – Vol. 19, № 2. – P. 95–166.
4. *Jager, H.A.* Multidimensional Generalization of the Pade Table / N.A. Jager // K. Nederl. Ak. Wetensch., Ser. A. – 1964. – Vol. 67. – P. 192–249.
5. *Coates, J.* On the algebraic approximation of functions / J. Coates // K. Nederl, Ak. Wetensch., Ser. A. – 1966. – Vol. 69. – P. 421–461.
6. *Никишин, Е.Н.* О системе марковских функций / Е.М. Никишин // Вестн. МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1979. – № 4. – С. 60–63.
7. *Аптекарев, А.И.* Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита-Паде / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов // Матем. сборник. – 2010. – Т. 201:2. – С. 29–78.
8. *Hermite, C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris). – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
9. *Клейн, Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т.1. / Ф. Клейн. – М. : Наука, 1933.
10. *Аптекарев, А.И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестник МГУ. Серия.1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.
11. *Pade, H.* Memoire sur les developpement en fractions continues de la fonction exponential / H. Pade // Ann Sci., Ecole Normale Sup. (3). – 1899. – Vol. 16. – P. 394–426.
12. *Perron, O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron. – Leipzig-Berlin : Teubner, 1929.
13. *Braess, D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x, II / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40:4. – P. 375–379.
14. *Petrusherv, P.P.* Rational approximation of real function / P.P. Petrusherv, V.A. Popov. – Cambridge : Encyclopedia Math., 1987.

Поступила в редакцию 04.11.11.