Проблемы физики, математики и техники, № 3 (16), 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О *p*-НИЛЬПОТЕНТНОСТИ ОДНОГО КЛАССА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.А. Васильев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON *p*-NILPOTENCY OF ONE CLASS OF FINITE GROUPS

V.A. Vasil'ev

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Подгруппа H называется модулярной в группе G, если она является модулярным элементом (в смысле Куроша) решетки $L(G)$ всех подгрупп группы G. Модулярным ядром H_{mG} подгруппы H в группе G называется подгруппа, порожденная всеми теми подгруппами из H, которые модулярны в G. В работе, используя понятие m-добавляемой подгруппы, которое является расширением понятий модулярной и добавляемой подгрупп соответственно, получен новый признак p-нильпотентности группы.

Ключевые слова: *конечная группа, p-нильпотентная группа, модулярная подгруппа, модулярное ядро, m-добавляемая подгруппа, максимальная подгруппа, циклическая подгруппа, силовская p-подгруппа.*

A subgroup H of a group G is called modular in G if H is a modular element (in sense of Kurosh) of the lattice $L(G)$ of all subgroups of G. The subgroup of H generated by all modular subgroups of G contained in H is called the modular core of H and denoted by H_{mG}. In the paper a new criterion of the p-nilpotency of a group was obtained on the basis of the concept of the m-supplemented subgroup which is the extension of concepts of modular and supplemented subgroups respectively.

Keywords: *finite group, p-nilpotent group, modular subgroup, modular core, m-supplemented subgroup, maximal subgroup, cyclic subgroup, Sylow p-subgroup.*

Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны.

Напомним, что подгруппа M группы G называется модулярной подгруппой в G, если выполняются следующие условия:

(1) $\langle X, M\cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X\le G$, $Z\le G$ таких, что $X\le Z$, и

(2) $\langle M, Y\cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y\le G$, $Z\le G$ таких, что $M\le Z$.

Отметим, что модулярная подгруппа является модулярным элементом (в смысле Куроша, [1, гл. 2, с. 43]) решетки всех подгрупп группы. Понятие модулярной подгруппы впервые анализировалось в работе Р. Шмидта [2] и оказалось полезным в вопросах классификации составных групп. В частности, в монографии Р. Шмидта [1, гл. 5] модулярные подгруппы были использованы для получения новых характеризаций различных классов групп. Подгруппа, порожденная двумя модулярными подгруппами, сама является модулярной (см. раздел 5.1 в [1]). Таким образом, каждая подгруппа H группы G обладает наибольшей содержащейся в ней модулярной подгруппой H_{mG} группы G. Эту подгруппу H_{mG} называют модулярным ядром подгруппы H. Базируясь на понятии модулярного ядра, в работе [3] было введено следующее обобщение понятия модулярной подгруппы.

Определение. *Подгруппа H группы G называется m-добавляемой в G, если в G существует такая подгруппа K, что $G=HK$ и $H\cap K\le H_{mG}$.*

Целью данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть G – группа и P – силовская p-подгруппа группы G, где p – простой делитель $|G|$. Предположим, что по крайней мере одно из следующих утверждений выполняется:*

(i) $(p-1,|G|)=1$ *и каждая максимальная подгруппа из P, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, является m-добавляемой в G;*

(ii) $(p-1,|G|)=1$ *и каждая циклическая подгруппа из P простого порядка или порядка 4 (если $p=2$ и P неабелева), не имеющая p-нильпотентного добавления в G, является m-добавляемой в G.*

Тогда G является p-нильпотентной группой.

Мы докажем эту теорему в разделе 3. Используемая в статье терминология стандартна и при необходимости мы отсылаем читателя к монографиям [4], [5], [6].

1 Некоторые предварительные результаты

Следующие известные свойства модулярных подгрупп будут использованы в данной работе.

***Лемма* 1.1** [1, гл. 5, раздел 5.1]. *Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *если M_1 и M_2 являются модулярными в G подгруппами, то $\langle M_1, M_2 \rangle$ – модулярная в G подгруппа*;

(b) *если N – нормальная в G подгруппа, то N является модулярной в G подгруппой*;

(c) *если N – нормальная в G подгруппа и M – модулярная в G подгруппа, то MN / N – модулярная в G / N подгруппа.*

Символом $Z_{\mathfrak{U}}(G)$ обозначают наибольшую нормальную подгруппу группы G, у которой все G-главные факторы цикличны ($Z_{\mathfrak{U}}(G) = 1$, если в G нет неединичных нормальных подгрупп с таким свойством).

***Лемма* 1.2** [1, гл. 5, теорема 5.2.5]. *Если подгруппа H модулярна в G, то*

$$H^G / H_G \le Z_{\mathfrak{U}}(G / H_G).$$

Общие свойства m-добавляемых подгрупп описывает следующая лемма.

***Лемма* 1.3** [3]. *Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если H является m-добавляемой в G подгруппой и $H \le M \le G$, то H является m-добавляемой в M подгруппой.*

(2) *пусть N – нормальная подгруппа в G и $N \le H$. Тогда и только тогда H является m-добавляемой в G подгруппой, когда H / N является m-добавляемой в G / N подгруппой;*

(3) *пусть N – нормальная подгруппа группы G, H – m-добавляемая подгруппа в G и $(|H|, |N|) = 1$. Тогда HN – m-добавляемая подгруппа в G.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – любой класс групп, содержащий все единичные группы. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ используется для обозначения пересечения всех нормальных подгрупп N группы G таких, что $G / N \in \mathfrak{F}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если либо $\mathfrak{F} = \varnothing$, либо $\mathfrak{F} \ne \varnothing$ и для каждой группы G любой гомоморфный образ её фактор-группы $G / G^{\mathfrak{F}}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если $\mathfrak{F}$ содержит каждую группу G такую, что $G^{\mathfrak{F}} \le \Phi(G)$.

***Лемма* 1.4** [4, гл. VI, теорема 24.2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и G – минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда:*

(a) *$P = G^{\mathfrak{F}}$ является p-группой для некоторого простого p и P – группа экспоненты p или экспоненты 4 (если P является неабелевой 2-группой).*

(b) *$P / \Phi(P)$ – главный фактор группы G и $(P / \Phi(P)) \rtimes (G / C_G(P / \Phi(P))) \notin \mathfrak{F}$.*

***Лемма* 1.5.** *Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы G и $L \le O_p(G)$. Если некоторая минимальная подгруппа из L является m-добавляемой в G, то $|L| = p$.*

Доказательство. Предположим, что $|L| > p$. Пусть R – минимальная подгруппа в L и R является m-добавляемой в G. Тогда существует такая подгруппа T в G, что $RT = G$ и $R \cap T \le R_{mG}$. Предположим, что $T < G$. Тогда $G = L \rtimes T$, что влечет $RT \ne G$. Это противоречие показывает, что $T = G$. Тогда $R = R_{mG}$ – модулярная подгруппа в G. Значит, по лемме 1.2, $R^G / R_G \le Z_{\mathfrak{U}}(G / R_G)$. Но $R_G = 1$ и $R^G \ne 1$. Следовательно, $R^G \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$ и $L \cap Z_{\mathfrak{U}}(G) \ne 1$, что влечет $L \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Значит, $|L| = p$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

***Лемма* 1.6** [7]. *Пусть P – силовская p-подгруппа группы G. Если каждая максимальная подгруппа из P обладает p-нильпотентным дополнением в G, то G является p-нильпотентной группой.*

Следующая лемма хорошо известна.

***Лемма* 1.7.** *Пусть G – группа, $A, B \le G$ и $G = AB$. Тогда $G = AB^x$ для всех $x \in G$.*

Пусть $L(G)$ – решетка всех подгрупп группы G. Если $X, Y \in L(G)$ и $X \le Y$, то множество $[X, Y] = \{Z \in L(G) \mid X \le Z \le Y\}$ называется интервалом.

***Лемма* 1.8** [1, гл. 2, теорема 2.1.5]. *Пусть G – группа, M – ее подгруппа. Следующие свойства эквивалентны:*

(a) *M – модулярная подгруппа группы G;*

(b) *для любой подгруппы $A \le G$ отображение*

$$\phi_{A,M} : [A \cap M, A] \to [M, \langle A, M \rangle]; X \mapsto \langle X, M \rangle$$

является изоморфизмом.

2 Доказательство основной теоремы

Предположим, что эта теорема неверна, и пусть G – контрпример наименьшего порядка. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G.

(1) *$(p-1, |G|) = 1$ и каждая максимальная подгруппа из P, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, является m-добавляемой в G.*

Предположим, что это не так. Тогда по условию $(p-1,|G|)=1$ и каждая циклическая подгруппа из P простого порядка или порядка 4 (если $p=2$ и P неабелева), не имеющая p-нильпотентного добавления в G, является m-добавляемой в G. Так как G не является p-нильпотентной группой, и поэтому G имеет p-замкнутую подгруппу Шмидта $H=H_p \rtimes H_q$ согласно [8, гл. IV, теорема 5.4]. Не нарушая общности, можем полагать, что $H_p \leq P$. Пусть $\Phi=\Phi(H_p)$. По лемме 1.4, H_p/Φ является нецентральным главным фактором группы H и H_p является группой экспоненты p или экспоненты 4 (если $p=2$ и H_p – неабелева). Значит, $|H_p/\Phi|>p$, поскольку $(p-1,|H|)=1$. Это влечет, что P – нециклическая группа. Пусть X/Φ – минимальная подгруппа в H_p/Φ, $x\in X\setminus\Phi$ и $L=\langle x\rangle$. Тогда $|L|=p$ или $|L|=4$. Следовательно, L является m-добавляемой подгруппой в G. Предположим, что $L_{mG}\neq L$. Тогда для некоторой собственной подгруппы T из G имеем $LT=G$ и $H=L(T\cap H)$. Понятно, что $T\cap H<H$. Так как $\Phi\leq\Phi(H)$, получаем $\Phi(T\cap H)<H$. Пусть L_1 – максимальная в L подгруппа. Заметим, что $L_1\leq\Phi$. Значит, $|H:\Phi T|=p$. Следовательно, $|H_p/\Phi|=|H/\Phi:\Phi T/\Phi|=|H:\Phi T|=p$. Это противоречие показывает, что $L_{mG}=L$ и L является модулярной подгруппой в G. Значит, $L\Phi/\Phi=X/\Phi$ является модулярной подгруппой в H/Φ по лемме 1.1 (a)–(c). Следовательно, каждая минимальная подгруппа из H_p/Φ является m-добавляемой в H/Φ. Таким образом, $|H_p/\Phi|=p$ по лемме 1.5. Полученное противоречие завершает доказательство (1).

(2) *Если* $N\leq O_{p'}(G)$ *или* N *абелева, то* G/N p*-нильпотентна.*

Если $P\leq N$, то G/N является p'-группой, поэтому G/N p-нильпотентна. Предположим теперь, что $P\nleq N$. Ясно, что

$$PN/N\in \mathrm{Syl}_p(G/N).$$

Пусть V/N – максимальная подгруппа из PN/N. Тогда $V=WN$ для некоторой максимальной подгруппы W из P. Если W имеет p-нильпотентное добавление T в G, то $TN/N\simeq T/T\cap N$ является p-нильпотентным добавлением к V/N в G/N. С другой стороны, если V является m-добавляемой подгруппой в G, то V/N является m-добавляемой в G/N по лемме 1.3 (2) (3). Ввиду (1), условие теоремы выполняется для G/N, и поэтому G/N p-нильпотентна по выбору группы G.

(3) $O_{p'}(G)=1$. (Это следует из (2) и выбора группы G).

(4) *Если* $P\leq U<G$, *то* U *p-нильпотентна.*

Пусть V – максимальная подгруппа из P, которая не имеет p-нильпотентного добавления в U. Если V имеет p-нильпотентное добавление T в G, то $T\cap U$ является p-нильпотентным добавлением к V в U, что противоречит выбору V. Поэтому V не имеет p-нильпотентного добавления в G и V является m-добавляемой в G. Тогда V является m-добавляемой в U по лемме 1.3 (1). Условие теоремы выполняется для U, и поэтому U p-нильпотентна по выбору группы G.

(5) *G является p-разрешимой группой.*

Ввиду (2), необходимо лишь показать, что в G есть абелевая минимальная нормальная подгруппа. Предположим, что это не так. Тогда $p=2$ согласно теореме Фейта-Томсона о разрешимости групп нечетного порядка.

Покажем, что для некоторой максимальной подгруппы V из P имеет место $V_{mG}\neq 1$. Предположим, что $V_{mG}=1$ для любой максимальной подгруппы V из P. Согласно условию, в G найдется такая подгруппа T, что $G=VT$ и либо T является 2-нильпотентной группой, либо $V\cap T\leq V_{mG}=1$. Во втором случае T является дополнением к V в G, и поэтому T является 2-нильпотентной группой [8, гл. IV, теорема 2.8], так как порядок силовской 2-подгруппы из T равняется 2. Применяя лемму 1.6, получаем, что G является 2-нильпотентной группой. Полученное противоречие показывает, что существуют такие максимальные в P подгруппы V, что $V_{mG}\neq 1$. Пусть $L=V_{mG}$. Тогда по лемме 1.2 получаем, что $L^G/L_G\leq Z_{\mathfrak{U}}(G/L_G)$. Предположим, что $L_G\neq 1$. Пусть R – минимальная нормальная в G подгруппа и $R\leq L_G$. Тогда R абелева. Это противоречие показывает, что $L_G=1$. Поэтому $L^G\leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$, а значит, $Z_{\mathfrak{U}}(G)\neq 1$. Но $Z_{\mathfrak{U}}(G)$ – нормальная подгруппа в G, и она имеет циклические G-главные факторы. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в $Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Но тогда R абелева, что противоречит нашему предположению о группе G. Таким образом, утверждение (5) доказано.

Заключительное противоречие. Пусть R – произвольная минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда ввиду (3) и (5), R

является p-подгруппой и, значит, G/R является p-нильпотентной группой согласно (2).

Хорошо известно, что класс $\mathfrak{F}$ всех p-нильпотентных групп является насыщенной формацией [8, с. 698]. Поэтому N – единственная минимальная нормальная подгруппа из G, $N \not\leq \Phi(G)$ и G/N является p-нильпотентной группой. Следовательно, G – примитивная группа, и поэтому $N = C_G(N) = F(G)$ согласно [5, гл. А, теорема 15.2]. Пусть M – максимальная подгруппа из G такая, что $G = N \rtimes M$, и пусть $M_p \in \mathrm{Syl}_p(M)$. Так как $M \simeq G/N$ p-нильпотентна, то M имеет нормальную холлову p'-подгруппу E. Ввиду (3), $M = N_G(E)$. Пусть V – максимальная подгруппа из P такая, что $M_p \leq V$ и $N \not\leq V$. Тогда $VM \neq G$, и поэтому $VM^x \neq G$ для всех $x \in G$ по лемме 1.7. Действительно, $\frac{|V||M|}{|V \cap M|} = \frac{|V||M|}{|M_p|} \neq |N||M|$, т. к. $\frac{|V|}{|M_p|} = |V \cap N| \neq |N|$. Предположим, что $V_{mG} = 1$. Согласно условию, в G найдется такая подгруппа T, что $G = VT$ и либо T является p-нильпотентной группой, либо $V \cap T \leq V_{mG} = 1$. Заметим, что во втором случае у подгруппы T порядок силовской p-подгруппы равен p, и поэтому T является p-нильпотентной группой, поскольку $(p-1, |G|) = 1$. Пусть B – p'-холлова подгруппа из T. Тогда B – холлова p'-подгруппа из G. Так как G p-разрешима, то произвольные две холловы p'-подгруппы из G сопряжены по [8, гл. VI, теорема 1.7]. Значит, $E^x = B$ для некоторого $x \in G$ и $E^x \in \mathrm{Hall}_{p'}(M^x)$. Так как M p-нильпотентна, то $M^x = N_G(E^x) = N_G(B)$. Ввиду того что E^x нормальна в T, получаем $T \leq N_G(E^x) = M^x$. Но тогда $VT = G = VM^x$. Полученное противоречие показывает, что $L = V_{mG} \neq 1$. Согласно лемме 1.2,

$$L^G / L_G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/L_G).$$

Предположим, что $L_G \neq 1$. Тогда $N \leq L_G$, а это влечёт $N \leq V$. Полученное противоречие показывает, что $L_G = 1$. Значит, $L^G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$, и поэтому $Z_{\mathfrak{U}}(G) \neq 1$. Но тогда $N \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$ и $|N| = p$. Приходим к противоречию с $(p-1, |G|) = 1$, которое завершает доказательство теоремы.

3 Приложения основной теоремы

Из доказанной выше теоремы вытекают следующие следствия.

***Следствие* 3.1** [9]. *Пусть G – группа нечетного порядка и пусть p – наименьший простой делитель $|G|$. Если все максимальные подгруппы любой силовской p-подгруппы группы G являются добавляемыми в G, то G является p-нильпотентной группой.*

Напомним, что подгруппа H группы G называется c-нормальной [10] в G, если существует такая нормальная подгруппа T из G, что $TH = G$ и $H \cap T \subseteq H_G$.

***Следствие* 3.2** [11]. *Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G и P – силовская p-подгруппа из G. Если каждая максимальная подгруппа из P является c-нормальной в G, то G p-нильпотентна.*

Напомним, что подгруппа H группы G называется c-добавляемой [12] в G, если существует такая подгруппа K из G, что $G = HK$ и $H \cap K \subseteq H_G$.

***Следствие* 3.3** [13]. *Пусть p – простой делитель порядка группы G и P – силовская p-подгруппа из G. Если каждая максимальная подгруппа из P является c-добавляемой в G и $(|G|, p-1) = 1$, то G p-нильпотентна.*

В заключении мы построим пример, показывающий, что в общем случае класс всех m-добавляемых подгрупп группы является более широким, чем класс всех ее модулярных подгрупп.

***Пример* 3.4.** Пусть

$$G = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$$

– группа диэдра порядка 8. Рассмотрим ее подгруппы $H_1 = \langle b \rangle$ и $H_2 = \langle ba \rangle$. Ясно, что отображение

$$[1, H_1] = [H_1 \cap H_2, H_1] \to [H_2, \langle H_1, H_2 \rangle] = [H_2, G]$$

не является изоморфизмом. Значит, применяя лемму 1.8, подгруппы H_1 и H_2 не являются модулярными подгруппами группы G, но легко заметить, что они являются m-добавляемыми в G.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schmidt*, *R.* Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin etc: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.

2. *Schmidt*, *R.* Modulare Untergruppen endlicher Gruppen / R. Schmidt // J. Ill. Math. – 1969. – Vol. 13. – P. 358–377.

3. *Васильев*, *В.А.* Об одном обобщении модулярных подгрупп / В.А. Васильев, А.Н. Скиба // Украинский математический журнал. – 2011. – Т. 63, №10. – С. 1314–1325.

4. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

5. *Doerk*, *K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin etc : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

6. *Ballester-Bolinches*, *A.* Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht etc : Springer, 2006. – 385 p.

7. *Shemetkov*, *L.A.* On the $\mathfrak{X}\Phi$-hypercentre of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Journal of Algebra. – 2009. – Vol. 322. – P. 2106–2117.

8. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin etc : Springer, 1967. – 793 s.

9. *Ballester-Bolinches*, *A.* On complemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, X. Guo // Arch. Math. – 1999. – Vol. 72. – P. 161–166.

10. *Wang*, *Y.* c-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – Vol. 180. – P. 954–965.

11. *Guo*, *X.* On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow p-subgroups / X. Guo, K.P. Shum // Arch. Math. – 2003. – Vol. 80. – P. 561–569.

12. *Ballester-Bolinches*, *A.* c-supplemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, Y. Wang, X.Y. Guo // Glasgow Math. J. – 2000. – Vol. 42. – P. 383–389.

13. *Guo*, *X.* On p-nilpotency of finite groups with some subgroups c-supplemented. / X. Guo, K.P. Shum // Arch. Math. – 2003. – Vol. 10. – P. 250–266.

Поступила в редакцию 27.05.13.