

столкновений и усовершенствованным методом с полиномами (27), (28). Сечения и результаты расчетов представлены в табл. 1, 2 и на рис. 2. Сравнение с методом Монте-Карло показало высокую точность усовершенствованного метода (см. табл. 2). Так же проводили сравнение с обычным методом первых столкновений, но при разделении на 16 зон (табл. 2). Погрешность обычного метода в расчете  $\Phi$  при разделении на 12 зон достигает 27,3%, усовершенствованного — 3%. Различие во времени счета в 4,5 раза, тогда как число неизвестных (элементов матриц) увеличивается в 9 раз. Рис. 2 показывает, что линейные функции  $f_{xt}$ ,  $f_{yt}$  уменьшают разрывы потока  $\Phi$  на границах зон, хотя и не устраняют их целиком.

Нельзя сказать, что деление сектора симметрии канала РБМК на 12 зон при линейных функциях  $f_{nt}$  — это оптимум. Вероятно, в графитовом кольце можно обойтись меньшим числом слоев. Зато между рядами твэлов, быть может, стоит произвести дополнительное дробление на мелкие зоны. С другой стороны, добавление квадратич-

ных членов в некоторых зонах может устранить необходимость в их дроблении.

**Заключение.** Обобщенный метод первых столкновений может оказаться полезным при расчете каналов со сложной геометрией, например каналов РБМК. При этом в разных зонах можно применять полиномы различных степеней, учитывая, где нужно, кривизну распределения нейтронов квадратичными членами.

Авторы признательны Ю. П. Елагину, А. С. Ильяшенко и В. А. Люльке за любезно предоставленную возможность сравнить свои результаты с результатами, полученными по их программам.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г. И., Лебедев В. И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1971.
2. Takeda T., Sekiya T. «J. Nucl. Sci. Techn.», 1971, v. 8, N 12, p. 663.
3. Askew J., Fayers E., Kemshell P. «J. Brit. Nucl. Energy Soc.», 1966, v. 5, N 4, p. 564.
4. Bikley W., Nayler J. «Phil. Mag.», 1935, v. 20, p. 343.

Поступила в Редакцию 08.01.79

УДК 621.039.554

## Оптимизация затрат при накоплении изотопов трансурановых элементов

НЕМИРОВСКАЯ С. А., РУДИК А. П.

В работе [1] предложена система уравнений, описывающая перераспределение затрат при накоплении изотопов трансурановых элементов. Цель настоящей статьи заключается в развитии формализма, позволяющего оптимизировать затраты при накоплении изотопов трансурановых элементов, если перераспределение этих затрат описывается системой уравнений из работы [1].

**Уравнения, описывающие выгорание изотопов,** имеют стандартный вид (см., например, публикации [2, 3]). Введем обозначения:  $x^{(i)}(t)$  — число ядер изотопа  $i$  в момент времени  $t$ ;  $\Sigma_i$  — скорость выгорания изотопа  $i$ ;  $\Sigma_i^{i-1}$  — скорость образования изотопа  $i$  за счет выгорания изотопа  $i-1$ ;  $\lambda_i$  — постоянная распада изотопа  $i$ ;  $\lambda_i^{i-1}$  — постоянная распада изотопа  $i-1$  с образованием изотопа  $i$ . Тогда

$$\frac{dx^{(i)}}{dt} = (\Sigma_i^{i-1} + \lambda_i^{i-1}) x^{(i-1)} - (\Sigma_i + \lambda_i) x^{(i)} \equiv f^{(i)}, \quad (1)$$

причем  $i = 1, \dots, n$ , где  $n$  — число рассматриваемых изотопов;  $\Sigma_1^0 = \lambda_1^0 = 0$ .

Если условно (как это принято, например, в работах [2, 3]) разделить плотность потока нейтронов на тепловую  $U$  и резонансную  $\omega$ , то скорость реакции  $\Sigma$  можно представить в виде

$$\Sigma = \sigma U + I \xi(x) \omega, \quad (2)$$

где  $\sigma$  и  $I$  — тепловое сечение и резонансный интеграл, а множитель  $\xi$  учитывает блокировку резонансного интеграла для изотопа  $x$ , которому соответствует  $\Sigma$ .

**Уравнения, описывающие перераспределение затрат.** Пусть

$$y^{(k)}(t) = C_{k-n}(t) x^{(k-n)}(t), \quad k = n+1, \dots, 2n_1 \quad (3)$$

есть стоимость всех ядер изотопа  $k-n$  в момент времени  $t$  (тогда  $C_{k-n}(t)$  — стоимость одного ядра изотопа  $k-n$ ), а  $\bar{V}$  — соответствующим образом усредненная стоимость одного нейтрона. Согласно работе [1], имеет место следующая система уравнений:

$$\frac{dy^{(k)}}{dt} = (\Sigma_{k-n-1} + \lambda_{k-n-1}) y^{(k-1)} + (\Sigma_{k-n} + \lambda_{k-n}) y^{(k)} + \Sigma_{k-n-1} \bar{V} x^{(k-n-1)} \equiv g^{(k)}. \quad (4)$$

Если воспользоваться выражением (2) для  $\Sigma_{k-n-1}$ , то произведение  $\Sigma_{k-n-1} \bar{V}$  преобразуется к виду

$$\Sigma_{k-n-1} \bar{V} = \sigma_{k-n-1} V_U U + I_{k-n-1} \xi V_\omega \omega, \quad (5)$$

где  $V_U$  и  $V_\omega$  — стоимость теплового и резонансного нейтрона соответственно.

**Анализируемый функционал.** Системы уравнений (1) и (4) должны быть дополнены анализируе-



мым функционалом  $J$  вида

$$J = \int_0^T f^{(0)} dt. \quad (6)$$

Здесь  $T$  — время облучения, а функция  $f^{(0)}$  зависит от  $x^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, n, y^{(k)}, k = n + 1, \dots, 2n$ ) и скорости реакции.

**Сопряженные функции и гамильтониан.** Сопряженные функции относительно  $x^{(i)}$  обозначим через  $\Psi_i$ , а относительно  $y^{(k)}$  — через  $\chi_k$ . Тогда гамильтониан  $\mathcal{H}$  систем уравнений (1) и (4), дополненных функционалом (6), записывается в форме

$$\mathcal{H} = \psi_0 f^{(0)} + \sum_{i=1}^n \Psi_i f^{(i)} + \sum_{k=n+1}^{2n} \chi_k g^{(k)}, \quad (7)$$

где  $\psi_0$  — неположительно определенная постоянная, а сопряженные функции  $\Psi_i$  и  $\chi_k$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^{(i)}}; \quad \frac{d\chi_k}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y^{(k)}}. \quad (8)$$

Если скорость реакции  $\Sigma$  имеет форму (2), то уравнения (8) преобразуются к виду

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = -\psi_0 \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x^{(i)}} + \Psi_i \frac{\partial (\Sigma_i x^{(i)})}{\partial x^{(i)}} - \Psi_{i+1} \frac{\partial (\Sigma_{i+1} x^{(i)})}{\partial x^{(i)}} + \chi_{i+n} y^{(i+n)} \frac{\partial \Sigma_i}{\partial x^{(i)}} - \chi_{i+n+1} \left[ y^{(i+n)} \frac{\partial \Sigma_i}{\partial x^{(i)}} + \bar{V} \frac{\partial (\Sigma_i x^{(i)})}{\partial x^{(i)}} \right]; \quad (9)$$

$$\frac{d\chi_k}{dt} = (\chi_k - \chi_{k+1})(\Sigma_{k-n} + \lambda_{k-n}) - \psi_0 \frac{\partial f^{(0)}}{\partial y^{(k)}},$$

причем производные от скорости реакции по переменной  $x$  не равны нулю за счет зависимости от  $x$  фактора блокировки  $\xi$ .

**Граничные условия.** Системы уравнений для фазовых переменных (1) и (4) и для сопряженных функций (8) или (9) должны быть дополнены граничными условиями. В начале облучения при  $t = 0$  заданы все величины  $x^{(i)}(0)$  и  $y^{(k)}(0)$ . В конце облучения при  $t = T$  обычно\* не заданы ни  $x^{(i)}(T)$ , ни  $y^{(k)}(T)$  и имеют место граничные условия

$$\Psi_i(T) = \chi_k(T) = 0; \quad i = 1, \dots, n; \quad k = n + 1, \dots, 2n. \quad (10)$$

**Теория возмущений.** Пусть скорость реакции имеет вид (2) и  $\alpha$  — одна из функций  $U, \omega, V_U, V_n$  или один из параметров  $\sigma$  или  $I$ . Тогда, если системы уравнений (1), (4) и (9) решены при некотором значении  $\alpha(t)$  и определен соответствующий функционал  $J$  из уравнения (4), то вариация  $\delta J$  следующим образом выражается [4] через

вариацию  $\delta\alpha$ :

$$\delta J = \int_0^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} \delta\alpha(t) dt, \quad (11)$$

при этом  $\psi_0 = -1$ .

**Управление в задачах.** Будем считать, что  $\Sigma$  имеет форму (2). Тогда в оптимизационных задачах в качестве управления могут фигурировать  $U(t)$  или  $\omega(t)$ . Требуется найти такие временные изменения функции  $U(t)$  либо  $\omega(t)$ , либо и той и другой, которые приводили бы к минимуму функционала  $J$ . Оказывается [5], что необходимым условием для этого является выполнение принципа максимума, который требует, чтобы гамильтониан как функция управления достигал максимума. Для рассматриваемого класса задач гамильтониан (7) линеен по управлению и может быть представлен в виде

$$\mathcal{H} = F_1 + F_2 U + F_3 \omega, \quad (12)$$

где функции  $F_1, F_2$  и  $F_3$  зависят только от фазовых переменных и сопряженных функций, но не зависят от управлений. Поэтому выполнение принципа максимума требует либо знакоопределенности функций переключений  $F_2$  и  $F_3$  при граничных значениях соответствующих управлений, либо — в случае особых управлений [6] — равенства функций переключения нулю.

**Два типа оптимизационных задач.** По-видимому, наибольший интерес представляют следующие типы.

1. Минимизация затрат на производство данного изотопа. В этом случае  $J(T) = y^{(k)}(T)$  и функция  $f^{(0)}$  может быть выбрана в виде  $f^{(0)} = g^{(k)}$ .

2. Минимизация затрат на производство суммы всех изотопов, входящих в уравнения (1). Тогда из системы (4) следует\*

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=n+1}^{2n} y^{(k)} = \bar{V} \sum_{i=1}^n \Sigma_i x^{(i)}. \quad (13)$$

Таким образом, минимизация затрат на производство суммы всех изотопов определяется только общим числом поглощенных нейтронов. В этом

Таблица 1

Основные физические постоянные, входящие в скорость реакции

Индекс	$\sigma, б$	$I, б$	Индекс	$\sigma, б$	$I, б$
1	48	1100	1 → 2	48	1100
2	90	2000	2 → 3	90	2000
3	12	720			

\* Если рассматривается цепочка (1) для  $n$  изотопов, то в уравнении (4) для  $y^{(2n)}$  нужно опустить член  $(\Sigma_n + \lambda_n) y^{(2n)}$ . Это обстоятельство мы имеем в виду, когда говорим о некоторой логической неубедительности работы [1].

\* Если некоторые из  $x^{(i)}(T)$  и  $y^{(k)}(T)$  заданы, то условие трансверсальности (10) изменяется стандартным образом (см., например, [4]).



Результаты расчета вариантов 1—3

Вариант	Функции времени	t, год						
		0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
Для всех вариантов	$x^{(3)}(t)$	0,000	0,037	0,113	0,197	0,271	0,330	0,371
1	$y^{(6)}(t)$	0,000	0,077	0,251	0,463	0,680	0,884	1,068
	$y^{(6)}/x^{(3)}$	2,000	2,081	2,221	2,350	2,509	2,679	2,879
	$F_2(t)$	-0,045	-0,051	-0,058	-0,068	-0,080	-0,094	-0,112
	$F_3(t)$	-2,723	-2,703	-2,677	-2,645	-2,606	-2,557	-2,497
2	$y^{(6)}(t)$	0,000	0,116	0,376	0,694	1,020	1,327	1,602
	$y^{(6)}/x^{(3)}$	3,000	3,135	3,327	3,523	3,764	4,021	4,318
	$F_2(t)$	-0,067	-0,076	-0,088	-0,102	-0,119	-0,141	-0,169
	$F_3(t)$	-4,084	-4,053	-4,015	-3,967	-3,909	-3,836	-3,745
3	$y^{(6)}(t)$	0,000	0,154	0,502	0,926	1,360	1,769	2,137
	$y^{(6)}/x^{(3)}$	4,000	4,162	4,442	4,700	5,048	5,361	5,760
	$F_2(t)$	-0,089	-0,101	-0,117	-0,136	-0,159	-0,188	-0,225
	$F_3(t)$	-5,445	-5,404	-5,353	-5,290	-5,211	-5,114	-4,993

случае

$$f^{(0)} = \bar{V} \sum_{i=1}^n \Sigma_i x^{(i)},$$

и соответственно для решения оптимизационной задачи не нужно рассматривать систему (4).

**Общий характер решения уравнений (1), (4) и (9).** Рассмотрим простейший пример, имеющий чисто методический смысл. Из его анализа будут ясны наиболее характерные особенности решения систем уравнений (1), (4) и (9). В качестве исходного изотопа  $i = 1$  примем  $^{242}\text{Pu}$ . Индексам  $i = 2$  и  $i = 3$  будут соответствовать  $^{243}\text{Am}$  и  $^{244}\text{Cm}$ . В табл. 1 приведены основные физические постоянные, входящие в скорость реакции.

В целях упрощения считали все  $\xi = 1$ . Для решения систем уравнений (1), (4) и (9) использовали специально составленную программу для ЭВМ. Расчеты проводили при  $U = 10^{14}$  нейтр./ $(\text{см}^2 \cdot \text{с})$ ,  $\omega = 0,3 \cdot 10^{14}$  нейтр./ $(\text{см}^2 \cdot \text{с})$  и  $T = 1,2$  года. В качестве начальных условий для  $x^{(i)}(0)$  было принято  $x^{(1)}(0) = 1$ ;  $x^{(2)}(0) = x^{(3)}(0) = 0$ . Для  $y^{(h)}(0)$  рассматривали следующие варианты начальных условий (при  $V_U = V_\omega = 1$ ):

- 1)  $y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = y^{(6)}(0) = 0$ ;
- 2)  $y^{(4)}(0) = 1$ ;  $y^{(5)}(0) = y^{(6)}(0) = 0$ ;
- 3)  $y^{(4)}(0) = 2$ ;  $y^{(5)}(0) = y^{(6)}(0) = 0$ .

В качестве анализируемого функционала выбирался  $J = y^{(6)}(T)$ . В табл. 2 приведены для соответствующих вариантов зависимости  $x^{(3)}(t)$ ,  $y^{(6)}(t)$  и функции переключения  $F_2(t)$ ,  $F_3(t)$ . Полученные результаты позволяют сформулировать в рамках рассматриваемого примера следующие выводы.

Во-первых, вполне естественно, что с возрастанием  $y^{(4)}(0)$  увеличиваются как  $y^{(6)}(t)$ , так и  $y^{(6)}/x^{(3)}$ . Однако отношение  $[y^{(3)}(t) x^{(3)}(0)]/[y^{(6)}(0) \times x^{(3)}(t)]$  в пределах погрешности расчета является универсальной функцией  $t$ , т. е. не зависит от номера варианта.

Во-вторых, временная зависимость функций переключения  $F_1$  и  $F_2$  указывает на то, что для снижения  $y^{(6)}(T)$  поток тепловых нейтронов в конце облучения должен быть меньше, чем в начале, а поток резонансных нейтронов в начале облучения — меньше, чем в конце. Отметим универсальность функций  $F_2(t)/F_2(0)$  и  $F_3(t)/F_3(0)$ .

Указанный выше универсальный характер функций  $[y^{(6)}(t) x^{(3)}(0)]/[y^{(6)}(0) x^{(3)}(t)]$ ,  $F_2(t)/F_2(0)$  и  $F_3(t)/F_3(0)$  является строгим законом, который обусловлен видом уравнений (1) и (4) и начальными условиями на  $x^{(i)}(0)$  и  $y^{(h)}(0)$ .

В-третьих, при тех же самых вариантах нейтронных потоков абсолютное значение вариации функционала  $\delta J$  тем больше, чем выше стоимость вещества мишени.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кормушкин Ю. П., Клинов А. В., Топоров Ю. Г. «Атомная энергия», 1976, т. 41, вып. 2, с. 102.
2. Галанин А. Д. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. М., Атомиздат, 1959.
3. Круглов А. К., Рудик А. П. Искусственные изотопы: методика расчета их образования в ядерных реакторах. М., Атомиздат, 1977.
4. Рудик А. П. Ядерные реакторы и принцип максимума. Понтрягина. М., Атомиздат, 1971.
5. Понтрягин А. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1965.
6. Габасов Р., Кирилова Ф. М. Особые оптимальные управления. М., «Наука», 1973.

Поступила в Редакцию 26.03.7