Проблемы физики, математики и техники, № 1 (10), 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И ПЕРИОДИЧНОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НЕАВТОНОМНОЙ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

С.В. Майоровская

Белорусский государственный экономический университет, Минск

REFLECTING FUNCTION AND SOLUTION-PERIODICITY OF AN NONAUTONOMOUS CUBIC SYSTEM

S.V. Mayorauskaya

Belarus State Economic University, Minsk

Построено множество нелинейных дифференциальных систем с линейной отражающей функцией. Исследовано множество периодических решений таких систем.

Ключевые слова: *дифференциальная система, отражающая функция.*

The set of nonlinear differential systems with a linear reflecting function was constructed. The set of periodic solutions of such systems was investigated.

Keywords: *differential system, reflecting function.*

Введение

Задача о существовании и устойчивости периодических решений 2ω-периодических по t дифференциальных систем вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \quad t \in R, \quad x \in D \subset R^n \qquad (0.1)$$

в силу своей важности исследовалась многими авторами. Все полученные методы изучения таких решений так или иначе связаны с отображением Пуанкаре (отображением за период $[t_0; t_0 + 2\omega]$, где 2ω-период правой части системы (0.1)) [1].

Пусть для 2ω-периодической по t системы (0.1) выполнены все условия некоторой теоремы существования и единственности и $\varphi(t; t_0, x_0)$ – ее общее решение в форме Коши. Тогда отображение за период $[t_0; t_0 + 2\omega]$ задается формулой $\Pi_{t_0}(x) = \varphi(t_0 + 2\omega; t_0, x)$. Полагая $t_0 = -\omega$, будем рассматривать отображение $\Pi(x) = \varphi(\omega; -\omega, x)$ за период $[-\omega; \omega]$. Если функция $\Pi(x)$ для системы (0.1) известна, то задачу о существовании и устойчивости периодических решений данной системы можно считать решенной.

1 Используемые результаты

Мироненко В.И. [2] показал, что, не находя общего решения системы (0.1), возможно найти ее отображение за период $\Pi(x)$ с помощью так называемой отражающей функции

$$F(t,x) = \varphi(-t; t, x),$$

которая определяется для любой (не обязательно периодической) системы вида (0.1). А именно, если правая часть системы (0.1) 2ω-периодична по t, то $F(-\omega, x) \equiv \varphi(\omega; -\omega, x)$ есть отображение за период $[-\omega; \omega]$ этой системы.

Дифференцируемая функция $F(t,x)$ является отражающей функцией системы (0.1) тогда и только тогда, когда F удовлетворяет системе уравнений в частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t,x) + X(-t, F) = 0 \qquad (1.1)$$

и начальному условию

$$F(0,x) = x. \qquad (1.2)$$

Соотношение (1.1), называемое основным соотношением для отражающей функции, и начальное условие (1.2) часто позволяют найти отражающую функцию, а значит и отображение за период системы (0.1), не интегрируя рассматриваемую систему.

Основные положения теории отражающей функции и ссылки на работы других авторов, использующих понятие отражающей функции можно найти на сайте http://reflecting-function.narod.ru.

2 Основной результат

Основной результат предлагаемой работы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть* $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $s = s(t)$ *– непрерывные на всей числовой оси, нечетные и* 2ω*-периодические функции. Тогда у системы*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{ds}{dt} x^2 + \alpha y (1 - 2sx)(1 - sx), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{ds}{dt} xy + \alpha s y^2 (1 - 2sx) + \beta y \end{aligned} \qquad (2.1)$$

все продолжимые на R решения являются 2ω-периодическими, а нулевое решение неасимптотически устойчиво.

Доказательство. Положим

$$F(t,x,y)=\begin{pmatrix} x(1-2sx)^{-1} \\ y(1-2sx) \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Покажем, что функция (2.2) является отражающей функцией системы (2.1). Для этого установим, что указанная функция удовлетворяет условиям (1.1) и (1.2).

Основное соотношение (1.1) в нашем случае имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial(x,y)}X(t,x,y)+X(-t,F)=0. \qquad (2.3)$$

В том, что соотношение (2.3) действительно представляет собой тождество, убедимся, приняв во внимание, что

$$X(t,x,y)=\begin{pmatrix} -\frac{ds}{dt}x^2+\alpha y(1-2sx)(1-sx) \\ \frac{ds}{dt}xy+\alpha sy^2(1-2sx)+\beta y \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\begin{pmatrix} 2\frac{ds}{dt}x^2(1-2sx)^{-2} \\ -2\frac{ds}{dt}xy \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y)}=\begin{pmatrix} (1-2sx)^{-2} & 0 \\ -2sy & 1-2sx \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y)}X(t,x,y)=$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{ds}{dt}x^2(1-2sx)^{-2}+\alpha y(1-sx)(1-2sx)^{-1} \\ \hline \frac{ds}{dt}xy-2\alpha sy^2(1-sx)(1-2sx)+ \\ +\alpha sy^2(1-2sx)^2+\beta y(1-2sx) \end{pmatrix},$$

$$X(-t,F)=X(-t,x(1-2sx)^{-1},$$
$$y(1-2sx))=$$
$$=\begin{pmatrix} -\frac{ds}{dt}x^2(1-2sx)^{-2}-\alpha y(1-sx)(1-2sx)^{-1} \\ \frac{ds}{dt}xy+\alpha sy^2(1-2sx)-\beta y(1-2sx) \end{pmatrix}.$$

Начальное условие (1.2) также выполняется, поскольку $s(0)=0$.

Итак, функция (2.2) есть отражающая функция системы (2.1), а значит отображение за период $[-\omega;\omega]$ этой системы имеет вид

$$\Pi(x,y)=F(-\omega,x,y).$$

В силу нечетности и 2ω-периодичности функции s справедливы равенства $s(-\omega)=-s(\omega)$ и $s(-\omega)=s(-\omega+2\omega)=s(\omega)$, откуда $s(-\omega)=0$, а значит,

$$\Pi(x,y)=F(-\omega,x,y)=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Таким образом, отображение за период $[-\omega;\omega]$ системы (2.1) есть тождественное отображение в области своего определения. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд, В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – М. : «Наука», 1984. – 272 с.

2. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем : монография / В.И. Мироненко ; Мин-во образования РБ, УО «ГГУ им. Ф. Скорины». – Гомель, 2004. – 196 с.

Поступила в редакцию 21.11.11.