МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

# О ВЕКТОР-МАТРИЦАХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАТРИЦАХ

**А.М. Гальмак**

*Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв*

# ON VECTOR-MATRICES AND SPACEMATRICES

**A.M. Gal'mak**

*Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev*

В статье изучаются свойства вектор-матриц и пространственных матриц.

***Ключевые слова***: *матрица, вектор-матрица, пространственная матрица, полугруппа, группа, кольцо, n-арная группа.*

The properties of vector-matrices and spacematrices are studied in this paper.

***Keywords***: *matrice, vector-matrice, spacematrice, semigroup, group, ring , n-ary group.*

***Введение***

Одним из обобщений двумерных, то есть обычных матриц, являются многомерные матрицы, которым посвящена обширная литература, в том числе две книги Н.П. Соколова на русском языке [1], [2]. Еще одним обобщением обычных матриц являются $m$-арные матрицы Э. Поста [3] и вектор-матрицы [4]–[9]. При этом $m$-арные матрицы Э. Поста – это вектор-матрицы, у которых все компоненты являются обычными квадратными матрицами одного и того же порядка над полем комплексных чисел.

Термин «пространственные матрицы» употребляют как в широком смысле – для многомерных матриц любого размера, так и в узком смысле – для трехмерных матриц. В данной работе пространственные матрицы – это всегда трехмерные матрицы.

Между пространственными матрицами и вектор-матрицами можно естественным образом установить связь, если в каждой пространственной матрице вначале зафиксировать ориентацию, а затем каждое сечение этой ориентации отождествить с соответствующей компонентой некоторой вектор-матрицы. Таким образом, каждой пространственной матрице ставится в соответствие вектор-матрица, у которой все компоненты имеют один и тот же размер, совпадающий с размером сечений зафиксированной ориентации, а число компонент равно одному из размеров пространственной матрицы, а именно – числу сечений выбранной ориентации. Разумеется, такое соответствие не является единственным, так как, зафиксировав другую ориентацию, мы получим новую вектор-матрицу. Каждому сечению пространственной матрицы отвечает свое соответствие.

Взгляд на пространственные матрицы как на вектор-матрицы определенного вида позволяет распространить на пространственные матрицы идеи и методы, которые используются при изучении вектор-матриц. В качестве примера такого подхода можно указать работу [10], в которой на множестве пространственных матриц были определены и изучались многоместные операции, аналогичные $l$-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, определенной на множестве вектор-матриц.

В данной работе для каждой пространственной матрицы, у которой имеется ориентация ($r$), где $r \in \{i, j, k\}$, с квадратными сечениями, определяется определитель ориентации ($r$). Указанный определитель ориентации ($r$) совпадает с определителем соответствующей вектор-матрицы, у которой все компоненты являются сечениями ориентации ($r$). Для кубической матрицы помимо определителей ориентаций ($i$), ($j$) и ($k$) вводится также понятие полного определителя. Все четыре указанные определителя кубической матрицы отличаются от детерминантов кубической матрицы из [1], [2]. Устанавливаются свойства определителя ориентации ($r$) и полного определителя.

Информацию об $n$-арных полугруппах, $n$-арных группах и других универсальных алгебрах, встречающихся в данной работе, можно найти в статье Э. Поста [3], книге С.А. Русакова [11], а также в книгах [12]–[14].

***1 Вектор-матрицы***

*Вектор-матрицей* размера

$$(m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k)$$

над кольцом $P$ называется [4, определение 1] всякий упорядоченный набор $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ матриц $A_1, \ldots, A_k$ размеров $m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k$ с элементами из $P$.

***Замечание* 1.1.** Множество $\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P)$ всех $k$-компонентных вектор-матриц размера

$(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ над полем $P$ является линейным пространством над $P$ с операциями покомпонентного сложения вектор-матриц и умножения вектор-матриц на скаляры из $P$ [4, предложение 1].

Определение вектор-матрицы обобщает понятие $m$-адической ($m$-арной) матрицы Э. Поста [3], которую он определил как упорядоченный набор $m - 1$ квадратных матриц одного и того же порядка над полем комплексных чисел.

Вектор-матрица, у которой все компоненты имеют один и тот же размер $m \times n$, называется вектор-матрицей размера $m \times n$. Множество всех $k$-компонентных вектор-матриц над $P$ размера $m \times n$ обозначается символом $\mathbf{M}_{m \times n}(k, P)$.

Вектор-матрица, у которой все компоненты являются квадратными матрицами одного и того же порядка $n$, называется *квадратной* вектор-матрицей порядка $n$. Для обозначения множества всех квадратных $k$-компонентных вектор-матриц над $P$ порядка $n$ используется символ $\mathbf{M}_n(k, P)$.

В [4, определение 4] для всех $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на множестве $\mathbf{M}(k, P)$ всех $k$-компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом $P$ определена частичная $l$-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ следующим образом: если

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}),\ i = 1, \dots, l$$

– $k$-компонентные вектор-матрицы над $P$ такие, что для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ определено произведение

$$Y_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}A_{l\sigma^{l-1}(j)}, \qquad (1.1)$$

то полагают

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = \{Y_1, \dots, Y_k\}. \qquad (1.2)$$

Аналогично бинарному случаю, левая часть в (1.2) определена не всегда, а только в тех случаях, когда для любых соседних сомножителей в правой части (1.1) число столбцов предшествующего сомножителя совпадает с числом строк последующего сомножителя.

Имеет место

***Теорема* 1.1** [4, предложение 4; 8, предложение 1.3]. *Если $P$ – ассоциативное кольцо, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< \mathbf{M}_n(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – $l$-арная полугруппа. Если $P$ обладает единицей, то эта $l$-арная полугруппа не является полуабелевой, в частности, абелевой. В ней нет единиц, если $\sigma$ – нетождественная подстановка.*

Для всякой вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ над ассоциативным кольцом с единицей *транспонированной* называется вектор-матрица $\mathbf{A}' = (A_1', \dots, A_k')$, у которой каждая компонента $A_j'$ является транспонированной матрицей для компоненты $A_j$ вектор-матрицы $\mathbf{A}$ [5, определение 1.3].

***Теорема* 1.2** [5, следствие 3.2]. *Пусть $\sigma$ – подстановка из $S_m$, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ – $m$-компонентные квадратные вектор-матрицы одного и того же порядка $n$. Тогда верно равенство*

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{l-1}\mathbf{A}_l]'_{l,\sigma,m} = [\mathbf{A}_l'\mathbf{A}_{l-1}' \dots \mathbf{A}_2'\mathbf{A}_1']_{l,\sigma^{-1},m}.$$

В [6] для каждой вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$, где $P$ – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, определены вектор-определитель

$$\mathbf{detA} = (\det A_1, \det A_2, \dots, \det A_k) \in P^k$$

и определитель

$$\det\mathbf{A} = \det A_1 \det A_2 \dots \det A_k \in P.$$

Подчеркнем, что в определениях вектор-определителя $\mathbf{detA}$, определителя $\det\mathbf{A}$ и транспонированной вектор-матрицы $\mathbf{A}'$ компоненты $A_1, \dots, A_k$ могут быть матрицами различных размеров.

Вектор-определители и определители вектор-матриц обладают рядом свойств, аналогичных свойствам определителей обычных матриц. Приведем некоторые из таких свойств.

Следующая теорема является полиадическим аналогом теоремы об определителе произведения матриц.

***Теорема* 1.3** [6, теорема 3.1]. *Пусть*

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}),\ i = 1, \dots, l$$

*– $k$-компонентные вектор-матрицы над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей, у которых для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ компоненты*

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{l\sigma^{l-1}(j)}$$

*– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда*

$$\mathbf{det}[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{detA}_1 \dots \mathbf{detA}_l]_{l,\sigma,k},$$

$$\det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = \det\mathbf{A}_1 \dots \det\mathbf{A}_l.$$

Следующие свойства вектор-определителей и определителей вектор-матриц связаны с операцией транспонирования.

***Предложение* 1.1** [6, предложение 1.2]. *Если $\mathbf{A}'$ – транспонированная вектор-матрица для квадратной вектор-матрицы $\mathbf{A}$, то*

$$\mathbf{detA}' = \mathbf{detA},\ \det\mathbf{A}' = \det\mathbf{A}.$$

Из предложения 1.1 и теоремы 1.3 вытекает

***Предложение* 1.2**. *Пусть*

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}),\ i = 1, \dots, l$$

*– $k$-компонентные вектор-матрицы над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей, у которых для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ компоненты*

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{l\sigma^{l-1}(j)}$$

*– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда вектор-определитель $\mathbf{det}[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}$ и определитель $\det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}$ не изменятся, если в них любые $s$ вектор-матриц, где $s = 1, \dots, l$, заменить транспонированными вектор-матрицами. В частности, для* $l = 3$, $k = 2$, $\sigma = (12)$ имеем

$$\mathbf{det}[\mathbf{ABC}]_{3,(12),2} = \mathbf{det}[\mathbf{A'BC}]_{3,(12),2} =$$

$$= \mathbf{det}[\mathbf{AB'C}]_{3,(12),2} = \mathbf{det}[\mathbf{ABC'}]_{3,(12),2} =$$

$$= \mathbf{det}[\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}]_{3,\,(12),\,2} = \mathbf{det}[\mathbf{A}'\mathbf{B}\mathbf{C}']_{3,\,(12),\,2} =$$
$$= \mathbf{det}[\mathbf{A}\mathbf{B}'\mathbf{C}']_{3,\,(12),\,2} = \mathbf{det}[\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{C}']_{3,\,(12),\,2}.$$

*Аналогичные равенства справедливы для определителя* $\det[\mathbf{ABC}]_{3,\,(12),\,2}$.

***Следствие* 1.1**. *Если* $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_l \in \mathbf{M}_n(k, P)$, *где* $P$ *– ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, то вектор-определитель* $\mathbf{det}[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\,\sigma,\,k}$ *и определитель* $\det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\,\sigma,\,k}$ *не изменятся, если в них любые* $s$ *вектор-матриц, где* $s = 1, \dots, l$, *заменить транспонированными вектор-матрицами. В частности, для* $l = 3$, $k = 2$, $\sigma = (12)$ *верны равенства из предложения* 1.2. *Аналогичные равенства справедливы для определителя* $\det[\mathbf{ABC}]_{3,\,(12),\,2}$.

### *2 Пространственные матрицы*

*Пространственную матрицу* размера $m \times n \times p$ над кольцом $P$ можно определить [1], [2] как пространственную таблицу из $mnp$ чисел

$$a_{ijk}\ (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p),$$

имеющую форму параллелепипеда с линейными размерами $m$, $n$ и $p$. Пространственную матрицу размера $m \times n \times p$ с общим элементом $a_{ijk}$ обозначают символом $(a_{ijk})_{m\times n\times p}$. Элементы этой матрицы можно считать расположенными в точках $(i, j, k)$ трехмерного пространства, где $i, j, k$ изменяются, как указано выше.

Пространственную матрицу размера $n \times n \times n$ называют *кубической*.

Если в пространственной матрице зафиксировать значение индекса $i$, то получим $m$ обычных матриц размера $n \times p$

$$(a_{1jk}), (a_{2jk}), \dots, (a_{mjk}),$$

которые называются *сечениями ориентации* $(i)$. Аналогично $n$ матриц размера $m \times p$

$$(a_{i1k}), (a_{i2k}), \dots, (a_{ink})$$

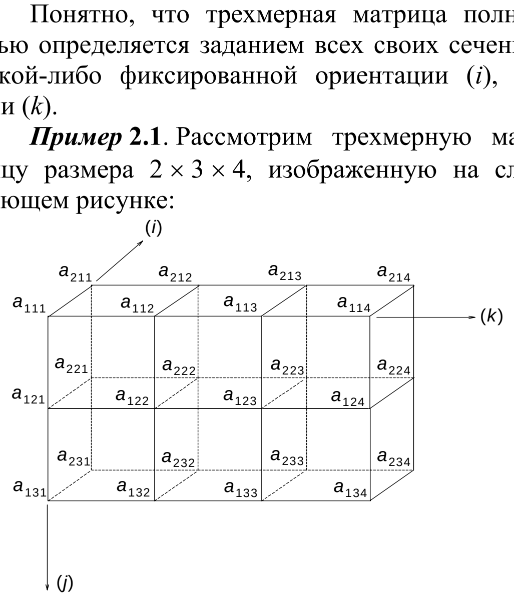
называются *сечениями ориентации* $(j)$, а $p$ матриц размера $m \times n$

$$(a_{ij1}), (a_{ij2}), \dots, (a_{ijp})$$

называются *сечениями ориентации* $(k)$.

Понятно, что трехмерная матрица полностью определяется заданием всех своих сечений какой-либо фиксированной ориентации $(i)$, $(j)$ или $(k)$.

***Пример* 2.1**. Рассмотрим трехмерную матрицу размера $2 \times 3 \times 4$, изображенную на следующем рисунке:




Две матрицы

$$U_1 = \begin{pmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{114} \\ a_{121} & a_{122} & a_{123} & a_{124} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133} & a_{134} \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} a_{211} & a_{212} & a_{213} & a_{214} \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} & a_{224} \\ a_{231} & a_{232} & a_{233} & a_{234} \end{pmatrix}$$

размера $3\times4$ являются сечениями ориентации $(i)$; три матрицы

$$V_1 = \begin{pmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{114} \\ a_{211} & a_{212} & a_{213} & a_{214} \end{pmatrix},$$
$$V_2 = \begin{pmatrix} a_{121} & a_{122} & a_{123} & a_{124} \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} & a_{224} \end{pmatrix},$$
$$V_3 = \begin{pmatrix} a_{131} & a_{132} & a_{133} & a_{134} \\ a_{231} & a_{232} & a_{233} & a_{234} \end{pmatrix}$$

размера $2\times4$ являются сечениями ориентации $(j)$; четыре матрицы

$$W_1 = \begin{pmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{131} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} a_{112} & a_{122} & a_{132} \\ a_{212} & a_{222} & a_{232} \end{pmatrix},$$
$$W_3 = \begin{pmatrix} a_{113} & a_{123} & a_{133} \\ a_{213} & a_{223} & a_{233} \end{pmatrix}, \quad W_4 = \begin{pmatrix} a_{114} & a_{124} & a_{134} \\ a_{214} & a_{224} & a_{234} \end{pmatrix}$$

размера $2\times3$ являются сечениями ориентации $(k)$.

Если в пространственной матрице $(a_{ijk})_{m\times n\times p}$ зафиксировать значения $\bar{j}$ и $\bar{k}$ индексов $j$ и $k$, то получим строку

$$a_{1\bar{j}\bar{k}}, a_{2\bar{j}\bar{k}}, \dots, a_{m\bar{j}\bar{k}},$$

перпендикулярную сечениям ориентации $(i)$, которая называется строкой направления $(i)$.

Если в пространственной матрице $(a_{ijk})_{m\times n\times p}$ зафиксировать значения $\bar{i}$ и $\bar{k}$ индексов $i$ и $k$, то получим строку

$$a_{\bar{i}1\bar{k}}, a_{\bar{j}2\bar{k}}, \dots, a_{\bar{i}n\bar{k}},$$

перпендикулярную сечениям ориентации $(j)$, которая называется строкой направления $(j)$.

Если в пространственной матрице $(a_{ijk})_{m\times n\times p}$ зафиксировать значения $\bar{i}$ и $\bar{j}$ индексов $i$ и $j$, то получим строку

$$a_{\bar{i}\bar{j}1}, a_{\bar{i}\bar{j}2}, \dots, a_{\bar{i}\bar{j}p},$$

перпендикулярную сечениям ориентации $(k)$, которая называется строкой направления $(k)$.

Всего имеется $np$ строк направления $(i)$, $mp$ строк направления $(j)$ и $mn$ строк направления $(k)$.

Например, элементы $a_{123}$ и $a_{223}$ образуют одну из двенадцати строк направления $(i)$ пространственной матрицы из примера 2.1. У этой же пространственной матрицы имеется восемь строк направления $(j)$ и шесть строк направления $(k)$.

### *3 Линейные пространства вектор-матриц и пространственных матриц*

Всякой пространственной матрице $(a_{ijk})_{m\times n\times p}$ можно поставить в соответствие три различные вектор-матрицы:

1) $m$-компонентную вектор-матрицу

$$((a_{1jk}), (a_{2jk}), \ldots, (a_{mjk})),$$

компонентами которой являются сечения ориентации ($i$);

2) $n$-компонентную вектор-матрицу

$$((a_{i1k}), (a_{i2k}), \ldots, (a_{ink})),$$

компонентами которой являются сечения ориентации ($j$);

3) $p$-компонентную вектор-матрицу

$$((a_{ij1}), (a_{ij2}), \ldots, (a_{ijp})),$$

компонентами которой являются сечения ориентации ($k$).

Например, пространственной матрице $(a_{ijk})_{2\times3\times4}$ из примера 2.1 соответствуют: двухкомпонентная вектор-матрица ($U_1$, $U_2$), трехкомпонентная вектор-матрица ($V_1$, $V_2$, $V_3$), а также четырехкомпонентная вектор-матрица ($W_1$, $W_2$, $W_3$, $W_4$).

Пусть теперь $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ – произвольная $m$-компонентная вектор-матрица, у которой все компоненты – матрицы размера $n \times p$. Рассматривая эти компоненты как соответствующие сечения ориентации ($i$), можно построить пространственную матрицу размера $m \times n \times p$. Аналогично: $n$-компонентной вектор-матрице $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$, у которой все компоненты – матрицы размера $m \times p$, ставится в соответствие пространственная матрица размера $m \times n \times p$; $p$-компонентной вектор-матрице $(C_1, C_2, \ldots, C_p)$, у которой все компоненты – матрицы размера $m \times n$, ставится в соответствие пространственная матрица размера $m \times n \times p$.

Понятно, что вектор-матрице, у которой по крайней мере две компоненты имеют разные размеры, нельзя поставить в соответствие ни одну пространственную матрицу.

Пространственные матрицы $(a_{ijk})_{m\times n\times p}$ и $(b_{ijk})_{m\times n\times p}$ одного и того же размера можно складывать по правилу

$$(a_{ijk})_{m\times n\times p} + (b_{ijk})_{m\times n\times p} = (c_{ijk} = a_{ijk} + b_{ijk})_{m\times n\times p}.$$

Ясно, что для любого $r = 1, \ldots, m$ $r$-ое сечение ориентации ($i$) суммы пространственных матриц равно сумме $r$-ых сечений ориентации ($i$) пространственных матриц слагаемых, то есть, если

$$(a_{ijk})_{m\times n\times p} + (b_{ijk})_{m\times n\times p} = (c_{ijk})_{m\times n\times p},$$

то

$$(a_{rjk}) + (b_{rjk}) = (c_{rjk}),\ r = 1, \ldots, m.$$

Аналогичные утверждения справедливы для сечений ориентаций ($j$) и ($k$).

Всякую пространственную матрицу $(a_{ijk})_{m\times n\times p}$ можно умножить на любой элемент $\lambda$ из $P$ по правилу

$$\lambda(a_{ijk})_{m\times n\times p} = (d_{ijk} = \lambda a_{ijk})_{m\times n\times p}.$$

Ясно, что для любого $r = 1, \ldots, m$ $r$-ое сечение ориентации ($i$) пространственной матрицы $\lambda(a_{ijk})_{m\times n\times p}$, где $\lambda \in P$, равно произведению $\lambda$ на $r$-ое сечение ориентации ($i$) пространственной матрицы $(a_{ijk})_{m\times n\times p}$, то есть, если

$$\lambda(a_{ijk})_{m\times n\times p} = (d_{ijk})_{m\times n\times p},$$

то

$$(d_{rjk}) = \lambda(a_{rjk}),\ r = 1, \ldots, m.$$

***Замечание* 3.1.** Если $P$ – поле, то множество $\mathbf{M}_{m\times n\times p}(P)$ всех пространственных матриц размера $m \times n \times p$ над $P$ относительно операций сложения пространственных матриц и умножения пространственных матриц на скаляры из $P$ является линейным пространством над $P$, размерность которого равна $mnp$.

Согласно замечанию 1.1, множество $\mathbf{M}_{n\times p}(m, P)$ всех $m$-компонентных вектор-матриц размера $n \times p$, множество $\mathbf{M}_{m\times p}(n, P)$ всех $n$-компонентных вектор-матриц размера $m \times p$ и множество $\mathbf{M}_{m\times n}(p, P)$ всех $p$-компонентных вектор-матриц размера $m \times n$ также являются линейными пространствами над $P$. Размерности этих трех пространств равны $mnp$. Все четыре пространства $\mathbf{M}_{m\times n\times p}(P)$, $\mathbf{M}_{n\times p}(m, P)$, $\mathbf{M}_{m\times p}(n, P)$, $\mathbf{M}_{m\times n}(p, P)$ изоморфны, так как имеют одинаковую размерность.

Для каждой $m$-компонентной вектор-матрицы

$$\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_m) \in \mathbf{M}_{n\times p}(m, P) \qquad (3.1)$$

положим

$$A_1 = (a_{1jk}), \ldots, A_m = (a_{mjk}),$$

то есть отождествим компоненты вектор-матрицы (3.1) с соответствующими сечениями ориентации ($i$) пространственной матрицы

$$(a_{ijk})_{m\times n\times p} \in \mathbf{M}_{m\times n\times p}(P). \qquad (3.2)$$

В этом случае отображение

$$\varphi_{(i)}: ((a_{1jk}), \ldots, (a_{mjk})) \to (a_{ijk})_{m\times n\times p}$$

является биекцией линейного пространства $\mathbf{M}_{n\times p}(m, P)$ на линейное пространство $\mathbf{M}_{m\times n\times p}(P)$.

Если каждую компоненту $n$-компонентной вектор-матрицы

$$\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_n) \in \mathbf{M}_{m\times p}(n, P)$$

отождествить с соответствующим сечением ориентации ($j$) пространственной матрицы (3.2):

$$A_1 = (a_{i1k}), \ldots, A_n = (a_{ink}),$$

то отображение

$$\varphi_{(j)}: ((a_{i1k}), \ldots, (a_{ink})) \to (a_{ijk})_{m\times n\times p}$$

является биекцией линейного пространства $\mathbf{M}_{m\times p}(n, P)$ на линейное пространство $\mathbf{M}_{m\times n\times p}(P)$.

Если каждую компоненту $p$-компонентной вектор-матрицы

$$\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_p) \in \mathbf{M}_{m\times n}(p, P)$$

отождествить с соответствующим сечением ориентации ($k$) пространственной матрицы (3.2):

$$A_1 = (a_{ij1}), \ldots, A_p = (a_{ijp}),$$

то отображение

$$\varphi_{(k)}: ((a_{ij1}), \ldots, (a_{ijp})) \to (a_{ijk})_{m\times n\times p}$$

является биекцией линейного пространства $\mathbf{M}_{m\times n}(p, P)$ на линейное пространство $\mathbf{M}_{m\times n\times p}(P)$.

Справедливость следующего предложения устанавливается простой проверкой.

***Предложение* 3.1.** *Отображения* $\varphi_{(i)}$, $\varphi_{(j)}$ *и* $\varphi_{(k)}$ *являются изоморфизмами соответствующих линейных пространств.*

### *4 Многоместные алгебры пространственных матриц*

Для сокращения записей, в случаях, когда не возникает разночтений, будем в обозначении трехмерной матрицы $(a_{ijk})_{m\times n\times p}$ опускать ее размеры $m \times n \times p$, то есть полагать $(a_{ijk})_{m\times n\times p} = (a_{ijk})$.

Зафиксировав целое $l \geq 2$, подстановку $\sigma \in S_m$ и ориентацию $(i)$, определим на множестве $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ всех трехмерных матриц размера $m \times n \times n$ над ассоциативным кольцом $P$ $l$-арную операцию $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$ по следующему правилу: если

$$(a_{ijk})_1, \ldots, (a_{ijk})_l \qquad (4.1)$$

– произвольные трехмерные матрицы из $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$, то

$$[(a_{ijk})_1 \ldots (a_{ijk})_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} = (a_{ijk}), \qquad (4.2)$$

где сечения $(a_{1jk}), \ldots, (a_{mjk})$ ориентации $(i)$ трехмерной матрицы $(a_{ijk})$ из правой части (4.2) находятся с помощью сечений ориентации $(i)$ матриц (4.1) по правилу

$$(a_{rjk}) = (a_{rjk})_1 (a_{\sigma(r)jk})_2 \ldots (a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l, \qquad (4.3)$$

где $(a_{rjk})_s$ – $r$-ое сечение ориентации $(i)$ трехмерной матрицы $(a_{ijk})_s$, $r = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, l$.

Если в определении операции $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$ заменить ориентацию $(i)$ ориентацией $(j)$, а множество $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ множеством $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$, то получим определение $l$-арной операции $[\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}$.

Если в определении операции $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$ заменить ориентацию $(i)$ ориентацией $(k)$, а множество $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ множеством $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$, то получим определение $l$-арной операции $[\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}$.

Многоместные операции $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$, $[\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}$ и $[\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}$ впервые были определены в [10].

***Лемма* 4.1.** *Отображения* $\varphi_{(i)}$, $\varphi_{(j)}$ *и* $\varphi_{(k)}$ *являются изоморфизмами универсальной алгебры* $< \mathbf{M}_n(m, P), [\ ]_{l,\sigma,m} >$ соответственно *на универсальные алгебры* $<\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P), [\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}>$, $<\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P), [\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}>$, $<\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P), [\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}>$.

*Доказательство*. Пусть

$$\mathbf{A}_1 = (A_{11}, \ldots, A_{1m}), \ldots, \mathbf{A}_l = (A_{l1}, \ldots, A_{lm})$$

– произвольные $m$-компонентные вектор-матрицы из $\mathbf{M}_n(m, P)$. Отождествим, как в определении отображения $\varphi_{(i)}$, компоненты вектор-матриц $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ с соответствующими сечениями ориентации $(i)$ пространственных матриц $(a_{ijk})_1, \ldots, (a_{ijk})_l$ из $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ соответственно:

$$A_{11} = (a_{1jk})_1, \ldots, A_{1m} = (a_{mjk})_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{l1} = (a_{1jk})_l, \ldots, A_{lm} = (a_{mjk})_l. \qquad (4.4)$$

Тогда

$$\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_1) = (a_{ijk})_1, \ldots, \varphi_{(i)}(\mathbf{A}_l) = (a_{ijk})_l. \qquad (4.5)$$

Согласно (4.5),

$$[\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_1) \ldots \varphi_{(i)}(\mathbf{A}_l)]^{(i)}_{l,\sigma,m} = [(a_{ijk})_1 \ldots (a_{ijk})_l]^{(i)}_{l,\sigma,m},$$

откуда и из (4.3) вытекает, что сечения ориентации $(i)$ пространственной матрицы

$$[\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_1) \ldots \varphi_{(i)}(\mathbf{A}_l)]^{(i)}_{l,\sigma,m}$$

имеют вид

$$(a_{1jk})_1 (a_{\sigma(1)jk})_2 \ldots (a_{\sigma^{l-1}(1)jk})_l,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_{mjk})_1 (a_{\sigma(m)jk})_2 \ldots (a_{\sigma^{l-1}(m)jk})_l.$$

С использованием (4.4) эти же сечения переписываются в виде

$$A_{11}A_{2\sigma(1)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(1)}, \ldots, A_{1m}A_{2\sigma(m)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(m)}. \qquad (4.6)$$

Так как, согласно определению операции $[\ ]_{l,\sigma,m}$,

$$\varphi_{(i)}([\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,m}) =$$
$$= \varphi_{(i)}((A_{11}A_{2\sigma(1)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(1)}, \ldots, A_{1m}A_{2\sigma(m)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(m)})),$$

то, ввиду определения отображения $\varphi_{(i)}$, соответствующие сечения ориентации $(i)$ пространственной матрицы $\varphi_{(i)}([\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,m})$ имеют вид (4.6). Так как соответствующие сечения ориентации $(i)$ пространственных матриц

$$\varphi_{(i)}([\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,m}) \text{ и } [\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_1) \ldots \varphi_{(i)}(\mathbf{A}_l)]^{(i)}_{l,\sigma,m}$$

совпадают, то

$$\varphi_{(i)}([\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,m}) = [\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_1) \ldots \varphi_{(i)}(\mathbf{A}_l)]^{(i)}_{l,\sigma,m},$$

то есть $\varphi_{(i)}$ – изоморфизм.

Для $\varphi_{(j)}$ *и* $\varphi_{(k)}$ доказательство проводится аналогично. Лемма доказана.

Теорема 1.1 и лемма 4.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

***Теорема* 4.1** [10]. *Если подстановка* $\sigma \in S_m$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то универсальные алгебры* $< \mathbf{M}_{m\times n\times n}(P), [\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}>$, $<\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P), [\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}>$ *и* $< \mathbf{M}_{n\times n\times m}(P), [\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}>$ *являются изоморфными* $l$*-арными полугруппами. Если кольцо* $P$ *обладает единицей, то указанные* $l$*-арные полугруппы не являются полуабелевыми, в частности, абелевыми. В них нет единиц, если* $\sigma$ *– нетождественная подстановка.*

Первое утверждение теоремы 4.1 было анонсировано в [10, теорема 3.1].

***Лемма* 4.2** [10, леммы 3.2–3.4]. *Для всех* $\lambda \in P$, $s = 1, \ldots, l$ *в* $l$*-арных полугруппах из теоремы* 4.1 *верны соответственно тождества:*

$$[A_1 \ldots A_{s-1}(\lambda A_s)A_{s+1} \ldots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} = \lambda[A_1 \ldots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m};$$
$$[A_1 \ldots A_{s-1}(\lambda A_s)A_{s+1} \ldots A_l]^{(j)}_{l,\sigma,m} = \lambda[A_1 \ldots A_l]^{(j)}_{l,\sigma,m};$$
$$[A_1 \ldots A_{s-1}(\lambda A_s)A_{s+1} \ldots A_l]^{(k)}_{l,\sigma,m} = \lambda[A_1 \ldots A_l]^{(k)}_{l,\sigma,m}.$$

***Лемма* 4.3** [10, леммы 3.5–3.7]**.** $l$*-Арные операции* $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$, $[\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}$ и $[\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}$, *определенные соответственно на множествах* $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$, $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ *и* $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$, *являются дистрибутивными относительно сложения пространственных матриц.*

Напомним определения $(2, l)$-алгебры и $(2, l)$-кольца.

Линейное пространство $A$ над полем $P$ с определенной на нем $l$-арной операцией [ ] называется $(2, l)$-*алгеброй* над $P$, если выполняются следующие условия:

1) для любого $\lambda \in P$ и любых $a_1, \ldots, a_l \in A$ верно $\lambda[a_1 \ldots a_l] = [(\lambda a_1)a_2 \ldots a_l] =$
$= [a_1(\lambda a_2)a_3 \ldots a_l] = \ldots = [a_1 \ldots a_{l-1}(\lambda a_l)]$;

2) $l$-арная операция [ ] дистрибутивна относительно операции + сложения векторов, то есть в $A$ для любого $i = 1, \ldots, l$ выполняется тождество дистрибутивности

$$[a_1 \ldots a_{i-1}(b_1 + b_2)a_{i+1} \ldots a_l] =$$
$$= [a_1 \ldots a_{i-1}b_1a_{i+1} \ldots a_l] + [a_1 \ldots a_{i-1}b_2a_{i+1} \ldots a_l].$$

Если $l$-арная операция [ ] ассоциативна, то соответствующую $(2, l)$-алгебру $<$ A, +, [ ] $>$ называют *ассоциативной.*

Отображение $\varphi$ $(2, l)$-алгебры $<$ A, +, [ ] $>$ в $(2, l)$-алгебру $<$ B, +, [ ] $>$ называют гомоморфизмом, если:

$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x),\ \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$
$$\varphi([x_1 \ldots x_l]) = [\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_l)]$$

для любых $x, y, x_1, \ldots, x_l \in A$; $\lambda \in P$. Гомоморфизм $\varphi$ $(2, l)$-алгебр, являющийся взаимнооднозначным отображением, называют изоморфизмом.

Универсальную алгебру $< A, +, [\ ] >$ с бинарной и $l$-арной операциями + и [ ] называют $(2, l)$-*кольцом*, если $< A, + >$ – абелева группа и в $A$ выполняется тождество дистрибутивности. Если при этом $l$-арная операция [ ] ассоциативна, то $(2, l)$-кольцо $< A, +, [\ ] >$ называют *ассоциативным*.

С помощью второго и третьего равенств из определения гомоморфизма $(2, l)$-алгебр определяются гомоморфизм и изоморфизм $(2, l)$-колец.

Согласно замечанию 3.1, множества $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$, $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ и $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$ являются линейными пространствами относительно сложения пространственных матриц и умножения пространственных матриц на скаляры из поля $P$. Эти линейные пространства, рассматриваемые вместе с $l$-арными операциями $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$, $[\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}$ и $[\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}$ соответственно, ввиду лемм 4.2 и 4.3, являются $(2, l)$-алгебрами над $P$. Более того, ввиду теоремы 4.1, имеет место

***Теорема* 4.2** [10, предложение 3.8]. *Если подстановка* $\sigma \in S_m$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то универсальные алгебры* $<\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P), +, [\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}>$, $<\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P), +, [\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}>$ и $<\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P), +, [\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}>$, *где* $P$ *– поле, являются изоморфными ассоциативными* $(2, l)$-*алгебрами. В частности, указанные универсальные алгебры являются изоморфными* $(2, l)$-*кольцами.*

В [10] установлен ряд свойств $(2, l)$-алгебр из теоремы 4.2.

## 5 *Определители пространственных матриц*

В следующих определениях и далее $P$ – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

***Определение* 5.1**. *Определителем ориентации* ($i$) пространственной матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ называется произведение определителей всех ее сечений ориентации ($i$), обозначаемое символом $\det^{(i)}A$; *определителем ориентации* ($j$) пространственной матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ называется произведение определителей всех ее сечений ориентации ($j$), обозначаемое символом $\det^{(j)}A$; *определителем ориентации* ($k$) пространственной матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$ называется произведение определителей всех ее сечений ориентации ($k$), обозначаемое символом $\det^{(k)}A$.

Таким образом, согласно определению,

$$\det{}^{(i)}(a_{ijk})_{m\times n\times n} = \det(a_{1jk})\det(a_{2jk}) \ldots \det(a_{mjk}),$$
$$\det{}^{(j)}(a_{ijk})_{n\times m\times n} = \det(a_{i1k})\det(a_{i2k}) \ldots \det(a_{imk}),$$
$$\det{}^{(k)}(a_{ijk})_{n\times n\times m} = \det(a_{ij1})\det(a_{ij2}) \ldots \det(a_{ijm}).$$

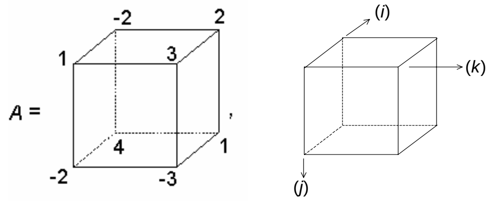
Понятно, что для кубической матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{n\times n\times n}(P)$ определены все три определителя $\det^{(i)}A$, $\det^{(j)}A$ и $\det^{(k)}A$. Поэтому естественно следующее

***Определение* 5.2**. *Полным определителем* кубической матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{n\times n\times n}(P)$ называется произведение ее определителей ориентаций *(i)*, ($j$) и ($k$), обозначаемое символом $\det A$, то есть

$$\det A = \det{}^{(i)}A\cdot\det{}^{(j)}A\cdot\det{}^{(k)}A.$$

Сравнивая определения 5.1 и 5.2 с определением кубических детерминантов из [1], [2], видим, что определители из определений 5.1 и 5.2 и кубические детерминанты из [1], [2] – это совершенно разные понятия.

***Пример* 5.1.** Пусть $\sigma = (12) \in S_2$, $l = 3$, $m = n = p = 2$, $P = \mathbb{Z}$,




Найдем все определители пространственной матрицы $A$:

$$\det{}^{(i)}A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-10) = -30;$$

$$\det{}^{(j)}A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8\cdot 10 = 80;$$

$$\det{}^{(k)}A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot 9 = 0;$$

$$\det A = 30\cdot 80\cdot 0 = 0.$$

Отметим, что для кубической матрицы $A$ из примера 5.1 кубический детерминант сигнатуры $[\,^{+}_{i}\,]$ равен – 1.

Определение 5.1 и определение определителя вектор-матрицы позволяют сформулировать следующее предложение, устанавливающее связь между определителями пространственных матриц и определителями вектор-матриц.

***Предложение* 5.1.** *Пусть* $A = (a_{ijk})$, $B = (b_{ijk})$, $C = (c_{ijk})$ – *пространственные матрицы из* $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$, $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ и $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$ *соответственно,*

$$\mathbf{A} = ((a_{1jk}), \ldots, (a_{mjk})),\ \mathbf{B} = ((b_{i1k}), \ldots, (b_{imk})),$$
$$\mathbf{C} = ((c_{ij1}), \ldots, (c_{ijm}))$$

– *вектор-матрицы из* $\mathbf{M}_n(m, P)$. *Тогда*

$$\det{}^{(i)}A = \det\mathbf{A},\ \det{}^{(j)}B = \det\mathbf{B},\ \det{}^{(k)}C = \det\mathbf{C}.$$

***Предложение* 5.2.** *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если у пространственной матрицы* $A$ *имеется строка направления* ($j$) *или* ($k$), *состоящая целиком из нулей кольца* $P$, *то* $\det^{(i)}A = 0$;

2) *если у пространственной матрицы* $A$ *имеется строка направления* ($i$) *или* ($k$), *состоящая целиком из нулей кольца* $P$, *то* $\det^{(j)}A = 0$;

3) *если у пространственной матрицы* $A$ *имеется строка направления* ($i$) *или* ($j$), *состоящая целиком из нулей кольца* $P$, *то* $\det^{(k)}A = 0$;

4) *если у кубической матрицы* $A$ *имеется строка, состоящая целиком из нулей кольца* $P$, *то* $\det A = 0$.

*Доказательство.* 1) Любая строка направления ($j$) или ($k$) лежит в некотором сечении ориентации ($i$), которое является квадратной матрицей порядка $n$. Определитель этой матрицы, содержащей строку или столбец, состоящие целиком из нулей, равен нулю. Так как определитель одного из сечений ориентации ($i$) равен нулю, то $\det^{(i)}(a_{ijk})_{m\times n\times n} = 0$.

2) и 3) доказываются аналогично.

4) Если у кубической матрицы одна из строк состоит целиком из нулей, то один из определителей из 1) – 3) равен нулю, но тогда $\det A = 0$. Предложение доказано.

***Предложение* 5.3.** *Для любого* $\lambda \in P$ *справедливы следующие утверждения*:

1) $\det^{(i)}(\lambda(a_{ijk})_{m\times n\times n}) = \lambda^{mn}\det^{(i)}(a_{ijk})_{m\times n\times n}$;

2) $\det^{(j)}(\lambda(a_{ijk})_{n\times m\times n}) = \lambda^{mn}\det^{(j)}(a_{ijk})_{n\times m\times n}$;

3) $\det^{(k)}(\lambda(a_{ijk})_{n\times n\times m}) = \lambda^{mn}\det^{(k)}(a_{ijk})_{n\times n\times m}$;

4) $\det(\lambda(a_{ijk})_{n\times n\times n}) = \lambda^{3n^2}\det(a_{ijk})_{n\times n\times n}$.

*Доказательство*. 1) Действительно,

$$\det{}^{(i)}(\lambda(a_{ijk})_{m\times n\times n}) = \det{}^{(i)}(\lambda a_{ijk})_{m\times n\times n}) =$$
$$= \det(\lambda a_{1jk})\det(\lambda a_{2jk}) \ldots \det(\lambda a_{mjk}) =$$
$$= \lambda^n\det(a_{1jk})\lambda^n\det(a_{2jk}) \ldots \lambda^n\det(a_{mjk}) =$$
$$=\lambda^{mn}\det(a_{1jk})\det(a_{2jk}) \ldots \det(a_{mjk}) = \lambda^{mn}\det{}^{(i)}(a_{ijk})_{m\times n\times n}.$$

2) и 3) доказываются аналогично.

4) Полагая для сокращения записей $(a_{ijk})_{n\times n\times n} = (a_{ijk})$ и используя 1) – 3), получим

$$\det(\lambda(a_{ijk})) =$$
$$= \det{}^{(i)}(\lambda(a_{ijk}))\det{}^{(j)}(\lambda(a_{ijk}))\det{}^{(k)}(\lambda(a_{ijk})) =$$
$$= \lambda^{n^2}\det{}^{(i)}(a_{ijk})\,\lambda^{n^2}\det{}^{(j)}(a_{ijk})\,\lambda^{n^2}\det{}^{(k)}(a_{ijk})) =$$
$$= \lambda^{3n^2}\det(a_{ijk}).$$

Предложение доказано.

Сформулируем ряд свойств определителей пространственных матриц, которые являются простыми следствиями соответствующих свойств определителей обычных матриц.

***Предложение* 5.4**. *Если в пространственной матрице* $A$ *из* $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ *зафиксировать* $s$ *сечений ориентации* ($i$), *а затем в каждом из этих сечений переставить любые две строки или два столбца, то определитель ориентации* ($i$) *полученной пространственной матрицы* $B$ *равен: определителю ориентации* ($i$) *пространственной матрицы* $A$, *если* $s$ – *четное; определителю ориентации* ($i$) *пространственной матрицы* $A$, *взятому со знаком минус, если* $s$ – *нечетное, то есть*

$$\det{}^{(i)}B = \det{}^{(i)}A,\ s \text{ – четное},$$
$$\det{}^{(i)}B = -\det{}^{(i)}A,\ s \text{ – нечетное}.$$

***Следствие* 5.1**. *Если в каждом сечении ориентации* ($i$) *пространственной матрицы* $A$ *из* $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ *переставить любые две строки или два столбца, то определитель ориентации* ($i$) *полученной пространственной матрицы* $B$ *равен: определителю ориентации* ($i$) *пространственной матрицы* $A$, *если* $m$ – *четное; определителю ориентации* ($i$) *пространственной матрицы* $A$, *взятому со знаком минус, если* $m$ – *нечетное, то есть*

$$\det{}^{(i)}B = \det{}^{(i)}A,\ m \text{ – четное},$$
$$\det{}^{(i)}B = -\det{}^{(i)}A,\ m \text{ – нечетное}.$$

***Замечание* 5.1**. Для определителей ориентации ($j$) пространственной матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ и определителей ориентации ($k$) пространственной матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$ верны утверждения, аналогичные предложению 5.4 и следствию 5.1.

Для полного определителя кубической матрицы справедливо следующее

***Предложение* 5.5**. *Если в кубической матрице* $A$ *из* $\mathbf{M}_{n\times n\times n}(P)$ *зафиксировать* $s$ *сечений ориентации* ($i$), $r$ *сечений ориентации* ($j$) *и* $t$ *сечений ориентации* ($k$), *а затем в каждом из этих сечений переставить любые две строки или два столбца, то для полных определителей полученной кубической матрицы* $B$ *и исходной кубической матрицы* $A$ *верны следующие равенства*:

$$\det B = \det A,\ s + r + t \text{ – четное},$$
$$\det B = -\det A,\ s + r + t \text{ – нечетное}.$$

***Следствие* 5.2**. *Если в каждом сечении ориентаций* ($i$), ($j$) *и* ($k$) *кубической матрицы* $A$ *из* $\mathbf{M}_{n\times n\times n}(P)$ *переставить любые две строки или два столбца, то для полных определителей полученной кубической матрицы* $B$ *и исходной кубической матрицы* $A$ *верны следующие равенства*:

$$\det B = \det A,\ n \text{ – четное},$$
$$\det B = -\det A,\ n \text{ – нечетное}.$$

***Предложение* 5.6**. *Если в некотором сечении ориентации* ($i$) *пространственной матрицы* $A$ *из* $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ *имеется две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то определитель ориентации* ($i$) *этой пространственной матрицы равен нулю:* $\det^{(i)}A = 0$. *Аналогичные утверждения справедливы для определителей ориентации* ($j$) *пространственных матриц из*

$\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ *и определителей ориентации* ($k$) *пространственных матриц из* $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$.

***Следствие* 5.3**. *Если среди всех сечений ориентаций* ($i$), ($j$) *и* ($k$) *кубической матрицы* $A$ *из* $\mathbf{M}_{n\times n\times n}(P)$ *имеется сечение, у которого две строки или два столбца одинаковы, то полный определитель этой кубической матрицы равен нулю:* $\det A = 0$.

***Предложение* 5.7**. *Пусть* $A$ *– пространственная матрица из* $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$,

$$r \geq 0,\ s \geq 0,\ t \geq 0,\ r + s + t = m.$$

*Если из всех сечений ориентации* ($i$) *этой пространственной матрицы* $r$ *сечений оставить неизменными, в каждом из* $s$ *сечений к некоторой строке прибавить соответственные элементы любой другой строки этого же сечения, умноженные на произвольный элемент из* $P$, *в каждом из оставшихся* $t$ *сечениях к некоторому столбцу прибавить соответственные элементы любого другого столбца этого же сечения, умноженные на произвольный элемент из* $P$, *то определитель ориентации* ($i$) *полученной пространственной матрицы* $B$ *будет равен определителю ориентации* ($i$) *пространственной матрицы* $A$. *Аналогичные утверждения справедливы для определителей ориентации* ($j$) *пространственных матриц из* $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ *и определителей ориентации* ($k$) *пространственных матриц из* $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$.

***Замечание* 5.2**. В предыдущем предложении суммируемые строки (столбцы) должны быть разными. Кроме того, номера суммируемых строк (столбцов) в различных сечениях не обязаны совпадать.

Из определения 5.1, ввиду коммутативности кольца $P$, вытекает

***Предложение* 5.8**. *Если пространственная матрица* $B$ *получена из пространственной матрицы* $A \in \mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ *в результате произвольной перестановки её сечений ориентации* ($i$), *то определители ориентации* ($i$) *обеих пространственных матриц совпадают:*

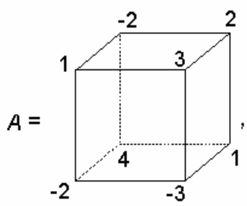
$$\det{}^{(i)}A = \det{}^{(i)}B.$$

*Аналогичные утверждения справедливы для определителей ориентации* ($j$) *пространственных матриц из* $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ *и определителей ориентации* ($k$) *пространственных матриц из* $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$.

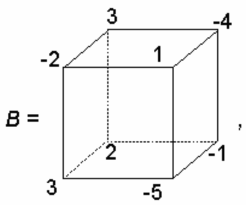
### *6 Произведения определителей пространственных матриц*

Начнем с примера.

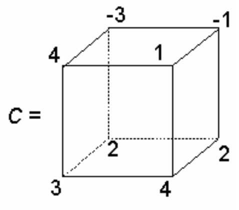
***Пример* 6.1.** Пусть $\sigma = (12) \in S_2$, $l = 3$, $m = n = p = 2$, $P = \mathbb{Z}$,

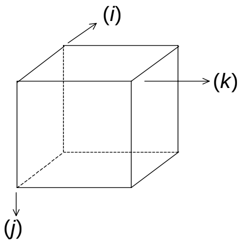



,




,



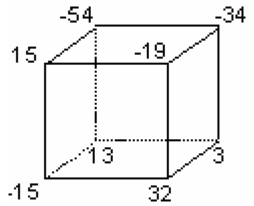

Так как $\det^{(i)}A = -30$,

$$\det{}^{(i)}B = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7\cdot 5 = 35,$$

$$\det{}^{(i)}C = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 13\cdot(-4) = -52,$$

то $\det^{(i)}A\cdot\det^{(i)}B\cdot\det^{(i)}C = 54600$. А так как, согласно [10, пример 2.1],

$$[ABC]^{(i)}_{3,\,(12),\,2} =$$




то

$$\det{}^{(i)}[ABC]^{(i)}_{3,\,(12),\,2} = \begin{vmatrix} 15 & -19 \\ -15 & 32 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -54 & -34 \\ 13 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 195\cdot 280 = 54600.$$

Следовательно,

$$\det{}^{(i)}[ABC]^{(i)}_{3,\,(12),\,2} = \det{}^{(i)}A\cdot\det{}^{(i)}B\cdot\det{}^{(i)}C. \quad (6.1)$$

Так как

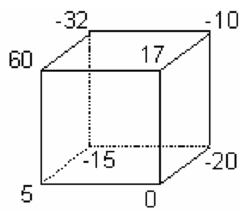
$$\det{}^{(j)}A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8\cdot 10 = 80,$$

$$\det{}^{(j)}B = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\ 5\cdot 7 = 35,$$

$$\det{}^{(j)}C = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1\cdot(-2) = 2,$$

то $\det^{(j)}A\cdot\det^{(j)}B\cdot\det^{(j)}C = 5600$. А так как, согласно [10, пример 2.1],

$$[ABC]^{(j)}_{3,\,(12),\,2} =$$




то

$$\det{}^{(j)}[ABC]^{(j)}_{3,\,(12),\,2} = \begin{vmatrix} 60 & 17 \\ -32 & -10 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -15 & -20 \end{vmatrix} =$$

$$= -56\cdot(-100) = 5600.$$

Следовательно,

$$\det{}^{(j)}[ABC]^{(j)}_{3,\,(12),\,2} = \det{}^{(j)}A\cdot\det{}^{(j)}B\cdot\det{}^{(j)}C. \quad (6.2)$$

Так как

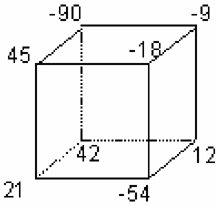
$$\det{}^{(k)}A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot 9 = 0,$$

$$\det{}^{(k)}B = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -13\cdot(-21) = 273,$$

$$\det{}^{(k)}C = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 17\cdot 6 = 102,$$

то $\det^{(k)}A\cdot\det^{(k)}B\cdot\det^{(k)}C = 0$. А так как, согласно [10, пример 2.1],

$$[ABC]^{(k)}_{3,(12),2} =$$




то

$$\det{}^{(k)}[ABC]^{(k)}_{3,(12),2} = \begin{vmatrix} 45 & 21 \\ -90 & -42 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -18 & -54 \\ -9 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\cdot 702 = 0.$$

Следовательно,

$$\det{}^{(k)}[ABC]^{(k)}_{3,(12),2} = \det{}^{(k)}A\cdot\det{}^{(k)}B\cdot\det{}^{(k)}C. \quad (6.3)$$

Равенства (6.1)–(6.3) наводят на мысль о справедливости более общего утверждения, частными случаями которого они являются. Следующая теорема показывает, что это действительно так.

***Теорема* 6.1**. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *для любых пространственных матриц* $A_1, \ldots, A_l$ *из* $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ *верно*

$$\det{}^{(i)}[A_1 \ldots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} = \det{}^{(i)}A_1 \ldots \det{}^{(i)}A_l;$$

2) *для любых пространственных матриц* $A_1, \ldots, A_l$ *из* $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ *верно*

$$\det{}^{(j)}[A_1 \ldots A_l]^{(j)}_{l,\sigma,m} = \det{}^{(j)}A_1 \ldots \det{}^{(j)}A_l;$$

3) *для любых пространственных матриц* $A_1, \ldots, A_l$ *из* $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$ *верно*

$$\det{}^{(k)}[A_1 \ldots A_l]^{(k)}_{l,\sigma,m} = \det{}^{(k)}A_1 \ldots \det{}^{(k)}A_l;$$

4) *для любых кубических матриц* $A_1, \ldots, A_l$ *из* $\mathbf{M}_{n\times n\times n}(P)$ *верно*

$$\det[A_1 \ldots A_l]_{l,\sigma,m} = \det A_1 \ldots \det A_l.$$

*Доказательство.* 1) Обозначим через $(a_{rjk})_s$ $r$-ое сечение ориентации $(i)$ трехмерной матрицы $A_s = (a_{rjk})_s$, где $r = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, l$, а через $(a_{rjk})$ – $r$-ое сечение ориентации $(i)$ трехмерной матрицы $A = [A_1 \ldots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,k}$.

Так как, согласно определению 5.1,

$$\det{}^{(i)}A_1 = \det(a_{1jk})_1 \ldots \det(a_{mjk})_1, \ldots$$
$$\ldots, \det{}^{(i)}A_l = \det(a_{1jk})_l \ldots \det(a_{mjk})_l,$$

то

$$\det{}^{(i)}A_1 \ldots \det{}^{(i)}A_l = \det(a_{1jk})_1 \ldots$$
$$\ldots \det(a_{mjk})_1 \ldots \det(a_{1jk})_l \ldots \det(a_{mjk})_l. \quad (6.4)$$

Согласно тому же определению 5.1,

$$\det{}^{(i)}[A_1 \ldots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} = \det{}^{(i)}A =$$
$$= \det(a_{1jk}) \ldots \det(a_{mjk}),$$

откуда, ввиду (4.3), получаем

$$\det{}^{(i)}[A_1 \ldots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} =$$
$$= \det((a_{1jk})_1(a_{\sigma(1)jk})_2 \ldots (a_{\sigma^{l-1}(1)jk})_l) \ldots$$
$$\ldots \det((a_{mjk})_1(a_{\sigma(m)jk})_2 \ldots (a_{\sigma^{l-1}(m)jk})_l) =$$
$$= \det(a_{1jk})_1\det(a_{\sigma(1)jk})_2 \ldots \det(a_{\sigma^{l-1}(1)jk})_l \ldots$$
$$\ldots \det(a_{mjk})_1\det(a_{\sigma(m)jk})_2 \ldots \det(a_{\sigma^{l-1}(m)jk})_l. \quad (6.5)$$

Правые части в (6.4) и (6.5) состоят из $ml$ сомножителей. Так как $\sigma \in S_m$, то для любого $t = 1, \ldots, l-1$ множество $\{\sigma^t(1), \ldots, \sigma^t(m)\}$ совпадает с множеством $\{1, \ldots, m\}$. Поэтому в правой части (6.5) для любого $s = 1, \ldots, l$ присутствуют в качестве сомножителей определители $\det(a_{1jk})_s, \ldots, \det(a_{mjk})_s$. Это означает, что правые части в (6.4) и (6.5) состоят из одних и тех же сомножителей. А так как $P$ – коммутативное кольцо, то правые части в (6.4) и (6.5) совпадают. Следовательно, равны и левые части в (6.4) и (6.5), то есть верно равенство из 1).

2) и 3) доказываются аналогично 1).

4) Используя 1) – 3) и коммутативность кольца $P$, получим

$$\det[A_1 \ldots A_l]_{l,\sigma,m} =$$
$$= \det{}^{(i)}[A_1 \ldots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m} \det{}^{(j)}[A_1 \ldots A_l]^{(j)}_{l,\sigma,m} \det{}^{(k)}[A_1 \ldots A_l]^{(k)}_{l,\sigma,m} =$$
$$= \det{}^{(i)}A_1 \ldots \det{}^{(i)}A_l \det{}^{(j)}A_1 \ldots \det{}^{(j)}A_l \det{}^{(k)}A_1 \ldots \det{}^{(k)}A_l =$$
$$= \det{}^{(i)}A_1 \det{}^{(j)}A_1 \det{}^{(k)}A_1 \ldots \det{}^{(i)}A_l \det{}^{(j)}A_l \det{}^{(k)}A_l =$$
$$= \det A_1 \ldots \det A_l,$$

то есть верно равенство из 4). Теорема доказана.

### *7 Транспонирование пространственных матриц*

***Определение* 7.1**. Пространственная матрица $B = (b_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m\times p\times n}(P)$ называется $(i)$-*транспонированной* для пространственной матрицы $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m\times n\times p}(P)$, если все ее сечения ориентации $(i)$ являются транспонированными матрицами для соответствующих сечений ориентации $(i)$ пространственной матрицы $A$, то есть

$$(b_{tjk}) = (a_{tjk})', \; t = 1, \ldots, m.$$

Аналогично определяются $(j)$-*транспонированные* пространственные матрицы и $(k)$-*транспонированные* пространственные матрицы.

Для обозначения $(r)$-транспонированной пространственной матрицы для пространственной матрицы $A$, где $r \in \{i, j, k\}$, будем употреблять следующее обозначение: $A^{(\prime, r)} = (a_{ijk})^{(\prime, r)}$.

Можно заметить, что для кубических матриц понятие $(i)$-транспонируемости совпадает с понятием транспонируемости по индексам $j$ и $k$ [1], [2]. Аналогично, $(j)$-транспонируемость совпадает с транспонируемостью по индексам $i$ и $k$, а $(k)$-транспонируемость совпадает с транспонируемостью по индексам $i$ и $j$. Поэтому, следуя [1], [2], для транспонированных кубических матриц $A^{(\prime, i)}$, $A^{(\prime, j)}$ и $A^{(\prime, k)}$ можно использовать также соответственно обозначения $A^{(j,k)}$, $A^{(i,k)}$ и $A^{(i,j)}$.

Следующее предложение является аналогом соответствующего утверждения для обычных матриц.

***Предложение* 7.1.** *Пусть* $A = (a_{ijk})$, $B = (b_{ijk})$, $C = (c_{ijk})$ – *пространственные матрицы из* $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$, $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ и $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$ *соответственно. Тогда*

$$\det{}^{(i)}A = \det{}^{(i)}A^{(\prime,\, i)},\ \det{}^{(j)}A = \det{}^{(j)}A^{(\prime,\, j)},$$
$$\det{}^{(k)}A = \det{}^{(k)}A^{(\prime,\, k)}.$$

Следующая лемма устанавливает связь между операциями транспонирования вектор-матриц и пространственных матриц.

***Лемма* 7.1.** *Пусть* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ – *вектор-матрицы из* $\mathbf{M}_{n\times p}(m, P)$, $\mathbf{M}_{m\times p}(n, P)$ *и* $\mathbf{M}_{m\times n}(p, P)$ *соответственно, где* $P$ – *ассоциативное кольцо с единицей. Тогда:*

1) $(\varphi_{(i)}(\mathbf{A}))^{(\prime,\, i)} = \varphi_{(i)}(\mathbf{A}')$;

2) $(\varphi_{(j)}(\mathbf{B}))^{(\prime,\, j)} = \varphi_{(j)}(\mathbf{B}')$;

3) $(\varphi_{(k)}(\mathbf{C}))^{(\prime,\, k)} = \varphi_{(k)}(\mathbf{C}')$.

*Доказательство*. 1) Пусть для определённости

$$\mathbf{A} = (A_1 = (a_{1jk}), \ldots, A_m = (a_{mjk})).$$

Тогда $\varphi_{(i)}(\mathbf{A}) = A = (a_{ijk})$. Если

$$(\varphi_{(i)}(\mathbf{A}))^{(\prime,\, i)} = B = (b_{ijk}), \tag{7.1}$$

то, согласно определению транспонированной пространственной матрицы,

$$(b_{1jk}) = (a_{1jk})', \ldots, (b_{mjk}) = (a_{mjk})'. \tag{7.2}$$

Так как, согласно определению транспонированной вектор-матрицы,

$$\mathbf{A}' = (A_1' = (a_{1jk})', \ldots, A_m' = (a_{mjk})'),$$

то, полагая

$$\varphi_{(i)}(\mathbf{A}') = C = (c_{ijk}), \tag{7.3}$$

получим

$$(c_{1jk}) = (a_{1jk})', \ldots, (c_{mjk}) = (a_{mjk})'. \tag{7.4}$$

Из (7.2) и (7.4) вытекает $B = C$, откуда, а также из (7.1) и (7.3) следует равенство из 1).

Равенства из 2) и 3) доказываются аналогично. Лемма доказана.

***Теорема* 7.1.** *Пусть* $\sigma$ – *подстановка из* $S_m$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$,

$$A_1 = (a_{ijk})_1, \ldots, A_l = (a_{ijk})_l$$

– *произвольные пространственные матрицы из* $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$, *где* $P$ – *ассоциативное кольцо с единицей. Тогда*

$$([A_1A_2 \ldots A_{l-1}A_l]^{(i)}_{l,\, \sigma,\, m})^{(\prime,\, i)} =$$
$$= [A_l{}^{(\prime,\, i)}A_{l-1}{}^{(\prime,\, i)} \ldots A_2{}^{(\prime,\, i)}A_1{}^{(\prime,\, i)}]^{(i)}_{l,\, \sigma^{-1},\, m}.$$

*Доказательство.* Поставим в соответствие каждой пространственной матрице $A_t$ вектор-матрицу

$$\mathbf{A}_t = ((a_{1jk})_t, \ldots, (a_{mjk})_t),\ t = 1, \ldots, l$$

из $\mathbf{M}_n(m, P)$. Ясно, что $\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_t) = A_t$. Так как по лемме 4.1 $\varphi_{(i)}$ – изоморфизм соответствующих $l$-арных полугрупп, то, применяя теорему 1.2 и лемму 7.1, получим

$$([A_1A_2 \ldots A_{l-1}A_l]^{(i)}_{l,\, \sigma,\, m})^{(\prime,\, i)} =$$
$$= ([\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_1)\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_2) \ldots \varphi_{(i)}(\mathbf{A}_{l-1})\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_l)]^{(i)}_{l,\, \sigma,\, m})^{(\prime,\, i)} =$$
$$= (\varphi_{(i)}[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_{l-1}\mathbf{A}_l]_{l,\, \sigma,\, m})^{(\prime,\, i)} =$$
$$= \varphi_{(i)}([\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_{l-1}\mathbf{A}_l]'_{l,\, \sigma,\, m}) =$$
$$= \varphi_{(i)}([\mathbf{A}_l' \ \mathbf{A}_{l-1}' \ \ldots \ \mathbf{A}_2' \ \mathbf{A}_1']_{l,\, \sigma^{-1},\, m}) =$$
$$= [\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_l')\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_{l-1}') \ldots \varphi_{(i)}(\mathbf{A}_2')\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_1')]^{(i)}_{l,\, \sigma^{-1},\, m} =$$
$$= [(\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_l))^{(\prime,\, i)}(\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_{l-1}))^{(\prime,\, i)} \ldots$$
$$\ldots (\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_2))^{(\prime,\, i)}(\varphi_{(i)}(\mathbf{A}_1))^{(\prime,\, i)}]^{(i)}_{l,\, \sigma^{-1},\, m} =$$
$$= [A_l{}^{(\prime,\, i)}A_{l-1}{}^{(\prime,\, i)} \ldots A_2{}^{(\prime,\, i)}A_1{}^{(\prime,\, i)}]^{(i)}_{l,\, \sigma^{-1},\, m},$$

то есть верно равенство из формулировки теоремы. Теорема доказана.

Далее во всех следствиях $P$ – ассоциативное кольцо с единицей.

Если $\sigma$ – цикл длины $t$ из $S_m$, $s \geq 1$, $l = st + 1$, то $\sigma^l = \sigma$. Поэтому имеет место

***Следствие* 7.1**. *Если* $\sigma$ – *цикл длины* $t$ *из* $S_m$, $s \geq 1$, *то для любых пространственных матриц* $A_1, \ldots, A_{st+1}$ *из* $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ *верно равенство*

$$([A_1A_2 \ldots A_{st}A_{st+1}]^{(i)}_{st+1,\, \sigma,\, m})^{(\prime,\, i)} =$$
$$= [A_{st+1}{}^{(\prime,\, i)}A_{st}{}^{(\prime,\, i)} \ldots A_2{}^{(\prime,\, i)}A_1{}^{(\prime,\, i)}]^{(i)}_{st+1,\, \sigma^{-1},\, m}.$$

*В частности, если* $s = 1$, *то*

$$([A_1A_2 \ldots A_tA_{t+1}]^{(i)}_{t+1,\, \sigma,\, m})^{(\prime,\, i)} =$$
$$= [A_{t+1}{}^{(\prime,\, i)}A_t{}^{(\prime,\, i)} \ldots A_2{}^{(\prime,\, i)}A_1{}^{(\prime,\, i)}]^{(i)}_{t+1,\, \sigma^{-1},\, m}.$$

Полагая в следствии 7.1 $t = m$, получим

***Следствие* 7.2**. *Если* $\sigma$ – *цикл длины* $m$ *из* $S_m$, $s \geq 1$, *то для любых пространственных матриц* $A_1, \ldots, A_{sm+1}$ *из* $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ *верно равенство*

$$([A_1A_2 \ldots A_{sm}A_{sm+1}]^{(i)}_{sm+1,\, \sigma,\, m})^{(\prime,\, i)} =$$
$$= [A_{sm+1}{}^{(\prime,\, i)}A_{sm}{}^{(\prime,\, i)} \ldots A_2{}^{(\prime,\, i)}A_1{}^{(\prime,\, i)}]^{(i)}_{sm+1,\, \sigma^{-1},\, m}.$$

*В частности, если* $s = 1$, *то*

$$([A_1A_2 \ldots A_mA_{m+1}]^{(i)}_{m+1,\, \sigma,\, m})^{(\prime,\, i)} =$$
$$= [A_{m+1}{}^{(\prime,\, i)}A_m{}^{(\prime,\, i)} \ldots A_2{}^{(\prime,\, i)}A_1{}^{(\prime,\, i)}]^{(i)}_{m+1,\, \sigma^{-1},\, m}.$$

Полагая в следствии 7.2 $\sigma = (12 \ldots m)$, получим

***Следствие* 7.3**. *Для любых пространственных матриц* $A_1, \ldots, A_{sm+1}$ *из* $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$, *где* $s \geq 1$, *верно равенство*

$$([A_1A_2 \ldots A_{sm}A_{sm+1}]^{(i)}_{sm+1,\, (12\ldots m),\, m})^{(\prime,\, i)} =$$
$$= [A_{sm+1}{}^{(\prime,\, i)}A_{sm}{}^{(\prime,\, i)} \ldots A_2{}^{(\prime,\, i)}A_1{}^{(\prime,\, i)}]^{(i)}_{sm+1,\, (m\ldots 21),\, m}.$$

*В частности, если* $s = 1$, *то*

$$([A_1A_2 \ldots A_mA_{m+1}]^{(i)}_{m+1,\, (12\ldots m),\, m})^{(\prime,\, i)} =$$
$$= [A_{m+1}{}^{(\prime,\, i)}A_m{}^{(\prime,\, i)} \ldots A_2{}^{(\prime,\, i)}A_1{}^{(\prime,\, i)}]^{(i)}_{m+1,\, (m\ldots 21),\, m}.$$

Так как для любой транспозиции $\sigma \in S_m$ верно $\sigma = \sigma^{-1}$, $\sigma^{2m+1} = \sigma$, то, полагая в следствии 7.1 $t = 2$, получим

***Следствие* 7.4**. *Если* $\sigma$ – *транспозиция из* $S_m$, $s \geq 1$, *то для любых пространственных матриц* $A_1, \ldots, A_{2s+1}$ *из* $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ *верно равенство*

$$([A_1A_2 \ldots \mathrm{A}_{2s}\mathrm{A}_{2s+1}]^{(i)}_{2s+1,\, \sigma,\, m})^{(\prime,\, i)} =$$
$$= [A_{2s+1}{}^{(\prime,\, i)}A_{2s}{}^{(\prime,\, i)} \ldots A_2{}^{(\prime,\, i)}A_1{}^{(\prime,\, i)}]^{(i)}_{2s+1,\, \sigma,\, m}.$$

*В частности, если* $s = 1$, *то*

$$([A_1A_2A_3]^{(i)}_{3,\, \sigma,\, m})^{(\prime,\, i)} = [A_3{}^{(\prime,\, i)}A_2{}^{(\prime,\, i)}A_1{}^{(\prime,\, i)}]^{(i)}_{3,\, \sigma,\, m}.$$

Следствие 7.4 можно получить и из следствия 7.2 при $m = 2$.

Если в следствии 7.4 положить $m = 2$, то $\sigma = (12)$ и верно

***Следствие 7.5***. *Для любых пространственных матриц $A_1, \ldots, A_{2s+1}$ из $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ верно равенство*

$$([A_1A_2 \ldots A_{2s}A_{2s+1}]^{(i)}_{2s+1,(12),2})^{(\iota,i)} =$$
$$= [A_{2s+1}{}^{(\iota,i)}A_{2s}{}^{(\iota,i)} \ldots A_2{}^{(\iota,i)}A_1{}^{(\iota,i)}]^{(i)}_{2s+1,(12),2}.$$

*В частности, если $s = 1$, то*

$$([A_1A_2A_3]^{(i)}_{3,(12),2})^{(\iota,i)} = [A_3{}^{(\iota,i)}A_2{}^{(\iota,i)}A_1{}^{(\iota,i)}]^{(i)}_{3,(12),2}.$$

Заметим, что следствие 7.5 может быть также получено из следствия 7.3 при $m = 2$.

***Замечание* 7.1.** Все равенства из теоремы 7.1 и её следствий 7.1–7.5 останутся верными, если в них заменить пространственные матрицы из $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ пространственными матрицами из $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ (соответственно пространственными матрицами из $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$), а ориентацию $(i)$ на ориентацию $(j)$ (соответственно на ориентацию $(k)$).

Из теоремы 6.1 и предложения 7.1 вытекает

***Предложение* 7.2**. *Если $A_1, \ldots, A_l$ – пространственные матрицы из $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$, где $P$ – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, то определитель $\det^{(i)}[A_1 \ldots A_l]^{(i)}_{l,\sigma,m}$ ориентации $(i)$ не изменится, если в нём любые $s$ пространственных матриц, где $s = 1, \ldots, l$, заменить $(i)$-транспонированными пространственными матрицами. В частности, для $l = 3$, $m = 2$,* $\sigma = (12)$ имеем

$$\det{}^{(i)}[ABC]^{(i)}_{3,(12),2} = \det{}^{(i)}[A'BC]^{(i)}_{3,(12),2} =$$
$$= \det{}^{(i)}[AB'C]^{(i)}_{3,(12),2} = \det{}^{(i)}[ABC']^{(i)}_{3,(12),2} =$$
$$= \det{}^{(i)}[A'B'C]^{(i)}_{3,(12),2} = \det{}^{(i)}[A'BC']^{(i)}_{3,(12),2} =$$
$$= \det{}^{(i)}[AB'C']^{(i)}_{3,(12),2} = \det{}^{(i)}[A'B'C']^{(i)}_{3,(12),2}.$$

*Аналогичные утверждения справедливы для определителей ориентации $(j)$ пространственных матриц из $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ и определителей ориентации $(k)$ пространственных матриц из $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$.*

### *8 Аналогии и обобщения*

1. В [6] показано, что всякой функции, определенной на множестве обычных матриц над некоторым кольцом $P$ со значениями в $P$, можно поставить в соответствие функцию, определенную на множестве вектор-матриц над $P$ со значениями в $P$. Точно так же на множестве пространственных матриц над ассоциативным коммутативным кольцом $P$ с единицей помимо функций $\det^{(i)}$, $\det^{(j)}$, $\det^{(k)}$ и det можно рассматривать и другие функции, которые являются аналогами функций на множестве обычных матриц со значениями в $P$.

В качестве примера рассмотрим аналоги функции per: $\mathbf{M}_n(P) \to P$, где

$$\mathrm{per}A = \sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

для матрицы $A \in \mathbf{M}_n(P)$. Значение per$A$ называют перманентом матрицы $A$ [15].

***Определение* 8.1**. *Перманентом ориентации* $(i)$ пространственной матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ называется произведение перманентов всех ее сечений ориентации $(i)$, обозначаемое символом $\mathrm{per}^{(i)}A$; *перманентом ориентации* $(j)$ пространственной матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ называется произведение перманентов всех ее сечений ориентации $(j)$, обозначаемое символом $\mathrm{per}^{(j)}A$; *перманентом ориентации* $(k)$ пространственной матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$ называется произведение перманентов всех ее сечений ориентации $(k)$, обозначаемое символом $\mathrm{per}^{(k)}A$.

***Определение* 8.2**. *Полным перманентом* кубической матрицы $A$ из $\mathbf{M}_{n\times n\times n}(P)$ называется произведение ее перманентов ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$, обозначаемое символом per$A$, то есть

$$\mathrm{per}A = \mathrm{per}^{(i)}A\cdot\mathrm{per}^{(j)}A\cdot\mathrm{per}^{(k)}A.$$

Сравнивая определения 8.1 и 8.2 с определением кубического перманента из [1], [2], видим, что перманенты из определений 8.1 и 8.2 и кубический перманент из [1], [2] – это совершенно разные понятия.

Так как перманент определяется [15] не только для квадратных матриц, но и для матриц размера $m \times n$, где $m < n$, то можно определить и изучать перманенты фиксированной ориентации и полный перманент пространственной матрицы, у которой все три размера различны.

Для пространственных матриц можно определить и аналоги супердетерминанта, аналогично тому, как это было сделано для вектор-матриц.

В связи с существованием различных обобщений понятия определителя на случай некоммутативных колец возникает задача *определения и изучения их аналогов для пространственных матриц*.

2. Рассмотрим три отображения множества всех пространственных матриц над ассоциативным кольцом $P$ с единицей в себя: отображение

$$R: A = (a_{ijk})_{m\times n\times p} \to A^{(\iota,i)} = B = (b_{ijk})_{m\times p\times n},$$

ставящее в соответствие любой пространственной матрице $A = (a_{ijk})_{m\times n\times p}$ $(i)$-транспонированную к ней пространственную матрицу $A^{(\iota,i)}$, где

$$b_{ijk} = a_{\alpha(i)\alpha(j)\alpha(k)} = a_{ikj},\ \alpha = (jk);$$

отображение

$$S: A = (a_{ijk})_{m\times n\times p} \to A^{(\iota,j)} = C = (c_{ijk})_{p\times n\times m},$$

ставящее в соответствие любой пространственной матрице $A = (a_{ijk})_{m\times n\times p}$ $(j)$-транспонированную к ней пространственную матрицу $A^{(\iota,j)}$, где

$$c_{ijk} = a_{\beta(i)\beta(j)\beta(k)} = a_{kji},\ \beta = (ik);$$

отображение

$$T: A = (a_{ijk})_{m\times n\times p} \to A^{(\iota,k)} = D = (d_{ijk})_{m\times p\times n},$$

ставящее в соответствие любой пространственной матрице $A = (a_{ijk})_{m\times n\times p}$ $(k)$-транспонированную к ней пространственную матрицу $A^{(\prime, k)}$, где

$$d_{ijk} = a_{\gamma(i)\gamma(j)\gamma(k)} = a_{jik},\ \gamma = (ij).$$

Так как для любого $U \in \{R, S, T\}$ композиция $UU$ является тождественным преобразованием, то множество $\{R, S, T\}$ не является замкнутым относительно бинарной операции $UV$.

С другой стороны,

$$UUV = VUU = V$$

для любых $U, V \in \{R, S, T\}$. Кроме того,

$$UVU = W,\ UVW = V$$

для любых не равных между собой

$$U, V, W \in \{R, S, T\}.$$

Записанные равенства показывают, что справедливо

***Предложение* 8.1.** *Множество* $\{R, S, T\}$ *является полуабелевой идемпотентной тернарной группой относительно тернарной операции*

$$[UVW] = UVW.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколов, Н.П.* Пространственные матрицы и их приложения / Н.П. Соколов. – М. : Наука, 1960. – 300 с.

2. *Соколов, Н.П.* Введение в теорию пространственных матриц / Н.П. Соколов. – Киев : Наукова думка, 1972. – 175 с.

3. *Post, E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

4. *Гальмак, А.М.* Вектор-матрицы /А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – №1 (37), серия В. – С. 30–37.

5. *Гальмак, А.М.* Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – №1 (6). – С. 52–56.

6. *Гальмак, А.М.* Вектор-определители и определители вектор-матриц / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2 (7). – С. 1–5.

7. *Гальмак, А.М.* σ-Согласованные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – № 2 (37), серия В. – С. 30–37.

8. *Гальмак, А.М.* О σ-согласованных вектор-матрицах / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 92–99.

9. *Гальмак, А.М.* Полиадические группы вектор-матриц / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – № 2 (37), серия В. – С. 30–37.

10. *Гальмак, А.М.* Полиадические операции на множестве пространственных матриц / А.М. Гальмак // Веснік ВДУ ім. П.М. Машэрава. – 2011. – № 2 (62). – С. 15–21.

11. *Русаков С.А.* Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Мінск : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с

12. *Гальмак, А.М.* *n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

13. *Гальмак, А.М.* *n*-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.

14. *Гальмак, А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

15. *Минк, Х.* Перманенты / Х. Минк. – М. : Мир., 1982. – 213 с.

*Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА – 002).*

*Поступила в редакцию 28.10.11.*