Проблемы физики, математики и техники, № 3 (8), 2011

УДК 517.2

ПРИМЕНЕНИЕ СЕТИ ДЖЕКСОНА К МОДЕЛИРОВАНИЮ ГАРАНТИЙНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ТЕХНИКИ

О.В. Якубович[1], Ю.С. Боярович[1], Ю.Е. Летунович[1], Д.Е. Ворошилов[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*
[2]*ПО «Гомсельмаш», Гомель*

APPLICATION OF JACKSON'S NETWORK TO MODELLING OF THE WARRANTY SERVICE OF AGRICULTURAL TECHNIQUES

O.V. Yakubovich[1], Y.S. Boyarovich[1], Y.E. Letunovich[1], D.E. Voroshilov[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University, Gomel*
[2]*Production Association «Gomselmash», Gomel*

В работе рассматривается математическая модель процесса гарантийного обслуживания сельскохозяйственных машин, выпускаемых ПО «Гомсельмаш», региональными дилерскими центрами, функционирование каждого центра описано сетью массового обслуживания. Найдены стационарное распределение вероятностей состояний сети и условия эргодичности, получены формулы для определения числовых характеристик стационарного функционирования сети.

Ключевые слова: *сеть массового обслуживания, стационарное распределение, условия эргодичности, числовые характеристики.*

The paper considers the mathematical model of the warranty service process of «Gomselmash» agricultural techniques provided by regional dealer centers. The service process of each center is described by a queueing network. The stationary distribution of conditions probabilities of the network and ergodicity conditions are found. Formulas for definition of numerical characteristics of network stationary functioning are received.

Keywords: *queueing network, stationary distribution, ergodicity conditions, numerical characteristics.*

Введение

В связи с тенденцией развития информатизации и компьютеризации различных сфер жизни общества, все большее внимание уделяется исследованию процессов накопления, хранения, обработки и передачи информации. Рассмотрение многих объектов систем передачи информации требует применения аппарата теории сетей массового обслуживания. Результаты исследований, полученные в рамках теории массового обслуживания, находят непосредственное применение при имитационном моделировании, в проектировании мультипрограммных вычислительных систем, анализе сетей передачи данных, а также при разработке методов повышения эффективности информационно-телекоммуникационных сетей. Использование сложных математических моделей сетей открывает возможности эффективного конструирования и эксплуатации исследуемых систем.

Система гарантийного обслуживания сельскохозяйственных машин, выпускаемых ПО «Гомсельмаш», основана на функционировании совокупности его независимых региональных дилерских центров (отделов технической эксплуатации и сервисного обслуживания по регионам), каждый из которых в соответствии с теорией сетей массового обслуживания [1]–[3] может быть описан сетью массового обслуживания. В данной работе построена математическая модель функционирования отдельного дилерского центра, осуществляющего гарантийное обслуживание парка сельскохозяйственных машин, выпускаемых ПО «Гомсельмаш».

Процесс поступления и обработки информационных сообщений об отказах в работе техники осуществляется следующим образом. Информационное сообщение об отказе в работе каждой отдельной сельскохозяйственной машины (в виде телеграммы, телетайпограммы, телефонограммы) от ее потребителя поступает в дилерский центр. После получения каждого из этих сообщений работники дилерского центра ставят их на контроль, передают эту информацию в бюро информации УТиСОП (управление технического и сервисного обслуживания продукции) ПО «Гомсельмаш» для регистрации и внесения в компьютерную базу данных об отказах техники и организуют работу выездной бригады работников дилерского центра по оперативному устранению отказа. По прибытию к потребителю представители организации-изготовителя в составе выездной бригады проводят техническую экспертизу отказавшего объекта. После оценки ситуации специалисты выездной бригады на месте устраняют имеющуюся неисправность. При необходимости, они организуют доставку на место из дилерского центра необходимых запасных частей и (или) вызов специалистов, квалификация которых требуется для проведения ремонтных работ.

Таким образом, осуществляется передача данных в трехузловой открытой сети массового обслуживания, узлами в которой являются: служба дилерского центра, занимающаяся приемом, регистрацией и обработкой сообщений об отказах техники, выездная бригада работников дилерского центра, а также место ремонта сельскохозяйственных машин специалистами дилерского центра. Будем называть их соответственно первым, вторым и третьим узлами. Информационные сообщения об отказах и группы специалистов (выездные бригады), направляемые к месту ремонта, условимся называть заявками, а обработку информационных сообщений и ремонт техники – интерпретировать как обслуживание заявок.

1 Описание сети

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, состоящая из трех узлов. Каждый узел представляет собой однолинейную систему массового обслуживания. Предполагается, что число мест для ожидания в узлах сети не ограничено. Предположим, что заявки поступают в сеть пуассоновским потоком интенсивности λ. Пусть $n_i(t)$ – количество заявок в i-ом узле в момент времени t, $i=1,2,3$. Состояние сети в момент времени t описывается вектором $n(t)=(n_1(t), n_2(t), n_3(t))$, тогда $n(t)$ – случайный процесс с непрерывным временем и пространством состояний $X=\{(n_1,n_2,n_3)\,|\,n_i=0,1,2,..., i=1,2,3\}$.

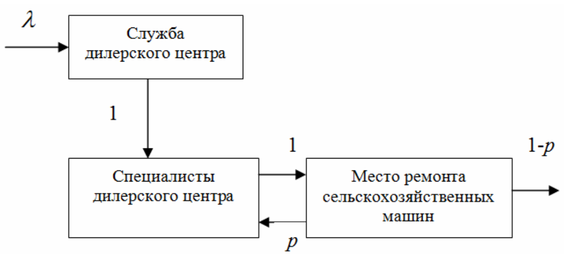

Рисунок 1 – Модель функционирования дилерского центра

С вероятностью 1 заявки входного потока направляются в очередь первого узла сети. Времена обслуживания заявок в узлах независимы, не зависят от процесса поступления и в i-ом узле имеют экспоненциальное с параметрами $\mu_i(n_i)$, $i=1,2,3$, если i-ый узел находится в состоянии n_i. После обслуживания в первом узле заявка с вероятностью 1 переходит во второй, а после обслуживания во втором с вероятностью 1 – в третий. По завершении обслуживания в третьем узле заявка с вероятностью p возвращается во второй узел, а с вероятностью $1-p$ покидает сеть. При сделанных предположениях $n(t)$ – марковский процесс. На рисунке 1 изображена схема рассматриваемой модели.

2 Стационарное распределение вероятностей состояний сети

Обозначим через

$$\{P(n_1,n_2,n_3),(n_1,n_2,n_3)\in X\}$$

стационарное распределение вероятностей состояний процесса $n(t)$. Если стационарное распределение вероятностей состояний процесса $n(t)$ существует, то стационарные вероятности $P(n_1,n_2,n_3)$ удовлетворяют следующей системе уравнений глобального равновесия:

$$\begin{gathered}P(n_1,n_2,n_3)[\lambda+\mu_1(n_1)I_{\{n_1\neq 0\}}+\\+\mu_2(n_2)I_{\{n_2\neq 0\}}+\mu_3(n_3)I_{\{n_3\neq 0\}}]=\\=P(n_1-1,n_2,n_3)\,\lambda\, I_{\{n_1\neq 0\}}+\\+P(n_1+1,n_2-1,n_3)\mu_1(n_1+1)I_{\{n_2\neq 0\}}+\\+P(n_1,n_2+1,n_3-1)\mu_2(n_2+1)I_{\{n_3\neq 0\}}+\\+P(n_1,n_2-1,n_3+1)\mu_3(n_3+1)I_{\{n_2\neq 0\}}p+\\+P(n_1,n_2,n_3+1)\mu_3(n_3+1)(1-p),\,(n_1,n_2,n_3)\in X.\end{gathered}$$

Стационарное распределение вероятностей состояний $\{P(n_1,n_2,n_3),(n_1,n_2,n_3)\in X\}$ может быть найдено по теореме Джексона [1].

Обозначим через $\lambda\varepsilon_i$ полную интенсивность поступления заявок в i-ый узел ($i=1,2,3$). Система уравнений трафика принимает следующий вид:

$$\begin{cases}\lambda\varepsilon_1=\lambda;\\ \lambda\varepsilon_2=\lambda\varepsilon_1+p\lambda\varepsilon_3;\\ \lambda\varepsilon_3=\lambda\varepsilon_2.\end{cases}\qquad(2.1)$$

Решив систему (2.1), получим

$$\begin{cases}\varepsilon_1=1;\\ \varepsilon_2=1/(1-p);\\ \varepsilon_3=1/(1-p).\end{cases}\qquad(2.2)$$

Стационарное распределение вероятностей состояний i-го ($i=1,2,3$) изолированного узла сети:

$$P_i(n_i)=P_i(0)(\lambda\varepsilon_i)^{n_i}\prod_{l=1}^{n_i}\mu_i^{-1}(l),\qquad(2.3)$$

где $P_i(0)=\left(1+\sum\limits_{n_i=1}^{\infty}(\lambda\varepsilon_i)^{n_i}\prod\limits_{l=1}^{n_i}\mu_i^{-1}(l)\right)^{-1}$ находится из условия нормировки, $\{\varepsilon_i, i=1,2,3\}$ – решение системы уравнений трафика (2.2).

Условия эргодичности для процесса, описывающего функционирование сети, имеют следующий вид:

$$\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in X}\left|\lambda^{n_1}\prod_{l=1}^{n_1}\mu_1^{-1}(l)\cdot\lambda^{n_2}(1-p)^{-n_2}\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{m=1}^{n_2}\mu_2^{-1}(m)\cdot\lambda^{n_3}(1-p)^{-n_3}\prod_{k=1}^{n_3}\mu_3^{-1}(k)\right|<\infty \quad (2.4)$$

или

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\left|\lambda^{n_1}\prod_{l=1}^{n_1}\mu_1^{-1}(l)\right|<\infty;$$
$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\left|\lambda^{n_2}(1-p)^{-n_2}\prod_{l=1}^{n_2}\mu_2^{-1}(l)\right|<\infty;$$
$$\sum_{n_3=0}^{\infty}\left|\lambda^{n_3}(1-p)^{-n_3}\prod_{l=1}^{n_3}\mu_3^{-1}(l)\right|<\infty.$$

***Теорема* 2.1.** *При выполнении условий эргодичности* (2.4) *стационарное распределение вероятностей состояний сети*

$$\{P(n_1,n_2,n_3),(n_1,n_2,n_3)\in X\}$$

представляет собой произведение стационарных распределений вероятностей состояний изолированных узлов:

$$P(n_1,n_2,n_3)=\prod_{i=1}^{3}P_i(n_i),$$

где $P_i(n_i)$ *определяется по формуле* (2.3).

Таким образом, стационарное распределение вероятностей состояний сети имеет следующий вид:

$$P(n_1,n_2,n_3)=P(0,0,0)\lambda^{n_1}\prod_{l=1}^{n_1}\mu_1^{-1}(l)\lambda^{n_2}\times$$
$$\times(1-p)^{-n_2}\prod_{m=1}^{n_2}\mu_2^{-1}(m)\lambda^{n_3}(1-p)^{-n_3}\prod_{k=1}^{n_3}\mu_3^{-1}(k), \quad (2.5)$$

где

$$P(0,0,0)=\left(1+\sum_{n_1=1}^{\infty}\lambda^{n_1}\prod_{l=1}^{n_1}\mu_1^{-1}(l)\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(1+\sum_{n_2=1}^{\infty}\lambda^{n_2}(1-p)^{-n_2}\prod_{l=1}^{n_2}\mu_2^{-1}(l)\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(1+\sum_{n_3=1}^{\infty}\lambda^{n_3}(1-p)^{-n_3}\prod_{l=1}^{n_3}\mu_3^{-1}(l)\right)^{-1}.$$

3 Числовые характеристики стационарного функционирования сети массового обслуживания

Зная вид (2.5) стационарного распределения вероятностей состояний сети, можно вывести формулы для нахождения характеристик стационарного функционирования сети:

1. Среднее число заявок в i-ом узле (i=1,2,3):

$$\overline{\xi_i}=\sum_{n_i=0}^{\infty}n_iP_i(n_i).$$

Среднее число заявок в первом узле в стационарном режиме находится по формуле:

$$\overline{\xi_1}=\sum_{n_1=0}^{\infty}n_1P_1(n_1)=$$
$$=\left(1+\sum_{n_1=1}^{\infty}\lambda^{n_1}\prod_{l=1}^{n_1}\mu_1^{-1}(l)\right)^{-1}\times \quad (3.1)$$
$$\times\sum_{n_1=0}^{\infty}n_1\lambda^{n_1}\prod_{l=1}^{n_1}\mu_1^{-1}(l).$$

Среднее число заявок во втором узле в стационарном режиме находится по формуле:

$$\overline{\xi_2}=\sum_{n_2=0}^{\infty}n_2P_2(n_2)=$$
$$=\left(1+\sum_{n_2=1}^{\infty}\lambda^{n_2}(1-p)^{-n_2}\prod_{l=1}^{n_2}\mu_2^{-1}(l)\right)^{-1}\times \quad (3.2)$$
$$\times\sum_{n_2=0}^{\infty}n_2\lambda^{n_2}(1-p)^{-n_2}\prod_{l=1}^{n_2}\mu_2^{-1}(l).$$

Среднее число заявок в третьем узле в стационарном режиме находится по формуле:

$$\overline{\xi_3}=\sum_{n_3=0}^{\infty}n_3P_3(n_3)=$$
$$=\left(1+\sum_{n_3=1}^{\infty}\lambda^{n_3}(1-p)^{-n_3}\prod_{l=1}^{n_3}\mu_3^{-1}(l)\right)^{-1}\times \quad (3.3)$$
$$\times\sum_{n_3=0}^{\infty}n_3\lambda^{n_3}(1-p)^{-n_3}\prod_{l=1}^{n_3}\mu_3^{-1}(l).$$

2. Среднее число заявок в сети:

$$\overline{\xi}=\overline{\xi_1}+\overline{\xi_2}+\overline{\xi_3}, \quad (3.4)$$

где $\overline{\xi_i}$ определяется с помощью (3.1)–(3.4).

3. Среднее число заявок, ожидающих обслуживания в очереди i -го узла ($i=1,2,3$):

$$\overline{\eta_i}=\sum_{n_i=2}^{\infty}(n_i-1)P_i(n_i).$$

Среднее число заявок, ожидающих обслуживания в очереди первого узла в стационарном режиме находится по формуле:

$$\overline{\eta_1}=\sum_{n_1=1}^{\infty}(n_1-1)P_1(n_1)=\left(1+\sum_{n_1=1}^{\infty}\lambda^{n_1}\prod_{l=1}^{n_1}\mu_1^{-1}(l)\right)^{-1}\times$$

$$\times\sum_{n_1=1}^{\infty}(n_1-1)\lambda^{n_1}\prod_{l=1}^{n_1}\mu_1^{-1}(l). \qquad (3.5)$$

Среднее число заявок, ожидающих обслуживания в очереди второго узла в стационарном режиме находится по формуле:

$$\bar{\eta}_2=\sum_{n_2=1}^{\infty}(n_2-1)P_2(n_2)=$$

$$=\left(1+\sum_{n_2=1}^{\infty}\lambda^{n_2}(1-p)^{-n_2}\prod_{l=1}^{n_2}\mu_2^{-1}(l)\right)^{-1}\times$$
$$\times\sum_{n_2=1}^{\infty}(n_2-1)\lambda^{n_2}(1-p)^{-n_2}\prod_{l=1}^{n_2}\mu_2^{-1}(l). \qquad (3.6)$$

Среднее число заявок, ожидающих обслуживания в очереди третьего узла в стационарном режиме находится по формуле:

$$\bar{\eta}_3=\sum_{n_3=1}^{\infty}(n_3-1)P_3(n_3)=$$

$$=\left(1+\sum_{n_3=1}^{\infty}\lambda^{n_3}(1-p)^{-n_3}\prod_{l=1}^{n_3}\mu_3^{-1}(l)\right)^{-1}\times$$
$$\times\sum_{n_3=1}^{\infty}(n_3-1)\lambda^{n_3}(1-p)^{-n_3}\prod_{l=1}^{n_3}\mu_3^{-1}(l). \qquad (3.7)$$

4. Среднее число заявок, ожидающих обслуживания в сети:

$$\bar{\eta}=\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_2+\bar{\eta}_3, \qquad (3.8)$$

где $\bar{\eta}_i$ – среднее число заявок, ожидающих обслуживания в i-ом узле, определяемое с помощью (3.5)–(3.7).

5. Среднее время пребывания заявки в i-ом узле ($i=1,2,3$):

$$\bar{V}_i=\frac{\bar{\xi}_i}{\lambda\varepsilon_i},$$

где $\bar{\xi}_i$ – среднее число заявок в i-ом узле, определяемое по формулам (3.1)–(3.4), $\{\varepsilon_i, i=1,2,3\}$ – решение (2.2) системы уравнений трафика (2.1).

6. Среднее время ожидания заявки в i-ом узле ($i=1,2,3$):

$$\bar{W}_i=\frac{\bar{\eta}_i}{\lambda\varepsilon_i},$$

где $\bar{\eta}_i$ – среднее число заявок, ожидающих обслуживания в i-ом узле, определяемое по формулам (3.5)–(3.7), $\{\varepsilon_i, i=1,2,3\}$ – решение (2.2) системы уравнений трафика (2.1).

7. Среднее время пребывания заявки в сети:

$$\bar{V}=\frac{\bar{\xi}}{\lambda},$$

где $\bar{\xi}$ – среднее число заявок в сети, определяемое с помощью (3.4).

8. Среднее время ожидания заявки в сети:

$$\bar{W}=\frac{\bar{\eta}}{\lambda},$$

где $\bar{\eta}$ – среднее число заявок, ожидающих обслуживания в сети, которое определяется по формуле (3.8).

Заключение

В работе проведен анализ системы гарантийного обслуживания сельскохозяйственных машин, выпускаемых ПО «Гомсельмаш», основанной на функционировании совокупности его независимых региональных дилерских центров, при этом каждый из дилерских центров описан сетью массового обслуживания. Разработана математическая модель стохастической сети массового гарантийного обслуживания сельскохозяйственных машин, выпущенных ПО «Гомсельмаш». Для разработанной математической модели сети массового обслуживания установлены условия эргодичности и аналитический вид стационарного распределения вероятностей состояний сети, найдены формулы для определения ряда числовых характеристик стационарного функционирования сети: среднего числа заявок в узлах и в сети; среднего числа заявок, ожидающих обслуживания в узлах и в сети; среднего времени пребывания и среднего времени ожидания заявок в узлах и в сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jackson, J.R.* Networks of waiting lines / J.R. Jackson // Oper. Res. – 1957. – Vol. 5, № 4. – P. 518–521.

2. *Ивницкий, В.А.* Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий. – М. : Изд-во физ.-мат.лит., 2004. – 772 с.

3. *Бочаров, П.П.* Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – М. : Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.

Поступила в редакцию 30.06.11.