

УДК 519.9:621.039.51.12

Проекционно-итерационные процессы решения уравнения переноса с использованием элементарных решений

АБРАМОВ Б. Д., КОРНЕЕВ В. А.

Известно [1], что скорость сходимости метода простой итерации (или метода итераций столкновений), являющегося составной частью таких широко распространенных методов решения кинетических уравнений, как метод характеристик, S_n -метод и т. п., быстро падает с ростом рассеивающей способности вещества. В связи с этим созданы и продолжают разрабатываться различные способы ускорения сходимости этого процесса. Представляется, что для задач с кусочно-постоянными по пространственной координате сечениями перспективным является развитие уско-ряющих методов, использующих информацию о структуре аналитического решения подобных задач.

Предложенные далее методы такого типа основаны на следующем факте. Аналитическое решение модельных задач показывает, что по мере роста рассеивающей способности вещества все большее значение приобретает сравнительно простая комбинация элементарных решений (назовем ее асимптотическим решением). Оказывается, что если в качестве начального приближения для метода простой итерации выбрать именно асимптотическое решение, то уже низшие приближения этого метода весьма хорошо аппроксимируют точное решение во всем диапазоне рассеивающих свойств вещества.

Так как структура асимптотического решения для каждой конкретной задачи заранее известна, то для практической реализации подобного подхода остается лишь указать способ вычисления коэффициентов в разложении асимптотического решения по элементарным. Предлагаем вычислять эти коэффициенты, используя соответствующие необходимые условия разрешимости рассматриваемой краевой задачи [2]: потребуем, чтобы и приближенное решение удовлетворяло некоторым из этих условий. Возникающий при этом своеобразный проекционно-итерационный процесс решения задачи назовем кратко π -процессом, а метод решения задачи — π -методом. Алгоритмы этого метода сравнительно просты, особенно для задач с плоской геометрией, которые в основном и рассматриваются в настоящей работе.

Формальная схема π -процесса — это комбинация метода простой итерации и проекционного метода, при которой в качестве координатных функций выбираются определенные суперпозиции элементарных решений [1]. Рассмотрим ее на примере уравнения

$$\psi = T\psi + f, \quad f \in H, \quad (1)$$

с линейным непрерывным оператором T в гильбертовом пространстве H . Начальное приближение ψ_0 для метода простой итерации

$$\psi_{m+1} = T\psi_m + f, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

выберем в виде

$$\psi_0 = \sum_{i=1}^n a_i u_i + \psi'_0, \quad (3)$$

где $\{u_i\}$ — некоторая полная в H система функций; ψ'_0 — произвольный элемент из H . Коэффициент a_i определим из условия ортогональности невязки $\psi_m - \psi_{m-1}$ первым n элементам второй координатной последовательности $\{v_j\}$:

$$(\psi_m - \psi_{m-1}, v_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

после чего конструируем m -е приближение π -метода:

$$\psi_m = T^m \psi_0 + \sum_{i=0}^{m-1} T^i f, \quad m \geq 1. \quad (5)$$

Отметим, что при $m = 1$ и $\psi'_0 = 0$ схема этого метода отличается от схемы метода Галеркина [3] лишь тем, что приближенным решением здесь является не ψ_0 , а $\psi_1 = T\psi_0 + f$ (а эта функция в отличие от ψ_0 всегда принадлежит искомому классу функций).

π -Метод, рассматриваемый как метод простой итерации со специальным выбором начального приближения, сходится при $\|T\| < 1$. Оценим скорость сходимости на примере, когда T обладает полной в H системой ортонормированных собственных функций $\{\varphi_k\}$, а собственные числа λ_k удовлетворяют соотношению $1 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \dots \geq 0$. Положим также $\psi' = 0$; $\alpha_k = (\psi_0, \varphi_k)$; $\beta_{ik} = (u_i, \varphi_k)$; $\gamma_{ik} = (v_i, \varphi_k)$; $f_k = (f, \varphi_k)$ и будем считать, что среди чисел $\beta_{i1}, \gamma_{i1}, i = 1, 2, \dots, n$, имеются отличные от нуля. Условие (4) примет вид

$$\sum_k \gamma_{ik} \alpha_k (1 - \lambda_k) \lambda_k^{m-1} = \sum_k \gamma_{ik} f_k \lambda_k^{m-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

откуда следует, что при достаточно больших m в разложении

$$\psi - \psi_m = \sum_k \lambda_k^m \varphi_k \left(\frac{f_k}{1 - \lambda_k} - \alpha_k \right)$$

отсутствуют члены, пропорциональные λ_1^m , а погрешность $\psi - \psi_m$ π -метода убывает со скоростью λ_2^m . Эта скорость может быть и выше. Например, если $u_i = v_i = \varphi_i, i = 1, 2, \dots, n$, то $\psi - \psi_m \sim \lambda_{n+1}^m$.

Метод последовательных приближений. Рассмотрим решение уравнения переноса [1]

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Sigma \psi = \sum_{l=0}^M \frac{2l+1}{2} \alpha_l P_l(\mu) \times \int_{-1}^1 d\mu' P_l(\mu') \psi(x, \mu') + F \quad (6)$$

в слое $a < x < b$ с граничными условиями $\psi(a, \mu) = f^+(\mu), \mu > 0; \psi(b, \mu) = f^-(\mu), \mu < 0$ (7)

Предположим, что интервал (a, b) разбит на конечное число подынтервалов, в пределах каждого из которых коэффициенты $\Sigma(x), \alpha_l(x), l = 0, 1, \dots, M$, постоянны. Следуя работам [4-5], решение ищем в классе $D_p^p \in L_p$ функций $\psi(x, \mu)$, которые почти при всех $\mu \in (-1, 1)$ абсолютно непрерывны по $x \in [a, b]$, удовлетворяют условиям (7) и условию $\mu(\partial\psi/\partial x) + \Sigma\psi \in L_p, 1 \leq p \leq \infty$.

Из свойств абсолютно непрерывных функций вытекает, что формула $\psi = L^{-1}g + f$, где

$$L^{-1}g = \frac{1}{\mu} \int_a^b dx' g(x', \mu) \exp \left[-\frac{1}{\mu} \int_{x'}^x dx'' \Sigma(x'') \right] \times [\theta(\mu) \theta(x-x') - \theta(-\mu) \theta(x'-x)];$$

$$f = \theta(\mu) f^+(\mu) \exp \left[-\frac{1}{\mu} \int_a^x dx' \Sigma(x') \right] + \theta(-\mu) f^-(\mu) \exp \left[\frac{1}{\mu} \int_x^b dx' \Sigma(x') \right] \quad (8)$$

(θ — единичная ступенька Хевисайда) совместно с дифференциальным выражением $\mu(\partial\psi/\partial x) + \Sigma\psi$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами функций $\psi \in D_p^p$ и $g \in L_p$, т. е. поиск решения уравнения (6) в D_p^p эквивалентен решению уравнения

$$\psi = L^{-1}S\psi + L^{-1}F + f \quad (9)$$

в $L_p, 1 \leq p \leq \infty$. Здесь

$$S\psi = \sum_{l=0}^M \frac{2l+1}{2} \alpha_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 d\mu' P_l(\mu') \psi(x, \mu'). \quad (10)$$

Оператор $L^{-1}S$, задаваемый формулами (8), (10) на функциях из L_p , линеен и ограничен [4]. Следовательно, при $\|L^{-1}S\|_p < 1$ и произвольных $F, f^\pm \in L_p$ существует единственное решение уравнения (9) [а значит, и задачи (6) — (7)], и оно может быть получено методом последовательных приближений

$$\psi_{m+1} = L^{-1}S\psi_m + L^{-1}F + f, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

сходящимся при произвольном выборе начального приближения $\psi_0 \in L_p$. Такой же результат дает метод

$$\mu \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial x} + \Sigma \psi_{m+1} = S\psi_m + F, \quad \psi_{m+1} \in D_p^p, \quad (12)$$

$$m = 0, 1, \dots$$

Аналогичные заключения справедливы и для общей геометрии.

Асимптотическое решение. Если коэффициенты $\Sigma(x)$ и α_l не зависят от x , то, как известно [1], уравнение (6) имеет семейство элементарных решений вида $\psi(x, \mu) \sim \Phi(v, \mu) \exp(-x/v); \int d\mu \Phi(v, \mu) = 1$, где параметр v приобретает ряд значений. Дискретные значения $\pm v_i (i = 0, 1, \dots)$ этого параметра пронумеруем $\infty \geq |v_0| \geq |v_1| \geq \dots$ и обозначим через $E_0(x, \mu, \mu')$ ту часть фундаментального решения уравнения (6) [1, 6], которая определяется функциями $\Phi(\pm v_0, \mu) \exp(\mp x/v_0)$.

Асимптотическим решением уравнения (6) назовем свертку E_0 с F и с поверхностным псевдоисточником $\mu\psi(a, \mu) \delta(x-a) - \mu\psi(b, \mu) \times \delta(x-b)$ [7]. Это понятие распространяется и на общую геометрию. При этом функции u_i в формуле (3) — это свертка E_0 с базисными функциями, по которым раскладываются неизвестные заранее решения на поверхностях раздела. В частности, для плоской геометрии в качестве u_1, u_2 можно выбрать просто

$$\psi_0^\pm(x, \mu) \sim \Phi(v_0, \mu) \exp[-(x-x_0)/v_0] \pm \Phi(-v_0, \mu) \exp[(x-x_0)/v_0], \quad x_0 = (a+b)/2. \quad (13)$$

Схема метода для плоской геометрии. Пусть теперь пластина состоит из N однородных слоев, причем $a = a_1 < b_1 = a_2 < \dots < b_N = b$, так что k -й слой характеризуется координатами $a_k < x < b_k, k = 1, 2, \dots, N$.

Рассмотрим уравнение

$$-\mu \frac{\partial \psi_k^*}{\partial x} + \Sigma_k \psi_k^* = \sum_{l=0}^M \frac{2l+1}{2} \alpha_{kl} P_l(\mu) \times \int_{-1}^1 d\mu' P_l(\mu') \psi_k^*(x, \mu'), \quad (14)$$

где константы Σ_k и α_{kl} — значения функций $\Sigma(x)$ и $\alpha_l(x)$ в слое $a_k < x < b_k$. Среди решений уравнения (14) есть решения вида $\psi_k^*(x, \mu) \sim \psi_{0k}^\pm(x, -\mu)$, где ψ_{0k}^\pm — функции ψ_0^\pm , соответствующие выбору $\Sigma = \Sigma_k; \alpha_l = \alpha_{kl}; a = a_k, b = b_k$.

Из уравнений (6, 14) следует соотношение

$$\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{-1}^1 d\mu \mu \frac{\partial}{\partial x} (\psi_k^* \psi) = \int_{a_k}^{b_k} dx \int_{-1}^1 d\mu \psi_k^* F, \quad (15)$$

$$k = 1, 2, \dots, N.$$

Потребуем, чтобы уже m -е приближение метода простой итерации (12) удовлетворяло соотношению (15) при $\psi_k^* \sim \psi_{0k}^\pm(x, -\mu)$.

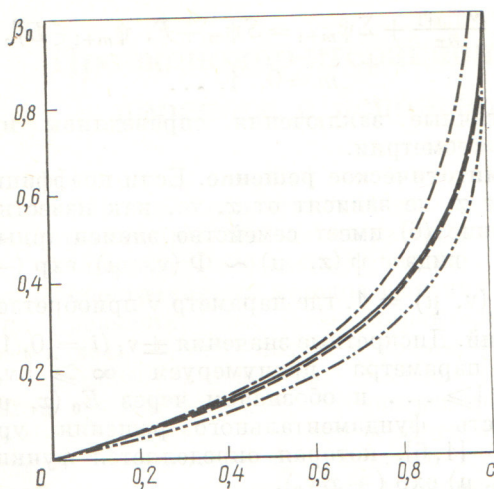


Рис. 1. Зависимость β_0 от c в первой итерации: —•— метод оценки итерационных отклонений [1]; --- π -метод; —·— KP-метод [1]; точное решение задачи

При этом из уравнений (12), (14) следует аналог соотношения (4):

$(U\psi_{0k}^{\pm}, S[\psi_m - \psi_{m-1}]_k = 0, k = 1, 2, \dots, N,$ (16) где обозначение $(\cdot)_k$ символизирует процесс интегрирования по фазовой области $(a_k, b_k) \times (-1, 1)$, а оператор U действует по правилу [4, 5]: $Uf(\mu) = f(-\mu)$. Аналогичное соотношение нетрудно записать и в общей геометрии.

Условие (16) в рамках метода (12) может быть выполнено только за счет специального подбора начального приближения. Положим

$$\psi_0(x, \mu) = \psi_0'(x, \mu) + \sum_{k=1}^N \theta_k(x) [a_k^+ \psi_{0k}^+(x, \mu) + a_k^- \psi_{0k}^-(x, \mu)], \quad (17)$$

где θ_k — характеристическая функция интервала $a_k < x < b_k$,

$$\psi_0'(x, \mu) = \psi_0''(x, \mu) + \sum_{k=1}^N \theta_k(x) \int_{a_k}^{b_k} dx' \times \times \int_{-1}^1 d\mu' E_{0k}(x-x', \mu, \mu') F(x', \mu'). \quad (18)$$

Здесь E_{0k} — функция E_0 предыдущего раздела, соответствующая выбору $\Sigma = \Sigma_k$, $\alpha_l = \alpha_{kl}$, $\psi_0'' \in L_p$ — произвольная функция. Уравнение (12) вместе с условиями формул (16) и (17) — конкретная схема π -процесса в плоской геометрии. π -Метод может получить применение и как метод для улучшения последнего найденного приближения (например, ψ_n) метода простой итерации (12): для этого в формуле (18) выбираем $\psi_0'' = \psi_n$ и делаем одну итерацию π -метода.

Примеры расчетов. Численные расчеты тестовых задач свидетельствуют о высоком качестве уже

низших приближений π -метода. Поясним некоторые из результатов. На рис. 1 приведены расчеты коэффициента отражения β_0 изотропного пучка нейтронов единичной мощности от полупространства $x > 0$. Точное решение этой задачи (при $M = 0$) имеет вид [8]

$$\beta_0 = \int_{-1}^0 d\mu \psi(0, \mu) = \frac{(1 - \sqrt{1-c})^2}{c} = 0 + \frac{c}{4} + \frac{c^2}{8} + \dots, \quad c = \frac{\alpha_0}{\Sigma} < 1,$$

где частичные суммы в разложении β_0 — соответствующие приближения метода простой итерации. Отметим, что в качестве операции P KP-метода рассматривали решение уравнения для погрешности $\psi - \psi_1$ в P_1 -приближении метода сферических гармоник с граничным условием Маршака [1]. Кроме того, в качестве нулевого приближения в π -методе выбирали функцию $\psi_0 \sim \Phi(v_0, \mu) \times \exp(-x/v_0)$, а во всех остальных — нуль.

Рис. 2 иллюстрирует зависимость логарифма относительной погрешности этих методов. Видно, что погрешность уже первой итерации π -метода стремится к нулю при $c \rightarrow 1$. Характер приближений π -метода для пластин конечной толщины приводится в табл. 1.

Дальнейшие примеры относятся к задачам на критический размер. Он определялся как наи-

Таблица 1

Коэффициент пропускания α и альbedo β однородной пластины при $\Sigma(b-a) = 1$; $\alpha_0/\Sigma = 0,8$; $f^+(\mu) = 1$; $f^-(\mu) = 0$; $M = 1$

Варианты расчета	$\bar{\mu} = \alpha_1/\alpha_0 = 0$		$\bar{\mu} = \alpha_1/\alpha_0 = 0,5$	
	α	β	α	β
Первая итерация	0,416144	0,279931	0,522013	0,169549
Вторая итерация	0,416230	0,280142	0,519344	0,172471
Тест [9]	0,416245	0,280152	0,518755	0,173106

Таблица 2

Зависимость критической полутолщины пластины в рассеивающей среде от параметров $c_1 = \alpha_{01}/\Sigma_1$, $c_2 = \alpha_{02}/\Sigma_2$ в первой итерации при $M = 0$

c_1/c_2	$(b-a)\Sigma_1/2$	Тест [10]	Относительная погрешность, %
1,01/0,09	8,1992	8,2874	-1,06
1,01/0,99	4,4972	4,4968	0,009
1,91/0,09	0,2997	0,3336	-10,2
1,91/0,99	0,0550	0,0545	1,02

Таблица 3

Критические размеры пластины и сферы в двухгрупповом приближении. Изотропное рассеяние, первая итерация

Варианты расчета	Полутолщина пластины, см		Радиус сферы, см	
	расчет	тест [13, 14]	расчет	тест [13, 14]
D ₂ O	846,646	846,633	1695,35	1695,34
²³⁵ U	3,01823	3,00638	7,91979	7,90944
²³⁹ Pu	1,80281	1,79560	5,23437	5,23157

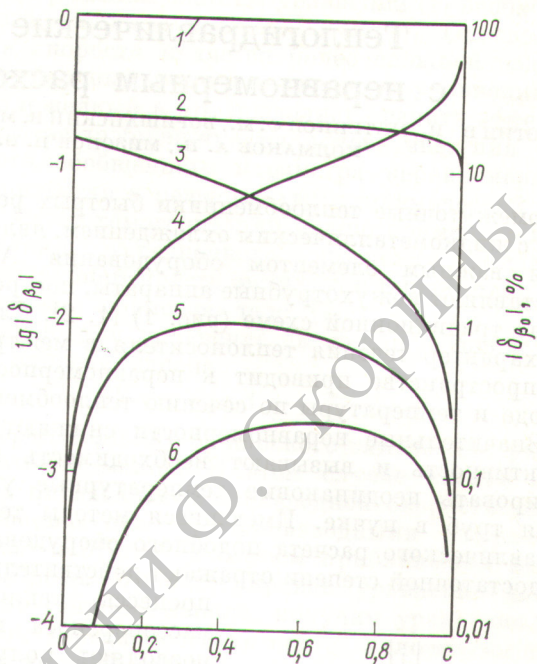
Таблица 4

Критическая полутолщина пластины в первой итерации π -метода в сравнении с другими методами [13, 14]

Варианты расчета	Тест	π -Метод	P_1 -приближение	P_2 -приближение	DP_1 -приближение
D ₂ O	846,63	846,65	846,77	846,65	846,63
²³⁵ U	3,0064	3,0182	3,4472	3,0783	2,9587
²³⁹ Pu	1,7956	1,8028	2,2183	1,8990	1,7690

меньший положительный корень $(b - a)$ трансцендентного уравнения, возникающего при подстановке аналитического выражения для ψ_m в формулу (16). Можно показать, что этот процесс сходится со скоростью λ_3^m , где λ_3 — третье собственное число задачи $\lambda_k \Phi_k = L^{-1} S \Phi_k$, $k = 1, 2, \dots$

Табл. 2 содержит сравнение с результатами, полученными Ковальской [10]. Описанный метод естественным образом обобщается на многогрупповые задачи. Элементарные решения и характеристические числа соответствующих уравнений рассмотрены, например, в работах [11, 12]. Результаты расчета двухгрупповой тестовой задачи [13, 14], приведенные в табл. 3—4, демонстрируют хорошее качество уже первого приближения π -метода.



Р и с. 2. Относительная погрешность расчета β_0 в первой итерации метода простой итерации (1), KP -метода (2) и метода оценки итерационных отклонений (3), а также в первой (4), второй (5) и третьей (6) итерациях π -метода

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г. И., Лебедев В. И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1971.
2. Абрамов Б. Д. «Атомная энергия», 1976, т. 41, вып. 3, с. 198.
3. Красносельский М. А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., «Наука», 1969.
4. Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. Труды Мат. ин-та АН СССР. Т. LXI. М., Изд-во АН СССР, 1961.
5. Шихов С. Б. Вопросы математической теории реакторов. М., Атомиздат, 1973.
6. Абрамов Б. Д. Препринт ФЭИ-796, Обнинск, 1977.
7. Ершов Ю. И., Шихов С. Б. Методы решения краевых задач теории переноса. М., Атомиздат, 1977.
8. Амбарцумян В. А. и др. Теоретическая астрофизика. М., Изд-во техн.-теорет. лит., 1952.
9. Kavenoky A. «Nucl. Sci. Engng», 1978, v. 65 N 2, p. 209.
10. Kowalska K. Ibid., 1966, v. 24, N 3, p. 260.
11. Абрамов Б. Д. Препринт ФЭИ-516. Обнинск, 1974.
12. Абрамов Б. Д. Препринт ФЭИ-600. Обнинск, 1975.
13. Forster R., Metcalf D. «Trans. Amer. Nucl. Soc.», 1969, v. 12, N 2, p. 639.
14. Kriese J. e. a. [8], 1973, v. 50, N 3, p. 3.

Поступила в Редакцию 20.11.78