

УДК 517.9:530.182

ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ НЕАВТНОМНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ-ДУФФИНГА

Р.И. Коржик, С.П. Жогаль

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

INFLUENCE OF DELAY ON STATIONARY STATES OF THE NON-AUTONOMOUS VAN DER POL-DUFFING OSCILLATOR

R.I. Korzhik, S.P. Zhogal

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Исследовано влияние запаздывания на динамические режимы укороченного уравнения неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга с внешним гармоническим воздействием. Выведено укороченное уравнение и построены карты динамических режимов для различных значений параметра, характеризующего запаздывание.

Ключевые слова: осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга, стационарные состояния, влияние запаздывания, укороченное уравнение, внешнее периодическое воздействие, критерий устойчивости Рауса-Гурвица, бифуркации.

The effect of delay on dynamical regimes of the abridged equation of the non-autonomous van der Pol-Duffing oscillator with an external harmonic influence was investigated. The abridged equation was derived and the maps of dynamical regimes for different values of the parameter characterizing the delay were presented.

Keywords: van der Pol-Duffing oscillator, stationary states, influence of delay, abridged equation, external periodic effect, Routh-Hurwitz stability criterion, bifurcation.

Введение

В работах [1], [2] исследованы динамические режимы функционирования осцилляторов Ван-дер-Поля и Дуффинга с запаздыванием и внешним периодическим воздействием.

Рассмотрим более общий случай неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга с запаздыванием в звене, соответствующему уравнению Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x}_t - (\lambda - \alpha x_{t-\delta}^2) \dot{x}_{t-\delta} + \omega_0^2 x_t + \beta x_t^3 = b \sin \omega t, \quad (0.1)$$

где $x_t = x(t)$, $x_{t-\delta} = x(t - \delta)$, параметр $\beta > 0$ введен по аналогии с параметром в осцилляторе Дуффинга, b, ω – амплитуда и частота внешнего гармонического воздействия, $\delta \geq 0$ – запаздывание в звене Ван-дер-Поля.

1 Вывод укороченного уравнения

Как и в работах [1]–[3], решение этого уравнения будем искать в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой $A_t = A(t)$:

$$x_t = \operatorname{Re}(A_t e^{i\omega t}) = \frac{1}{2} A_t e^{i\omega t} + \frac{1}{2} A_t^* e^{-i\omega t}, \quad (1.1)$$

накладывая на искомое решение дополнительное условие

$$\dot{A}_t e^{i\omega t} + \dot{A}_t^* e^{-i\omega t} = 0.$$

После подстановки (1.1) в (0.1) и усреднения за период $\frac{2\pi}{\omega}$ получаем укороченное уравнение:

$$\begin{aligned} \dot{A}_t + i \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} A_t - \frac{\lambda A_t}{2} e^{-i\delta\omega} + \\ + \left(\frac{\alpha e^{i\delta\omega}}{8} - \frac{3i\beta}{8\omega} \right) |A_t|^2 A_t + \frac{b}{2\omega} = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) можно свести к уравнению с меньшим числом параметров:

$$\dot{z}_\tau + i\Delta z_\tau - z_\tau e^{-i\theta} - (\mu i - \nu e^{-i\theta}) |z_\tau|^2 z_\tau + \varepsilon = 0, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} \tau = \frac{\lambda t}{2}, \quad z_\tau = \frac{A_t}{\sqrt{\lambda\omega}}, \quad \Delta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\lambda\omega}, \quad \varepsilon = \frac{b}{\omega\lambda\sqrt{\lambda\omega}}, \\ \theta = \delta\omega, \quad \mu = \frac{3\beta}{4}, \quad \nu = \frac{\alpha\omega}{4}. \end{aligned}$$

Функцию z_τ можно записать в виде $R_\tau e^{i\varphi_\tau}$, где R_τ и φ_τ некоторые функции действительного переменного τ , принимающие действительные значения.

Тогда, выделяя в (1.3) действительную и мнимую части, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{R} = \cos\theta(R - \nu R^3) - \varepsilon \cos\varphi, \\ \dot{\varphi} = \sin\theta(\nu R^2 - 1) - \Delta + \mu R^2 + \frac{\varepsilon}{R} \sin\varphi. \end{cases} \quad (1.4)$$

2 Построение и анализ бифуркационных диаграмм

При помощи критерия Рауса-Гурвица можно получить условие устойчивости стационарного состояния (R_0, φ_0) :

$$\begin{aligned}
 &0 < 3(2\mu\nu \sin \theta + \nu^2 + \mu^2)\xi_0^2 - \\
 &-4((\Delta\nu + \mu)\sin \theta + \nu + \Delta\mu)\xi_0 + \\
 &\quad + 2\Delta \sin \theta + \Delta^2 + 1, \\
 &0 > (-4\nu\xi_0 + 2)\cos \theta,
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

где $\xi_0 = R_0^2$.

Само значение ξ_0 будет задаваться уравнением

$$\begin{aligned}
 &(\nu^2 + \mu^2 + 2\mu\nu \sin \theta)\xi_0^3 - \\
 &-2((\Delta\nu + \mu)\sin \theta + \nu + \Delta\mu)\xi_0^2 + \\
 &\quad + (2\Delta \sin \theta + \Delta^2 + 1)\xi_0 = \varepsilon^2.
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

На основе неравенств (2.1) и уравнения (2.2) построим линии бифуркации. На рисунке 1 приведены полученные линии в различных плоскостях параметров. Из рисунка видно, что получилось шесть различных областей.

Для описания поведения системы при различных значениях параметров возьмем в пространстве параметром некоторую точку и будем ее постепенно перемещать между областями. При пересечении жирной линии будет меняться

количество стационарных состояний. А при пересечении тонкой линии одно из стационарных состояний будет менять свою устойчивость на противоположную (устойчивое будет становиться неустойчивым, а неустойчивое – устойчивым).

На рисунке 2 приведены фазовые портреты для каждой из областей. Первой области соответствует режим функционирования системы с одним устойчивым состоянием. Если из первой области переместиться в пятую, то произойдет пересечение жирной линии, и мы попадем в область, в которой должно быть три стационарных состояния. Это подтверждается фазовым портретом. На нем видны два устойчивых состояния равновесия и одно седло. При перемещении из пятой области в четвертую происходит пересечение тонкой линии. Пересечение этой линии означает, что одно из стационарных состояний должно изменить свою устойчивость. На фазовом портрете можно в этом убедиться. На нем видно уже только одно устойчивое состояние и два неустойчивых, одно из которых – седло. Стационарных состояний по-прежнему остается три.

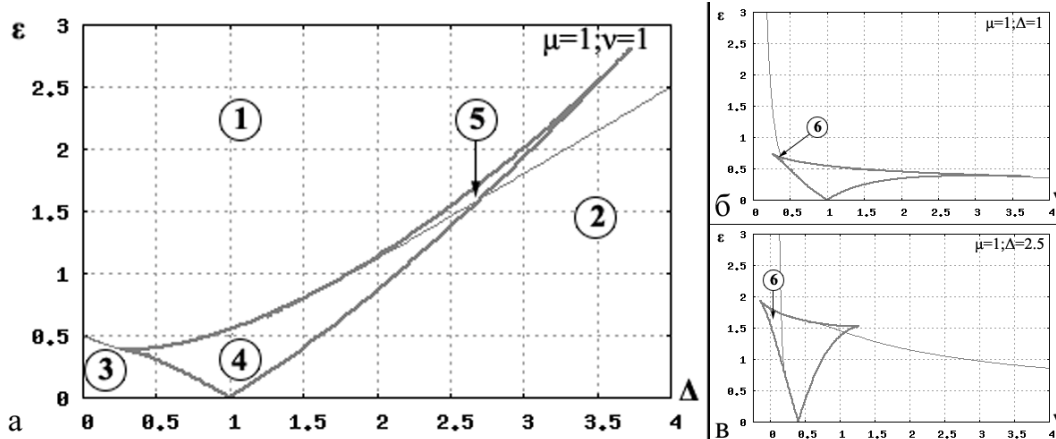


Рисунок 1 – Линии бифуркации при отсутствии запаздывания в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon(a); \nu - \varepsilon(b, в)$

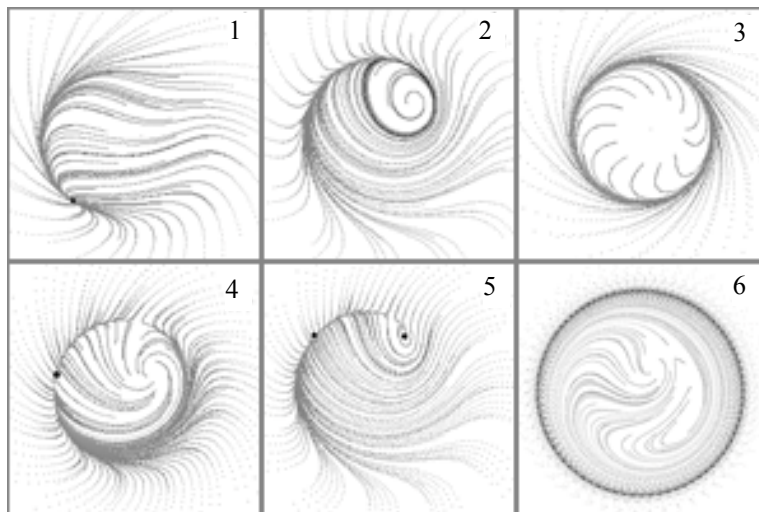


Рисунок 2 – Фазовые портреты для различных областей при отсутствии запаздывания

Если переместиться из четвертой области в шестую, то должна опять произойти смена устойчивости. Это видно по соответствующему фазовому портрету. На нем осталось одно седло и еще два неустойчивых состояния. Также на фазовом портрете виден устойчивый предельный цикл, внутри которого находятся все три стационарных состояния. При перемещении из шестой области в третью происходит пересечение жирной линии, следовательно, должно измениться количество стационарных состояний. В третьей области уже только одно неустойчивое

состояние равновесия, окруженное устойчивым предельным циклом.

Если начать изменять параметр $\theta = \delta\omega$ в пределах полуинтервала $[0, \pi/2)$, то это будет приводить к изменению линий бифуркации. Но различных областей по-прежнему будет шесть (если области 2 и 3 считать различными). На рисунках 3, 4 и 5 показаны бифуркационные диаграммы для различных значений параметра θ . Количество стационарных состояний и их устойчивость для каждой из областей будут такими же, как и при отсутствии запаздывания.

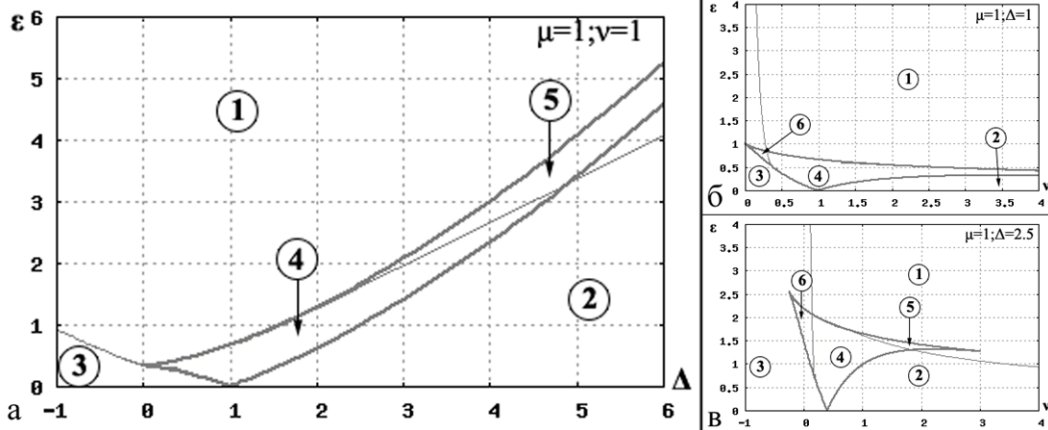


Рисунок 3 – Линии бифуркации при $\theta = \pi/6$ в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon(a); v - \varepsilon(b, \theta)$

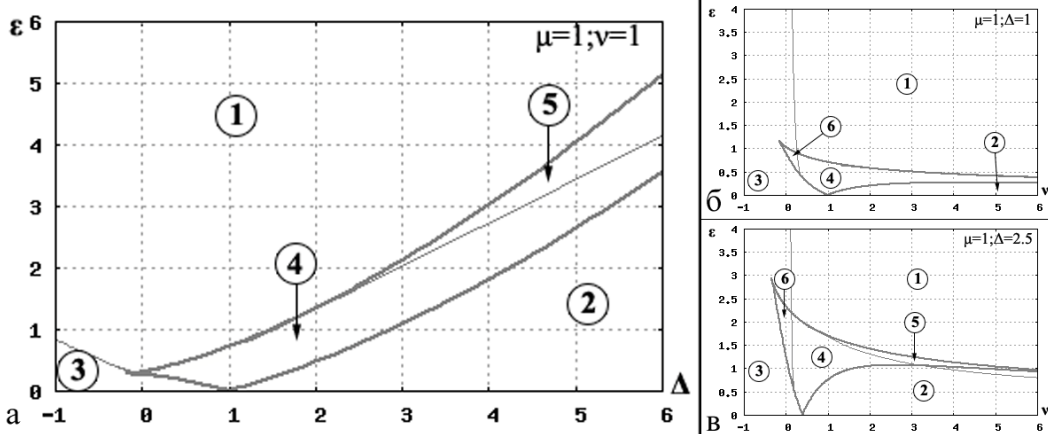


Рисунок 4 – Линии бифуркации при $\theta = \pi/4$ в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon(a); v - \varepsilon(b, \theta)$

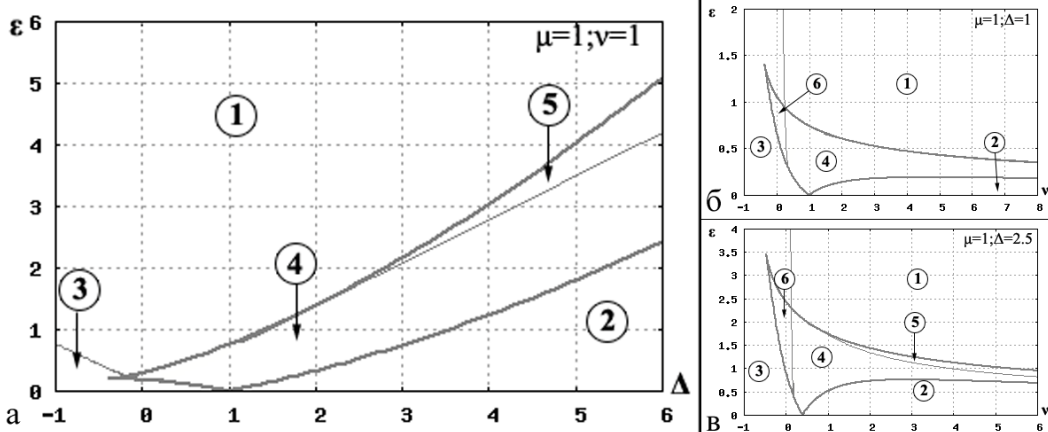


Рисунок 5 – Линии бифуркации при $\theta = \pi/3$ в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon(a); v - \varepsilon(b, \theta)$

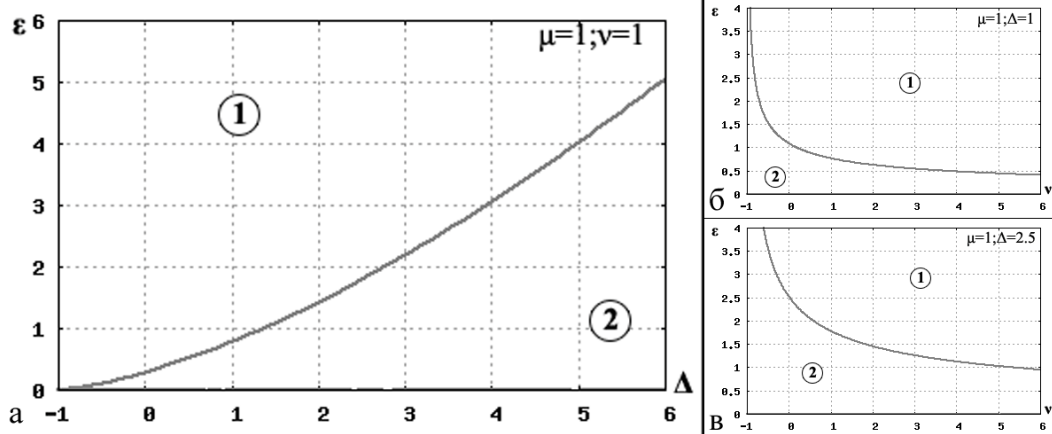


Рисунок 6 – Линии бифуркации при $\theta = \pi/2$ в плоскости параметров $\Delta - \varepsilon(a); v - \varepsilon(b, \varepsilon)$

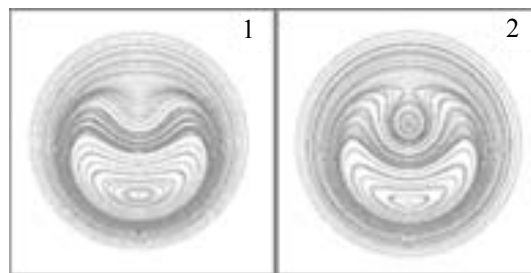


Рисунок 7 – Фазовые портреты для различных областей при $\theta = \pi/2$

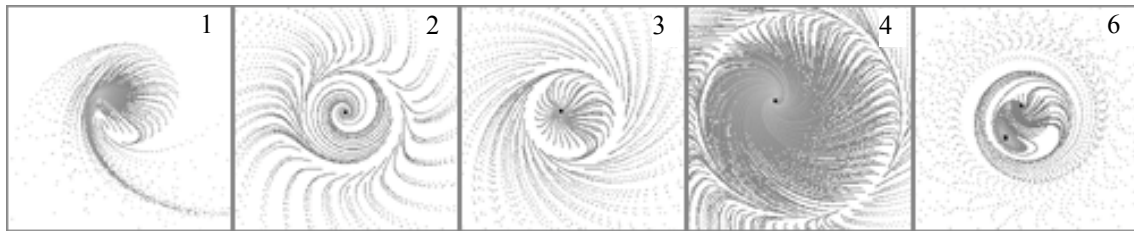


Рисунок 8 – Фазовые портреты для различных областей при $\theta = 3$

При $\theta = \pi/2$ правая часть второго неравенства (2.1) всегда обращается в ноль. Поэтому среди стационарных состояний должен появиться центр. Бифуркационная диаграмма для такого значения параметра показана на рисунке 6, а фазовые портреты для каждой из областей приведены на рисунке 7.

Как видно из рисунка 7, в первой области имеется одно стационарное состояние типа центр. Во второй области три стационарных состояния – седло и два центра.

Для $\theta \in (\pi/2; \pi]$ бифуркационные диаграммы будут совпадать с диаграммами для $\theta = \pi/2$. Но в самих областях поведение системы будет отличаться.

В первой области будет одно стационарное состояние, но, в отличие от предыдущего случая, оно будет неустойчивым. Если из первой области переместиться в пятую, то произойдет пересечение жирной линии, и, следовательно, появится еще два стационарных состояния. Таким образом в пятой области будет три неустойчивых стационарных состояния, одно из которых – седло. При

перемещении в четвертую область пересекается тонкая линия и одно из состояний меняет свою устойчивость. Поэтому в четвертой области имеется одно устойчивое состояние и два неустойчивых, одно из них – седло.

В шестой области два устойчивых состояния и одно седло. Во второй и третьей областях по одному устойчивому состоянию, которые находятся внутри неустойчивого предельного цикла. Фазовые портреты для областей приведены на рисунке 8.

Заключение

В статье приведены и описаны только бифуркационные диаграммы для $\theta \in [0; \pi]$. При $\theta \in (\pi; 2\pi)$ диаграммы выглядят несколько по-другому, но количество областей остается прежним.

Также следует отметить, что параметр θ – не просто запаздывание δ в уравнении (0.1), а произведение запаздывания на частоту внешнего воздействия. Поэтому даже при небольшом запаздывании в исходном уравнении (0.1) при

различных частотах внешнего воздействия ω режимы функционирования системы могут быть различными.

Из полученных бифуркационных диаграмм также видно, что изменение запаздывания при неизменных остальных параметрах может приводить к изменению устойчивости стационарных состояний, а также к изменению их количества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коржик, Р.И. Влияние запаздывания на стационарные состояния неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля / Р.И. Коржик, С.П. Жогаль // Известия Гомельского государственного

университета имени Франциска Скорины. – 2010. – № 3 (60). – С. 206–210.

2. Коржик, Р.И. Влияние запаздывания в неавтономном осцилляторе Дуффинга на стационарные состояния укороченного уравнения / Р.И. Коржик, С.П. Жогаль // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя П.М. Машэрава. – 2010. – № 5 (59). – С. 8–11.

3. Кузнецов, А.П. Нелинейные колебания / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. – М. : Физматлит, 2002. – 292 с.

Поступила в редакцию 23.05.11.