Проблемы физики, математики и техники, № 4 (9), 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

О σ-СОГЛАСОВАННЫХ ВЕКТОР-МАТРИЦАХ

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв

ON σ- COMPATIBLE VECTOR-MATRICES

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

В статье изучаются свойства σ-согласованных вектор-матриц.

Ключевые слова*: матрица, вектор-матрица, полугруппа, группа, кольцо, n-арная группа.*

The properties of σ-compatible vector-matrices are studied in this paper.

Keywords*: matrice, vector-matrice, semigroup, group, ring, n-ary group.*

Введение

Вектор-матрицы над произвольным кольцом впервые были определены в [1], они обобщают понятие m-адической матрицы Э. Поста [2]. Изучению различных свойств вектор-матриц посвящены работы [3]–[5]. В частности, в [3] введено понятие σ-согласованной вектор-матрицы, где σ – подстановка из S_k, и доказано [3, теорема 6.1], что если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то подмножество **M** множества всех k-компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом, замкнутое относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, является l-арной полугруппой, в которой все вектор-матрицы имеют один и тот же размер и согласованы с подстановкой σ. Изучению операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, определенной в [6], посвящена также книга [7].

В данной статье продолжено начатое в [3] изучение свойств σ-согласованных вектор-матриц.

Приведем вначале определения некоторых понятий, встречающихся в работе.

n-Арный группоид $< A, [\ ] >$, в котором для любого $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ выполняется тождество

$$[[a_1 \ldots a_n]a_{n+1} \ldots a_{2n-1}] =$$
$$= [a_1 \ldots a_i[a_{i+1} \ldots a_{i+n}]a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1}],$$

называют *n-арной полугруппой*, а n-арную операцию $[\ ]$ в этом случае называют *ассоциативной*.

n-Арную полугруппу $< A, [\ ] >$ называют *n-арной группой*, если в ней для всех $a_1, \ldots, a_n, b \in A$ разрешимы уравнения

$$[xa_2 \ldots a_n] = b,\ [a_1 \ldots a_{n-1}y] = b.$$

Элемент a n-арного группоида $< A, [\ ] >$ называют:

1) *идемпотентом*, если $[\underbrace{a \ldots a}_{n}] = a$;

2) *нулем*, если для всех $x_1, \ldots, x_{n-1} \in A$ верно

$$[ax_1 \ldots x_{n-1}] = [x_1ax_2 \ldots x_{n-1}] = \ldots = [x_1 \ldots x_{n-1}a] = a;$$

3) *единицей*, если для любого $x \in A$ верно

$$[x\underbrace{a \ldots a}_{n-1}] = [ax\underbrace{a \ldots a}_{n-2}] = \ldots = [\underbrace{a \ldots a}_{n-1}x] = x.$$

Понятно, что n-арный группоид не может иметь более одного нуля, а всякая единица n-арного группоида является его идемпотентом.

Элемент a n-арного группоида $< A, [\ ] >$ с нулем 0 называют его *i-ым делителем нуля*, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, если существуют $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n \in A$, отличные от нуля, такие, что

$$[b_1 \ldots b_{i-1}ab_{i+1} \ldots b_n] = 0.$$

Если элемент a является i-ым делителем нуля для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$, то a называют *делителем нуля* в $< A, [\ ] >$.

Понятно, что сам нуль является делителем нуля.

Если в n-арном группоиде $< A, [\ ] >$ для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется тождество

$$[a_1a_2 \ldots a_n] = [a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n)}],$$

то n-арный группоид $< A, [\ ] >$ называют *абелевым*.

n-Арный группоид $< A, [\ ] >$, в котором выполняется тождество

$$[aa_1 \ldots a_{n-2}b] = [ba_1 \ldots a_{n-2}a],$$

называют *полуабелевым*.

Более подробную информацию об n-арных полугруппах и n-арных группах можно найти в [2], [8]–[10].

Универсальная алгебра $< A, +, [\ ] >$ с бинарной операцией + и n-арной операцией $[\ ]: A^n \to A$ называется *(2, n)-кольцом* [11], [12], если выполняются следующие условия:

1) $< A, + >$ – абелева группа;

2) в $< A, +, [\ ] >$ для любого $i = 1, \ldots, n$ выполняется тождество дистрибутивности

$$[a_1 \ldots a_{i-1}(b_1 + b_2)a_{i+1} \ldots a_n] =$$

$= [a_1 \ldots a_{i-1}b_1a_{i+1} \ldots a_n] + [a_1 \ldots a_{i-1}b_2a_{i+1} \ldots a_n]$.

При $n = 2$ определение $(2, n)$-кольца превращается в определение обычного кольца.

Линейное пространство A над полем P с определенной на этом пространстве n-арной операцией [ ] называется $(2, n)$-*алгеброй* над P, если выполняются следующие условия:

1) для любого $\lambda \in P$ и любых $a_1, \ldots, a_n \in A$ верно

$$\lambda[a_1 \ldots a_n] = [(\lambda a_1)a_2 \ldots a_n] =$$
$$= [a_1(\lambda a_2)a_3 \ldots a_n] = \ldots = [a_1 \ldots a_{n-1}(\lambda a_n)];$$

2) n-арная операция [ ] дистрибутивна относительно операции + сложения векторов, то есть в A для любого $i = 1, \ldots, n$ выполняется тождество дистрибутивности из определения $(2, n)$-кольца.

Ясно, что при $n = 2$ определение $(2, n)$-алгебры над полем P совпадает с определением обычной бинарной алгебры.

$(2, n)$-Кольцо называется *ассоциативным*, если определенная на нем n-арная операция ассоциативна. Аналогично определяется *ассоциативная* $(2, n)$-алгебра.

1 Используемые результаты

Вектор-матрицей размера

$$(m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k)$$

над кольцом P называется [1, определение 1] всякий упорядоченный набор $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ матриц $A_1, \ldots, A_k$ размеров $m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k$ с элементами из P. Вектор-матрица, у которой квадратные компоненты $A_1, \ldots, A_k$ имеют порядки $n_1, \ldots, n_k$, называется [1] *квадратной* вектор-матрицей порядка $(n_1, \ldots, n_k)$. Вектор-матрица, у которой все компоненты $A_1, \ldots, A_k$ – квадратные матрицы одного и того же порядка n, называется [1] *квадратной* вектор-матрицей порядка n.

Множество всех k-компонентных вектор-матриц над P обозначается символом $\mathbf{M}(k, P)$, а множество всех k-компонентных вектор-матриц размера $(m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k)$ над P – символом $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k}(P)$. Символ $\mathbf{M}_{n_1, \ldots, n_k}(P)$ используется для обозначения множества всех k-компонентных вектор-матриц порядка $(n_1, \ldots, n_k)$ над P, а символ $\mathbf{M}_n(k, P)$ – для обозначения всех k-компонентных квадратных вектор-матриц порядка n над P.

Определение вектор-матрицы обобщает понятие m-адической (m-арной) матрицы Э. Поста [2], которую он определил как упорядоченный набор $m - 1$ квадратных матриц одного и того же порядка над полем комплексных чисел.

В [1, определение 4] для всех $k \geq 2, l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на множестве $\mathbf{M}(k, P)$ всех k-компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом P определена частичная l-арная операция $[\ ]_{l, \sigma, k}$ и доказана

***Теорема* 1.1** [1, теорема 1]. *Пусть*

$$\mathbf{A}_m = (A_{m1}, \ldots, A_{mk}),\ m = 1, \ldots, 2l - 1$$

– k-компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом P, σ – подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда, если для некоторого $i = 0, 1, \ldots, l - 1$ определена k-компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_i[\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_{i+l}]_{l, \sigma, k}\, \mathbf{A}_{i+l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k},$$

то для любого $j = 0, 1, \ldots, l - 1$ определена k-компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_j[\mathbf{A}_{j+1} \ldots \mathbf{A}_{j+l}]_{l, \sigma, k}\, \mathbf{A}_{j+l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k},$$

и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_i[\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_{i+l}]_{l, \sigma, k}\, \mathbf{A}_{i+l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k} =$$
$$= [\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_j[\mathbf{A}_{j+1} \ldots \mathbf{A}_{j+l}]_{l, \sigma, k}\, \mathbf{A}_{j+l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k}.$$

Согласно теореме 1.1, если P – ассоциативное кольцо, а подстановка σ^{l-1} – тождественная, то на множестве $\mathbf{M}(k, P)$ определена частичная ассоциативная l-арная операция $[\ ]_{l, \sigma, k}$, то есть $\mathbf{M}(k, P)$, рассматриваемое вместе с этой l-арной операцией, является частичной l-арной полугруппой.

Из теоремы 1.1 вытекает

***Предложение* 1.1**. *Если P – ассоциативное кольцо, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< \mathbf{M}_n(k, P), [\ ]_{l, \sigma, k} >$ – l-арная полугруппа.*

Во множестве $\mathbf{M}_n(k, P)$, где P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, выделим подмножество $\mathbf{GL}_n(k, P)$ всех k-компонентных квадратных вектор-матриц порядка n над P, у которых все компоненты обратимы в кольце $\mathbf{M}_n(P)$. Ясно, что обратимость компонент в $\mathbf{M}_n(P)$ можно заменить обратимостью определителей этих компонент в P.

***Теорема* 1.2** [4, теорема 4.2]. *Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l, \sigma, k} >$ – l-арная группа. В частности, $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{k+1, (12 \ldots k), k} >$ – $(k + 1)$-арная группа.*

l-Арную группу $< \mathbf{GL}_n(k, P), [\ ]_{l, \sigma, k} >$ по аналогии с бинарным случаем естественно называть полной линейной l-арной группой, соответствующей данным k и σ.

Во множестве $\mathbf{GL}_n(k, P)$ выделим подмножество $\mathbf{SL}_n(k, P)$ всех k-компонентных вектор-матриц, у которых определитель каждой компоненты равен единице кольца P. Так как множество $\mathbf{SL}_n(k, P)$ совпадает с k-ой декартовой степенью специальной линейной группы $\mathbf{SL}_n(P)$, то, применяя теорему 2.9.3 [7], получим следующий результат.

***Предложение* 1.2**. *Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то множество $\mathbf{SL}_n(k, P)$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{SL}_n(k, P), [\ ]_{l, \sigma, k} >$ является l-арной группой.*

l-Арную группу $< \mathbf{SL}_n(k, P), [\ ]_{l, \sigma, k} >$ по аналогии с бинарным случаем назовем специальной линейной l-арной группой, соответствующей данным k и σ.

Так как множество $\mathbf{M}_n(k, P)$ совпадает с k-ой декартовой степенью мультипликативной полугруппы $\mathbf{M}_n(P)$, которая при $n > 1$ неабелева, то, ввиду предложения 3.5.4 из [7], имеет место

***Предложение* 1.3.** *Если P – ассоциативное кольцо с единицей, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная полугруппа $\mathbf{M}_n(k, P)$ при $n > 1$ не является полуабелевой. В частности, она не является абелевой.*

Для всякой подстановки $\sigma \in S_k$ положим:

$$\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_p\sigma_{p+1} \ldots \sigma_q \qquad (1.1)$$

– разложение σ в произведение независимых циклов, где $\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_q$ – все циклы длины 1;

$$X_1 = \{i_{11}, \ldots, i_{1l_1}\}, \ldots, X_p = \{i_{p1}, \ldots, i_{pl_p}\},$$

$$X_{p+1} = \{i_{p+1}\}, \ldots, X_q = \{l_q\} \qquad (1.2)$$

– σ-орбиты, соответствующие циклам $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$, $\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_q$. Длина цикла σ_r ($r = 1, \ldots, q$) обозначается через l_r. В частности, $l_{p+1} = \ldots = l_q = 1$.

***Определение* 1.1** [3, определение 3.1]. Упорядоченный набор пар $((m_1, n_1), \ldots, (m_k, n_k))$ целых положительных чисел называется σ-*согласованным* или *согласованным с подстановкой* $\sigma \in S_k$, имеющей разложение (1.1), если:

1) для каждой орбиты $X_r = \{i_{r1}, \ldots, i_{rl_r}\}$, где $r = 1, \ldots, p$, и любого ее элемента i_{rs}, где $s = 1, \ldots, l_r$, верны равенства

$$n_{i_{rs}} = m_{\sigma(i_{rs})}, n_{\sigma(i_{rs})} = m_{\sigma^2(i_{rs})}, \ldots,$$

$$\ldots, n_{\sigma^{l_r-2}(i_{rs})} = m_{\sigma^{l_r-1}(i_{rs})}, n_{\sigma^{l_r-1}(i_{rs})} = m_{i_{rs}}; \qquad (1.3)$$

2) $m_{i_{p+1}} = n_{i_{p+1}}, \ldots, m_{i_q} = n_{i_q}$.

***Замечание* 1.1**. Если условие 1) определения 1.1 распространить на одноэлементные циклы, то для орбит

$$X_{p+1} = \{i_{p+1}\}, \ldots, X_q = \{i_q\}$$

равенства (1.3) примут вид

$$n_{\sigma^{l_{p+1}-1}(i_{p+1})} = n_{\sigma^{1-1}(i_{p+1})} = n_{\sigma^0(i_{p+1})} = n_{i_{p+1}} = m_{i_{p+1}}, \ldots$$

$$\ldots, n_{\sigma^{l_q-1}(i_q)} = n_{\sigma^{1-1}(i_q)} = n_{\sigma^0(i_q)} = n_{i_q} = m_{i_q}.$$

Таким образом, в определении 1.1 можно обойтись без условия 2), если в условии 1) считать $r = 1, \ldots, q$.

***Замечание* 1.2**. Можно показать [3], что из выполнимости условия (1.3) для некоторого $i_{rs} \in X_r$ следует его выполнимость для любого $i_{rs} \in X_r$.

***Теорема* 1.3** [3, теорема 4.1]. *Пусть P – ассоциативное кольцо, упорядоченный набор $((m_1, n_1), \ldots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда множество $\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P)$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является l-арной полугруппой.*

Приведем критерий σ-согласованности вектор-матрицы.

***Теорема* 1.4**. *Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то вектор-матрица*

$$\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k) \in \mathbf{M}(k, P)$$

над ассоциативным кольцом P является σ-согласованной тогда и только тогда, когда определена вектор-матрица $[\underbrace{\mathbf{A}\ldots\mathbf{A}}_{l}]_{l,\sigma,k}$.

Доказательство. Пусть $(m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k)$ – размер вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$.

Необходимость. Следует из теоремы 1.3.

Достаточность. Пусть для подстановки σ имеет место разложение (1.1) с σ-орбитами (1.2), и пусть $[\underbrace{\mathbf{A}\ldots\mathbf{A}}_{l}]_{l,\sigma,k} = \{Y_1, \ldots Y_k\}$,

где

$$Y_j = A_jA_{\sigma(j)} \ldots A_{\sigma^{l-2}(j)}A_{\sigma^{l-1}(j)}, j = 1, \ldots, k. \quad (1.4)$$

В частности, это верно для любого элемента j из любой σ-орбиты X_r ($r = 1, \ldots, p$) с числом элементов l_r, большим единицы. Так как $l_r < l = tl_r + 1$, то, выписав первые $l_r + 1$ компонент из правой части (1.4), видим, что существует произведение

$$A_jA_{\sigma(j)}A_{\sigma^2(j)} \ldots A_{\sigma^{l_r-2}(j)}A_{\sigma^{l_r-1}(j)}A_{\sigma^{l_r}(j)}.$$

Это означает, что для вектор-матрицы $\mathbf{A}$, имеющей размер $(m_1 \times n_1, ..., m_k \times n_k)$, верно

$$n_j = m_{\sigma(j)}, n_{\sigma(j)} =$$

$$= m_{\sigma^2(j)}, \ldots, n_{\sigma^{l_r-2}(j)} = m_{\sigma^{l_r-1}(j)}, n_{\sigma^{l_r-1}(j)} = m_{\sigma^{l_r}(j)},$$

а так как σ^{l_r} – тождественная подстановка, то последние равенства принимают вид

$$n_j = m_{\sigma(j)}, n_{\sigma(j)} =$$

$$= m_{\sigma^2(j)}, \ldots, n_{\sigma^{l_r-2}(j)} = m_{\sigma^{l_r-1}(j)}, n_{\sigma^{l_r-1}(j)} = m_j.$$

Таким образом, выполняется условие 1) определения 1.1.

Если j – элемент из любой σ-орбиты X_r ($r = p + 1, \ldots, q$) с числом элементов, равным единице, то (1.4) принимает вид $Y_j = \underbrace{A_j\ldots A_j}_{l}$. В частности, определено произведение A_jA_j, откуда следует совпадение размеров матрицы A_j. Таким образом, условие 2) определения 1.1 также выполняется. Следовательно, набор $((m_1, n_1), \ldots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой σ. Теорема доказана.

2 Перестановочность элементов в l-арной полугруппе $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$

Положим, $1 \le \mu \le min\{m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k\}$, и выделим во множестве $\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P)$ подмножество $\mathbf{M}^{(\mu)}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P)$ всех вектор-матриц вида

$$\mathbf{A} = \left(A_1 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, A_k = \begin{pmatrix} B_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

где $B_1, \ldots, B_k$ – квадратные матрицы порядка μ над P:

$$\mathbf{M}^{(\mu)} = \{\mathbf{A} = \left(\begin{pmatrix} B_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} B_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) \mid$$

$$\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P),\ B_1 \ldots B_k \in \mathbf{M}_\mu(P)\},$$

где для сокращения записей использовано обозначение $\mathbf{M}^{(\mu)} = \mathbf{M}^{(\mu)}_{m_1\times n_1,\cdots,m_k\times n_k}(P)$, которое иногда будет употребляться, если из контекста ясно, о чем идет речь.

***Предложение* 2.1**. *Пусть P – ассоциативное кольцо, набор $((m_1, n_1), \ldots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$,*

$$1 \le \mu \le min\{m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k\}.$$

Тогда множество $\mathbf{M}^{(\mu)}$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{M}^{(\mu)}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является l-арной полугруппой, изоморфной l-арной полугруппе $< \mathbf{M}_\mu(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$.

Доказательство. Заметим, что по теореме 1.3 $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – l-арная полугруппа. Пусть

$$\mathbf{A}_i = \left(A_{i1} = \begin{pmatrix} B_{i1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \ldots, A_{ik} = \begin{pmatrix} B_{ik} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right),\ i = 1, \ldots, l$$

– произвольные вектор-матрицы из $\mathbf{M}^{(\mu)}$,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = (Y_1, \ldots, Y_k).$$

Согласно определению операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ и ввиду тождественности подстановки σ^{l-1}, имеем

$$Y_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}A_{lj},\ j = 1, \ldots, k,$$

откуда получаем $Y_j = \begin{pmatrix} D_j & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, где

$$B_{1j}B_{2\sigma(j)} \ldots B_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}B_{lj} = D_j \in < \mathbf{M}_\mu(P).$$

Таким образом,

$$\mathbf{A} = \left(\begin{pmatrix} D_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} D_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) \in \mathbf{M}^{(\mu)}.$$

Следовательно, множество $\mathbf{M}^{(\mu)}$ замкнуто относительно l-арной операции, а универсальная алгебра $< \mathbf{M}^{(\mu)}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является l-арной полугруппой.

Определим отображение $f : \mathbf{M}^{(\mu)} \to \mathbf{M}_\mu(k, P)$ по правилу

$$f : \mathbf{U} = \left(\begin{pmatrix} V_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} V_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) \to f(\mathbf{U}) = (V_1, \ldots, V_k).$$

Ясно, что f – биекция $\mathbf{M}^{(\mu)}$ на $\mathbf{M}_\mu(k, P)$. Так как

$$f([\mathbf{A}_1\ldots\mathbf{A}_k]_{l,\sigma,k}) = f(\mathbf{A}) = f(Y_1,\ldots,Y_k) = (D_1,\ldots,D_k) =$$
$$= (B_{11}B_{2\sigma(1)}\ldots B_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)}B_{l1},\ldots,B_{1k}B_{2\sigma(k)}\ldots B_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)}B_{lk}) =$$
$$= [(B_{11}, \ldots, B_{1k}) \ldots (B_{l1}, \ldots, B_{lk})]_{l,\sigma,k} =$$
$$= [f(\mathbf{A}_1) \ldots f(\mathbf{A}_k)]_{l,\sigma,k},$$

то есть

$$f([\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_k]_{l,\sigma,k}) = [f(\mathbf{A}_1) \ldots f(\mathbf{A}_k)]_{l,\sigma,k},$$

то f – изоморфизм l-арной полугруппы $< \mathbf{M}^{(\mu)}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ на l-арную полугруппу $< \mathbf{M}_\mu(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$. Предложение доказано.

***Теорема* 2.1**. *Пусть P – ассоциативное кольцо с единицей, набор $((m_1, n_1), \ldots, (m_k, n_k))$ согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$,*

$$min\{m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k\} \ge 2.$$

Тогда l-арная полугруппа $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ не является полуабелевой

Доказательство. По предложению 1.3 l-арная полугруппа $< \mathbf{M}_\mu(k, P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$, где

$$2 \le \mu \le min\{m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k\},$$

не является полуабелевой, но тогда, ввиду предложения 2.1, неполуабелевой будет и изоморфная ей l-арная полугруппа $< \mathbf{M}^{(\mu)}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. А так как $\mathbf{M}^{(\mu)} \subseteq \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P)$, то l-арная полугруппа $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ также не является полуабелевой. Теорема доказана.

Далее в следствиях 2.1–2.5 P – ассоциативное кольцо с единицей. Кроме того, в следствиях 2.1–2.3

$$min\{m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k\} \ge 2.$$

***Следствие* 2.1**. *Если набор*

$$((m_1 \times n_1), \ldots, (m_k \times n_k))$$

согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$ порядка d, то $(d + 1)$-арная полугруппа $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{d+1,\sigma,k} >$ не является полуабелевой.

***Следствие* 2.2**. *Если σ – цикл длины k из S_k, $n_1 = m_{\sigma(1)}, n_{\sigma(1)} = m_{\sigma^2(1)}, \ldots, n_{\sigma^{k-2}(1)} = m_{\sigma^{k-1}(1)}, n_{\sigma^{k-1}(1)} = m_1$, то $(k + 1)$-арная полугруппа $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{k+1,\sigma,k} >$ не является полуабелевой.*

***Следствие* 2.3.** *Если*

$$n_1 = m_2,\ n_2 = m_3,\ \ldots,\ n_{k-1} = m_k,\ n_k = m_1,$$

то *$(k + 1)$-арная полугруппа $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$ не является полуабелевой.*

***Следствие* 2.4.** *Если $min\{m, s, r\} \ge 2$,* то *4-арная полугруппа*

$$< \mathbf{M}_{m\times s,\, s\times r,\, r\times m}(P), [\ ]_{4,(123),3} >$$

не является полуабелевой.

***Следствие* 2.5**. *Если $min\{m, n\} \ge 2$, то тернарная полугруппа $< \mathbf{M}_{m\times n,\, n\times m}(P), [\ ]_{3,(12),2} >$ не является полуабелевой.*

Справедливость следующей леммы устанавливается простой проверкой.

***Лемма* 2.1**. *Пусть полугруппа P содержит единицу и элемент, отличный от единицы. Если σ – тождественная подстановка из S_k, то l-арный группоид $< P^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является абелевым тогда и только тогда, когда полугруппа P коммутативна.*

***Теорема* 2.2**. *Если P – ассоциативное кольцо с единицей, набор*

$$((m_1 \times n_1), \ldots, (m_k \times n_k))$$

согласован с подстановкой $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная полугруппа $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является абелевой *тогда и только тогда, когда* σ *– тождественная подстановка,* $m_1 = n_1 = \ldots = m_k = n_k = 1$, P *– коммутативное кольцо.*

Доказательство. Необходимость. Если σ – нетождественная подстановка, то по предложению 3.5.1 [7] l-арная полугруппа $< \mathbf{M}_1(k, P) = P^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ не является абелевой, откуда, ввиду предложения 2.1, следует неабелевость изоморфной ей l-арной полугруппы $< \mathbf{M}^{(1)}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. А так как $\mathbf{M}^{(1)} \subseteq \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P)$, то l-арная полугруппа $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ также не является абелевой, что противоречит условию. Следовательно, σ – тождественная подстановка.

Согласно предложению 3.8 [3], вектор-матрица согласована с тождественной подстановкой тогда и только тогда, когда все ее компоненты являются квадратными матрицами. Таким образом, $m_1 = n_1, \ldots, m_k = n_k$,

$$\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P) = \mathbf{M}_{n_1,\ldots,n_k}(P).$$

Предположим, что $n_j > 1$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, k\}$, и положим

$$\mathbf{A} = (E_{n_1}, \ldots, E_{n_{j-1}}, A, E_{n_{j+1}}, \ldots, E_{n_k}),$$

$$\mathbf{B} = (E_{n_1}, \ldots, E_{n_{j-1}}, B, E_{n_{j+1}}, \ldots, E_{n_k}),$$

$$\mathbf{E} = (E_{n_1}, \ldots, E_{n_k}),$$

где $A, B \in \mathbf{M}_{n_j}(P)$, $AB \neq BA$, а $E_{n_1}, \ldots, E_{n_k}$ – единичные матрицы соответствующих размеров. Так как, ввиду тождественности подстановки σ,

$$[\mathbf{AB}\underbrace{\mathbf{E}\ldots\mathbf{E}}_{l-2}]_{l,\sigma,k} = (E_{n_1}, \ldots, E_{n_{j-1}}, AB, E_{n_{j+1}}, \ldots, E_{n_k}),$$

$$[\mathbf{BA}\underbrace{\mathbf{E}\ldots\mathbf{E}}_{l-2}]_{l,\sigma,k} = (E_{n_1}, \ldots, E_{n_{j-1}}, BA, E_{n_{j+1}}, \ldots, E_{n_k}),$$

то, учитывая $AB \neq BA$, получим

$$[\mathbf{AB}\underbrace{\mathbf{E}\ldots\mathbf{E}}_{l-2}]_{l,\sigma,k} \neq [\mathbf{BA}\underbrace{\mathbf{E}\ldots\mathbf{E}}_{l-2}]_{l,\sigma,k},$$

что противоречит абелевости l-арной полугруппы $< \mathbf{M}_{n_1,\ldots,n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$. Следовательно, $n_j = 1$ для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$, то есть $\mathbf{M}_{n_1,\ldots,n_k}(P) = P^k$. Осталось применить лемму 2.1, согласно которой P – коммутативное кольцо.

Достаточность. Используется лемма 2.1. Теорема доказана.

3 Отсутствие единиц в l-арной полугруппе $<\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$

***Теорема* 3.1**. *Пусть* P *– ассоциативное кольцо, набор* $((m_1 \times n_1), \ldots, (m_k \times n_k))$ *согласован с нетождественной подстановкой* $\sigma \in S_k$, *удовлетворяющей условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда в l-арной полугруппе* $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *нет единиц.*

Доказательство. По условию $\sigma(j) \neq j$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Предположим, что вектор-матрица $\mathbf{I} = (I_1, I_2, \ldots, I_k)$ – единица в $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$. Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{I}\ldots\mathbf{I}}_{l}]_{l,\sigma,k} = \mathbf{I} = (I_1, \ldots, I_j, \ldots, I_k),$$

откуда, согласно определению операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, получаем

$$I_j I_{\sigma(j)} I_{\sigma^2(j)} \ldots I_{\sigma^{l-1}(j)} = I_j. \quad (3.1)$$

Рассмотрим вектор-матрицу

$$(I_1, \ldots, I_{j-1}, A, I_{j+1}, \ldots, I_k) = (B_1, \ldots, B_k)$$

из $\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P)$, где матрица A размера $m_j \times n_j$ отлична от матрицы I_j того же размера.

Так как $\mathbf{I}$ – единица в $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$, то

$$(\mathbf{I}(I_1, \ldots, I_j, A, I_{j+1}, \ldots, I_k)\ \underbrace{\mathbf{I}\ldots\mathbf{I}}_{l-2}]_{l,\sigma,k} =$$

$$= (I_1, \ldots, I_{j-1}, A, I_{j+1}, \ldots, I_k),$$

откуда, снова применяя определение операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, получим

$$I_j B_{\sigma(j)} I_{\sigma^2(j)} \cdots I_{\sigma^{l-1}(j)} = A. \quad (3.2)$$

Так как при $t \neq j$ верно $B_t = I_t$, то для $\sigma(j) \neq j$ имеем $B_{\sigma(j)} = I_{\sigma(j)}$. Поэтому (3.2) может быть переписано в виде

$$I_j I_{\sigma(j)} I_{\sigma^2(j)} \cdots I_{\sigma^{l-1}(j)} = A. \quad (3.3)$$

Из (3.1) и (3.3) вытекает, $A = I_j$, что противоречит выбору $A \neq I_j$. Таким образом, предположение о наличии единиц в $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ неверно. Теорема доказана.

Далее в следствиях 3.1–3.5 P – ассоциативное кольцо.

***Следствие* 3.1**. *Если набор*

$$((m_1 \times n_1), \ldots, (m_k \times n_k))$$

согласован с нетождественной подстановкой $\sigma \in S_k$ *порядка* d, *то в* $(d+1)$*-арной полугруппе* $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{d+1,\sigma,k} >$ *нет единиц.*

***Следствие* 3.2**. *Пусть* σ *– цикл длины* k *из* S_k, *числа* $m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k$ *удовлетворяют равенствам из следствия* 2.2. *Тогда в* $(k+1)$*-арной полугруппе*

$$< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{k+1,\sigma,k} >$$

нет единиц.

***Следствие* 3.3.** *Пусть числа* $m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k$ *удовлетворяют равенствам из следствия* 2.3. *Тогда в* $(k+1)$*-арной полугруппе*

$$< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$$

нет единиц.

***Следствие* 3.4.** *В* 4*-арной полугруппе* $< \mathbf{M}_{m\times s, s\times r, r\times m}(P), [\ ]_{4,(123),3} >$ *нет единиц.*

***Следствие* 3.5**. *В тернарной полугруппе* $< \mathbf{M}_{m\times n, n\times m}(P), [\ ]_{3,(12),2} >$ *нет единиц.*

***Замечание* 3.1**. При доказательстве теоремы 3.1 условие $\sigma^l = \sigma$ не использовалось. Это условие, согласно теореме 1.3, обеспечивает ассоциативность операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$.

4 Делители нуля в l-арной полугруппе $<\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\dots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$

Суммой вектор-матриц $\mathbf{A}=(A_1,\dots,A_k)$ и $\mathbf{B}=(B_1,\dots,B_k)$ одинаковых размеров называется вектор-матрица

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(A_1+B_1,\dots,A_k+B_k)$$

того же размера.

***Замечание* 4.1**. Так как множество $\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\dots,m_k\times n_k}(P)$ совпадает с декартовым произведением

$$\mathbf{M}_{m_1\times n_1}(P)\times\dots\times\mathbf{M}_{m_k\times n_k}(P),$$

в котором каждый сомножитель является абелевой группой относительно операции сложения матриц, то множество $\mathbf{M}_{m_1\times n_1},\dots,_{m_k\times n_k}(P)$, рассматриваемое вместе с операцией сложения вектор-матриц, является абелевой группой. Ясно, что вектор-матрица

$$\mathbf{0}=(0_{m_1\times n_1},\dots,0_{m_k\times n_k}),$$

где все компоненты – нулевые матрицы указанных размеров, является нулем этой абелевой группы $<\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\dots,m_k\times n_k}(P),+>$.

***Теорема* 4.1**. *Пусть P – ассоциативное кольцо, набор* $((m_1\times n_1),\dots,(m_k\times n_k))$ *согласован с подстановкой* $\sigma\in S_k$, *удовлетворяющей условию* $\sigma^l=\sigma$. *Тогда* $\mathbf{0}$ *– нуль l-арной полугруппы* $<\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\dots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$. *Если к тому же σ – нетождественная подстановка,* $l\ge 3$, *то в этой l-арной полугруппе все элементы являются делителями ее нуля.*

Доказательство. Зафиксируем $i\in\{1,2,\dots,l\}$ и положим

$$[\mathbf{A}_1\dots\mathbf{A}_{i-1}\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i+1}\dots\mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}=(Y_1,Y_2,\dots,Y_k),$$

где

$$\mathbf{A}_t=(A_{t1},\dots,A_{tk})\in\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\dots,m_k\times n_k}(P),\ t=1,2,\dots,l,$$

$$A_{i1}=0_{m_1\times n_1},\dots,A_{ik}=0_{m_k\times n_k},$$

то есть

$$\mathbf{A}_i=\mathbf{0}=(0_{m_1\times n_1},\dots,0_{m_k\times n_k}).$$

Согласно определению операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$,

$$Y_j=A_{1j}A_{2\sigma(j)}\dots$$
$$\dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}A_{i\sigma^{i-1}(j)}A_{(i+1)\sigma^{i}(j)}\dots A_{l\sigma^{l-1}(j)}=$$
$$=A_{1j}A_{2\sigma(j)}\dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}0_{m_{\sigma^{i-1}(j)}\times n_{\sigma^{i-1}(j)}}$$
$$A_{(i+1)\sigma^{i}(j)}\dots A_{l\sigma^{l-1}(j)}=0_{m_j\times n_j}$$

для любого $j\in\{1,2,\dots,k\}$. Тем самым доказано равенство

$$[\mathbf{A}_1\dots\mathbf{A}_{i-1}\mathbf{0}\mathbf{A}_{i+1}\dots\mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}=\mathbf{0},\ \mathrm{I}=1,2,\dots,l.$$

Следовательно, $\mathbf{0}$ – нуль l-арной полугруппы $<\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\dots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$.

Пусть теперь $l\ge 3$, $i\in\{1,\dots,l\}$, $\mathbf{C}=(C_1,\dots,C_k)$ – произвольная вектор-матрица из $\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\dots,m_k\times n_k}(P)$,

$$[\mathbf{A}_1\dots\mathbf{A}_{i-1}\mathbf{C}\mathbf{A}_{i+1}\dots\mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}=(Z_1,Z_2,\dots,Z_k),$$

где

$$\mathbf{A}_t=(A_{t1},A_{t2},\dots,A_{tk})\in\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\dots,m_k\times n_k}(P),$$

$t\in\{1,\dots,i-1,i+1,\dots,l\}$.

Если $i\ge 3$, то положим

$$\mathbf{A}_1=(A_{11}=0_{m_1\times n_1},\dots,A_{1(k-1)}=0_{m_{k-1}\times n_{k-1}},A_{1k}\ne 0_{m_k\times n_k}),$$

$$\mathbf{A}_2=(A_{21},A_{22},\dots,A_{2k})\ne\mathbf{0},\ A_{2\sigma(k)}=0_{m_{\sigma(k)}\times n_{\sigma(k)}},$$

$$\mathbf{A}_s\ne\mathbf{0},\ s\in\{3,\dots,i-1,i+1,\dots,l\}.$$

Тогда для $j=1,\dots,k-1$ имеем

$$Z_j=A_{1j}A_{2\sigma(j)}\dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}C_{\sigma^{i-1}(j)}A_{(i+1)\sigma^{i}(j)}\dots A_{l\sigma^{l-1}(j)}=$$
$$=0_{m_j\times n_j}A_{2\sigma(j)}\dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}$$
$$C_{\sigma^{i-1}(j)}A_{(i+1)\sigma^{i}(j)}\dots A_{l\sigma^{l-1}(j)}=0_{m_j\times n_j},$$

а для $j=k$ имеем

$$Z_k=A_{1k}A_{2\sigma(k)}A_{3\sigma^2(k)}\dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(k)}$$
$$C_{\sigma^{i-1}(k)}A_{(i+1)\sigma^{i}(k)}\dots A_{l\sigma^{l-1}(k)}=$$
$$=A_{1k}0_{m_{\sigma(k)}\times n_{\sigma(k)}}A_{3\sigma^2(k)}\dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(k)}$$
$$C_{\sigma^{i-1}(k)}A_{(i+1)\sigma^{i}(k)}\dots A_{l\sigma^{l-1}(k)}=0_{m_k\times n_k}.$$

Таким образом, если $i\ge 3$, то

$$[\mathbf{A}_1\dots\mathbf{A}_{i-1}\mathbf{C}\mathbf{A}_{i+1}\dots\mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}=\mathbf{0},\qquad(4.1)$$

где все вектор-матрицы $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_{i-1},\mathbf{A}_{i+1},\dots,\mathbf{A}_l$ отличны от нуля $\mathbf{0}$.

Если $i=2$, то положим $\mathbf{A}_1$ таким же, как в случае $i\ge 3$, в $\mathbf{A}_3\ne\mathbf{0}$ компонента $A_{3\sigma^2(k)}$ равна нулевой матрице $0_{m_{\sigma^2(k)}\times n_{\sigma^2(k)}}$, вектор-матрицы $A_4,\dots,A_l$ отличны от $\mathbf{0}$. Тогда снова

$$Z_1=0_{m_1\times n_1},\dots,Z_{k-1}=0_{m_{k-1}\times n_{k-1}},$$

и, кроме того,

$$Z_k=A_{1k}C_{\sigma(k)}A_{3\sigma^2(k)}A_{4\sigma^3(k)}\dots A_{l\sigma^{l-1}(k)}=$$
$$=A_{1k}C_{\sigma(k)}0_{m_{\sigma^2(k)}\times n_{\sigma^2(k)}}A_{4\sigma^3(k)}\dots A_{l\sigma^{l-1}(k)}=0_{m_k\times n_k}.$$

Таким образом, для $i=2$ равенство (4.1) также верно.

Если $i=1$, то положим

$$A_{2\sigma(1)}=0_{m_{\sigma(1)}\times n_{\sigma(1)}},\dots,A_{2\sigma(k-1)}=0_{m_{\sigma(k-1)}\times n_{\sigma(k-1)}},$$
$$A_{2\sigma(k)}\ne 0_{m_{\sigma(k)}\times n_{\sigma(k)}},$$

$\mathbf{A}_3,\dots,\mathbf{A}_l$ такие же, как и в случае $i=2$. Тогда для $j=1,\dots,k-1$ имеем

$$Z_j=C_jA_{2\sigma(j)}A_{3\sigma^2(j)}\dots A_{l\sigma^{l-1}(j)}=$$
$$=C_j0_{m_{\sigma(j)}\times n_{\sigma(j)}}A_{3\sigma^2(j)}\dots A_{l\sigma^{l-1}(j)}=0_{m_j\times n_j},$$

а для $j=k$ имеем

$$Z_k=C_kA_{2\sigma(k)}A_{3\sigma^2(k)}A_{4\sigma^2(k)}\dots A_{l\sigma^{l-1}(k)}=$$
$$=C_kA_{2\sigma(k)}0_{m_{\sigma^2(k)}\times n_{\sigma^2(k)}}A_{4\sigma^3(k)}\dots A_{l\sigma^{l-1}(k)}=0_{m_k\times n_k}.$$

Таким образом, и в случае $i=1$ верно равенство (4.1). Следовательно, $\mathbf{C}$ – делитель нуля l-арной полугруппы $<\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\dots,m_k\times n_k}(P), [\ ]_{l,\sigma,k}>$. Теорема доказана.

Для теоремы 4.1 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 2.1 – 2.5.

5 (2, *l*)-кольцо $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), +, [\ ]_{l,\sigma,k} >$

***Предложение* 5.1**. *Пусть* $i = 1, \ldots, l$,

$$\mathbf{A}_m = (A_{m1}, \ldots, A_{mk}),\ m = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, l,$$
$$\mathbf{B} = (B_1, \ldots, B_k),$$
$$\mathbf{C} = (C_1, \ldots, C_k)$$

– k-компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом P. Тогда, если определена одна из k-компонентных вектор-матриц

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}, \qquad (5.1)$$
$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{B}\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} + [\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{C}\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}, \qquad (5.2)$$

то определена и вторая вектор-матрица и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{B}\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} + [\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{C}\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}. \qquad (5.3)$$

Доказательство. Положим

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_k),$$
$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{B}\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} + [\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{C}\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{V} = (V_1, \ldots, V_k),$$
$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{B}\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{G} = (G_1, \ldots, G_k),$$
$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}\mathbf{B}\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{H} = (H_1, \ldots, H_k).$$

Предположим, что определена вектор-матрица (5.1). Тогда для любого $j = 1, \ldots, k$ определена матрица.

$$U_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}(B_{\sigma^{i-1}(j)} + C_{\sigma^{i-1}(j)})A_{(i+1)\sigma^{i}(j)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(j)}.$$

Из последнего равенства, используя дистрибутивность умножения матриц относительно их сложения, получим

$$U_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}B_{\sigma^{i-1}(j)}A_{(i+1)\sigma^{i}(j)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(j)} + A_{1j}A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}C_{\sigma^{i-1}(j)}A_{(i+1)\sigma^{i}(j)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(j)},$$

где в правой части первое слагаемое совпадает с G_j, а второе – с H_j, то есть

$$U_j = G_j + H_j = V_j,\ j = 1, \ldots, k.$$

Следовательно, определена вектор-матрица (5.2) и верно (5.3).

Если определена вектор-матрица (5.2), то для любого $j = 1, \ldots, k$ определена матрица

$$V_j = G_j + H_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}B_{\sigma^{i-1}(j)}A_{(i+1)\sigma^{i}(j)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(j)} + A_{1j}A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}C_{\sigma^{i-1}(j)}A_{(i+1)\sigma^{i}(j)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(j)}.$$

Из последнего равенства, снова используя дистрибутивность умножения матриц относительно их сложения, получим

$$V_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}(B_{\sigma^{i-1}(j)} + C_{\sigma^{i-1}(j)})A_{(i+1)\sigma^{i}(j)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(j)} = U_j,$$

то есть $V_j = U_j$, $j = 1, \ldots, k$. Следовательно, определена вектор-матрица (5.1) и верно (5.3). Предложение доказано.

Теоремы 1.3, 2.1, 3.1, 4.1, замечание 4.1 и предложение 5.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

***Теорема* 5.1**. *Пусть P – ассоциативное кольцо, набор* $((m_1 \times n_1), \ldots, (m_k \times n_k))$ *согласован с подстановкой* $\sigma \in S_k$, *удовлетворяющей условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *универсальная алгебра* $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), +, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *является ассоциативным* (2, *l*)-*кольцом*;

2) *если в P есть единица*,

$$\min\{m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k\} \geq 2,$$

то (2, *l*)-*кольцо из* 1) *не является полуабелевым*;

3) *если σ – нетождественная подстановка, то в* (2, *l*)-*кольце из* 1) *нет единиц, а при* $l \geq 3$ *все его элементы являются делителями нуля*.

Для теоремы 5.1 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 2.1–2.5.

6 (2, *l*)-алгебра $< \mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P), +, [\ ]_{l,\sigma,k} >$

Напомним [1], что произведением скаляра $\lambda \in P$ на вектор-матрицу $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ называется вектор-матрица $\lambda\mathbf{A} = (\lambda A_1, \ldots, \lambda A_k)$. Легко проверяется (см. например, предложение 1 из [1]), что множество $\mathbf{M}_{m_1\times n_1,\ldots,m_k\times n_k}(P)$, где P – поле, является линейным пространством над P с операциями сложения вектор-матриц и умножения вектор-матриц на скаляр. Нулем этого линейного пространства является вектор-матрица $\mathbf{0} = (0_1, \ldots, 0_k)$, где компоненты $0_1, \ldots, 0_k$ – нулевые матрицы размеров $m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k$ соответственно. Противоположной для вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ является вектор-матрица

$$-\mathbf{A} = (-A_1, \ldots, -A_k),$$

у которой компоненты $-A_1, \ldots, -A_k$ являются противоположными для матриц $A_1, \ldots, A_k$ соответственно.

***Предложение* 6.1.** *Если для k-компонентых вектор-матриц*

$$\mathbf{A}_m = (A_{m1}, \ldots, A_{mk}),\ m = 1, \ldots, l$$

над ассоциативным коммутативным кольцом P определена вектор-матрица $[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}$, *то*

$$\lambda[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}(\lambda\mathbf{A}_i)\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} \qquad (6.1)$$

для всех $\lambda \in P$ *и любого* $i = 1, \ldots, l$.

Доказательство. Ясно, что правая часть равенства из формулировки предложения определена. Положим

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = (B_1, \ldots, B_k),$$
$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}(\lambda\mathbf{A}_i)\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = (C_1, \ldots, C_k).$$

Так как, согласно определению операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$,

$$C_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}(\lambda A_{i\sigma^{i-1}(j)})A_{(i+1)\sigma^{i}(j)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(j)} = \lambda(A_{1j}A_{2\sigma(j)} \ldots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}A_{i\sigma^{i-1}(j)}A_{(i+1)\sigma^{i}(j)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(j)}) = \lambda B_j,$$

то есть $C_j = \lambda B_j$ для любого $j = 1, \ldots, k$, то

$$\lambda[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k} = \lambda(B_1, \ldots, B_k) = (\lambda B_1, \ldots, \lambda B_k) = (C_1, \ldots, C_k) = [\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_{i-1}(\lambda\mathbf{A}_i)\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}.$$

Предложение доказано.

***Теорема* 6.1**. *Пусть P – поле, набор* $((m_1 \times n_1), \ldots, (m_k \times n_k))$ *согласован с подстановкой* $\sigma \in S_k$, *удовлетворяющей условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда*:

1) *универсальная алгебра* $< \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k}(P)$, $+$, $[\ ]_{l, \sigma, k} >$ *является ассоциативной* $(2, l)$*-алгеброй над P*;

2) *если* $min\{m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k\} \geq 2$, *то* $(2, l)$*-алгебра из* 1) *не является полуабелевой*;

3) *если σ – нетождественная подстановка, то в* $(2, l)$*-алгебре из* 1) *нет единиц, а при* $l \geq 3$ *все ее элементы являются делителями нуля*.

Доказательство. 1) По теореме 1.3 линейное пространство $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k}(P)$ замкнуто относительно ассоциативной l-арной операции $[\ ]_{l, \sigma, k}$, которая по предложению 5.1 дистрибутивна относительно операции сложения вектор-матриц. Кроме того, согласно предложению 6.1, в этом линейном пространстве выполняется условие (6.1). Следовательно, $< \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k}(P)$, $+$, $[\ ]_{l, \sigma, k} >$ – ассоциативная $(2, l)$-алгебра.

2), 3) Следует из 2) и 3) теоремы 5.1. Теорема доказана.

***Следствие* 6.1**. *Пусть P – поле, набор* $((m_1 \times n_1), \ldots, (m_k \times n_k))$ *согласован с подстановкой* $\sigma \in S_k$ порядка d. *Тогда*:

1) *универсальная алгебра* $< \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k}(P)$, $+$, $[\ ]_{d+1, \sigma, k} >$ *является ассоциативной* $(2, d+1)$*-алгеброй над P*;

2) *если* $min\{m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k\} \geq 2$, *то* $(2, d+1)$*-алгебра из* 1) *не является полуабелевой*;

3) *если σ – нетождественная подстановка, то в* $(2, d+1)$*-алгебре из* 1) *нет единиц, а при* $d \geq 2$ *все ее элементы являются делителями нуля*.

***Следствие* 6.2**. *Пусть P – поле, σ – цикл длины k из* S_k, *числа* $m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k$ *удовлетворяют равенствам из следствия* 2.2 *Тогда*:

1) *универсальная алгебра* $< \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k}(P)$, $+$, $[\ ]_{k+1, \sigma, k} >$ *является ассоциативной* $(2, k+1)$*-алгеброй над P*;

2) *если* $min\{m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k\} \geq 2$, *то* $(2, k+1)$*-алгебра из* 1) *не является полуабелевой*;

3) *если σ – нетождественная подстановка, то в* $(2, k+1)$*-алгебре из* 1) *нет единиц, а при* $k \geq 2$ *все ее элементы являются делителями нуля*.

***Следствие* 6.3**. *Пусть P – поле, числа* $m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k$ *удовлетворяют равенствам из следствия* 2.3. Тогда:

1) *универсальная алгебра* $< \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \ldots, m_k \times n_k}(P)$, $+$, $[\ ]_{k+1, (12 \ldots k), k} >$ *является ассоциативной* $(2, k+1)$*-алгеброй над P*;

2) *если* $min\{m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k\} \geq 2$, *то* $(2, k+1)$*-алгебра из* 1) *не является полуабелевой*;

3) *если σ – нетождественная подстановка, то в* $(2, k+1)$*-алгебре из* 1) *нет единиц, а при* $k \geq 2$ *все ее элементы являются делителями нуля*.

***Следствие* 6.4**. *Пусть P – поле. Тогда*:

1) *универсальная алгебра* $< \mathbf{M}_{m \times s, s \times r, r \times m}(P)$, $[\ ]_{4, (123), 3} >$ *является ассоциативной* $(2, 4)$*-алгеброй над P, в которой нет единиц, а все ее элементы являются делителями нуля*;

2) *если* $min\{m, s, r\} \geq 2$, *то* $(2, 4)$*-алгебра из* 1) *не является полуабелевой*.

***Следствие* 6.5**. *Пусть P – поле. Тогда*:

1) *универсальная алгебра* $< \mathbf{M}_{m \times n, n \times m}(P)$, $[\ ]_{3, (12), 2} >$ *является ассоциативной* $(2, 3)$*-алгеброй над P, в которой нет единиц, а все ее элементы являются делителями нуля*;

2) *если* $min\{m, n\} \geq 2$, *то* $(2, 3)$*-алгебра из* 1) *не является полуабелевой*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак, А.М.* Вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – № 1 (37), серия В. – С. 30–37.
2. *Post, E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. *Гальмак, А.М.* σ-Согласованные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – № 2 (37), серия В. – С. 30–37.
4. *Гальмак, А.М.* Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 52–56.
5. *Гальмак, А.М.* Вектор-определители и определители вектор-матриц / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2 (7). – С. 58–64.
6. *Гальмак, А.М.* Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28 – 34.
7. *Гальмак, А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
8. *Русаков, С.А.* Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
9. *Гальмак, А.М.* *n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
10. *Гальмак, А.М.* *n*-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.
11. *Cupona, G.* On [*n*, *m*]-rings / G. Cupona // Bull. Soc. Math. Phys. Mased. – 1965. – Vol. 16. – P. 5–10.
12. *Crombez, G.* On (*n*, *m*)-rings / G. Crombez // Abh. Math. Sem. Univ. – Hamburg. – 1972. – Vol. 37. – P. 180–199.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА-002).

Поступила в редакцию 10.09.11.