Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №1(58), 2010

УДК УДК 517.93

Классы уравнений Пфаффа с одной и той же отражающей функцией

С. П. Жогаль

В работе [1] было введено понятие отражающей функции для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью отражающей функции удается выявить временные симметрии решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Знание отражающей функции системы обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет находить начальные данные периодических решений этих систем и определять характер их устойчивости.

В работе [2] понятие отражающей функции обобщено на вполне интегрируемые уравнения Пфаффа

$$dz = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy, \tag{1}$$

где $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ — непрерывные, имеющие непрерывные произведения по своим аргументам функции из $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющие условию полной интегрируемости [3].

Так как уравнение Пфаффа (1) вполне интегрируемо, то существует семейство поверхностей $u(x,y,z) = C$, являющееся его общим решением. Решение $z(x,y)$ уравнения (1), проходящее через данную точку(x_0, y_0, z_0) будем записывать в виде $z(x,y) = \varphi(x,y;x_0,y_0,z_0)$. Через $D_z \subset \mathbb{R}^2$ обозначим область существования решения $\varphi(x,y;0,0,z)$, где z есть произвольное фиксированное число, для которого точка $(0,0,z)$ принадлежит области определения функций P и Q. Пусть, кроме того,

$$\overline{D_z} = \{(x,y) : (-x,-y) \in D_z\},$$

$$D = \{(x,y,z) : z \in \mathbb{R}, (x,y) \in D_z \cap \overline{D_z}.$$

Определение 1. *Отражающей функцией уравнения Пфаффа (1) назовем дифференцируемую функцию $F(x,y,z)$, $F : D \to \mathbb{R}$, определяемую соотношением:*

$$F(x,y,z) = \varphi(-x,-y;x,y,z). \tag{2}$$

В [2] сформулированы и доказаны теоремы о свойствах отражающей функции и о полноте интегрируемости уравнения Пфаффа, отражающей функцией которого является $F(x,y,z)$.

Определим класс вполне интегрируемых уравнений Пфаффа, для которых $F(x,y,z)$ будет являться отражающей функцией.

В [2] установлено, что каждое вполне интегрируемое уравнение Пфаффа имеет отражающую функцию, обладающую следующими свойствами:

1) для любого решения $z(x,y)$ уравнения (1) верно тождество:

$$F(x,y,z(x,y)) \equiv z(-x,-y), \tag{3}$$

2) для отражающей функции $F(x,y,z)$ любого уравнения Пфаффа (1) выполняются тождества:

$$F(-x,-y,F(x,y,z)) \equiv F(0,0,z) \equiv z, \tag{4}$$

3) дифференцируемая функция своих аргументов $F(x,y,z)$ будет отражающей функцией уравнения Пфаффа (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)dx+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)dy+\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\Big(P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy\Big)+ \\ +P(-x,-y,F(x,y,z))dx+Q(-x,-y,F(x,y,z))dy=0 \qquad (5)$$

и условию

$$F(0,0,z)\equiv z. \qquad (6)$$

Кроме того, в [2] доказано, что для всякой дифференцируемой функции $F(x,y,z)$, удовлетворяющей соотношению

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}\right]^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{1}{2}\Big(\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]^{-1}\Big)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\frac{\partial F}{\partial y}=\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}\right]^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{1}{2}\Big(\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]^{-1}\Big)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad (7)$$

существует вполне интегрируемое уравнение Пфаффа вида (1), для которого $F(x,y,z)$ является отражающей функцией.

В данной работе показано, что множество всех вполне интегрируемых уравнений Пфаффа вида (1) можно разбить на классы эквивалентности, причем каждый класс эквивалентности характеризуется отражающей функцией, общей для всех уравнений класса. Установлено условие, обеспечивающее эквивалентность двух вполне интегрируемых уравнений Пфаффа.

Обозначим через G некоторую область в $\mathbb{R}^3$, содержащую все точки вида $(0,0,z)$.

Теорема 1. *Пусть $\Phi : G\to\mathbb{R}$ есть отражающая функция некоторого уравнения Пфаффа, правая часть которого имеет непрерывные производные по x,y,z. Пусть также для некоторой дважды непрерывно дифференцируемой по своим аргументам функции $F : D\to\mathbb{R}$ выполняются тождества (4). Тогда, для того чтобы в области $D\cap G$ функции $\Phi(x,y,z)$ и $F(x,y,z)$ совпадали, необходимо и достаточно, чтобы уравнение Пфаффа с отражающей функцией $\Phi(x,y,z)$ имело вид:*

$$dz=-\frac{1}{2}F_z^{-1}(x,y,z)\left(F_x(x,y,z)dx+F_y(x,y,z)dy\right)+ \\ +F_z^{-1}(x,y,z)\left(R_1(x,y,z)dx+R_2(x,y,z)dy\right)-R_1(-x,-y,F(x,y,z))dx- \\ R_2(-x,-y,F(x,y,z))dy, \qquad (8)$$

где $R_1(x,y,z)$, $R_2(x,y,z) : D\cap G\to\mathbb{R}$ — некоторые непрерывно дифференцируемые по своим аргументам функции, подчиняющиеся условию полной интегрируемости данного уравнения.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $\Phi(x,y,z)$ — отражающая функция уравнения Пфаффа (1), кроме того в области $D\cap G$ функции $\Phi(x,y,z)$ и $F(x,y,z)$ совпадают.

Положим

$$R_1(x,y,z)=-\frac{1}{2}P(-x,-y,F(x,y,z))$$

$$R_2(x,y,z)=-\frac{1}{2}Q(-x,-y,F(x,y,z)).$$

Учитывая, что функция $F(x,y,z) \equiv \Phi(x,y,z)$ является отражающей функцией уравнения Пфаффа (1), и воспользовавшись леммой 1 [2], убеждаемся в том, что правые части уравнений (8) и (1) совпадают, что и доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть правая часть уравнения (8) при некоторых функциях $R_1(x,y,z)$ и $R_2(x,y,z)$ непрерывно дифференцируема. Тогда для того, чтобы $F(x,y,z) \equiv \equiv \Phi(x,y,z)$ была отражающей функцией уравнения (8), она должна удовлетворять основному соотношению (5). В этом несложно убедиться, подставляя соотношения для $P(x,y,z)$ и $Q(x,y,z)$, определяемые уравнением (8), в основное соотношение (5).Теорема доказана.

Из теоремы 2 [2] и доказанной теоремы 1 следует, что для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $F(x,y,z)$, удовлетворяющей соотношениям (4), (5) можно построить множество уравнений Пфаффа вида (8), задавая каждый раз новые непрерывно дифференцируемые функции $R_1(x,y,z)$ и $R_2(x,y,z)$, причем для этих уравнений функция $F(x,y,z)$ будет являться отражающей функцией.

Определение 2. *Множество уравнений Пфаффа (1) назовем классом эквивалентности CLPF(F), если существует дифференцируемая функция $F : D \to \mathbb{R}$, для которой*

1) отражающая функция любого уравнения из рассматриваемого множества $\Phi : G \to \mathbb{R}$ совпадает в области $D \cap G$ с функцией $F(x,y,z)$;

2) любое уравнение вида (1), отражающая функция $\Phi : G \to \mathbb{R}$ которого совпавдает в $D \cap G$ с функцией $F(x,y,z)$, содержится в рассматриваемом множестве.

Уравнения вида (1), принадлежащие одному классу CLPF(F), будем называть эквивалентными. Функцию $F(x,y,z)$ будем называть отражающей функцией класса CLPF(F).

Согласно доказанной теореме 1, любое уравнение из CLPF(F) может быть записано в виде (8).

Рассмотрим два уравнения Пфаффа:

$$dz = P_1(x,y,z)dx + Q_1(x,y,z)dy, \tag{9}$$

$$dz = P_2(x,y,z)dx + Q_2(x,y,z)dy. \tag{10}$$

Непосредственно из свойства 3) отражающей функции вытекает следующая лемма.

Лемма. *Уравнения (9) и (10) принадлежат одному и тому же классу эквивалентности CLPF(F) тогда и только тогда, когда система уравнений*

$$\begin{aligned} F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz\,[P_1(x,y,z)dx + Q_1(x,y,z)dy] + \\ + P_1(-x,-y,F(x,y,z))dx + Q_1(-x,-y,F(x,y,z))dy = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz\,[P_2(x,y,z)dx + Q_2(x,y,z)dy] + \\ + P_2(-x,-y,F(x,y,z))dx + Q_2(-x,-y,F(x,y,z))dy = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

$$F(0,0,z) = z \tag{13}$$

совместна.

Пример. Выясним, принадлежат ли уравнения

$$dz = 2xycos(x^2y)dx + x^2cos(x^2y)dy,$$
$$dz = \left[cos(x^2y) + \left(1 - exp\{-2sin(x^2y)\}\right) expz\right] 2xydx+$$
$$+x^2 \left[cos(x^2y) + \left(1 - exp\{-2sin(x^2y)\}\right) expz\right] dy \tag{14}$$

одному классу эквивалентности. Выписывая основное соотношение (5) для первого из уравнений (14), несложно установить, что его отражающей функцией является $F(x, y, z) = z - 2sin(x^2y)$. Затем, подставив эту функцию в основное соотношение для второго уравнения, убеждаемся, что она является отражающей и для него. Следовательно, рассматриваемые уравнения Пфаффа действительно принадлежат одному и тому же классу эквивалентности.

Теорема 2. *Все уравнения Пфаффа одного класса эквивалентности, содержащего уравнение (1) с решениями, существующими во всей плоскости $\mathbb{R}^2$, можно записать в виде:*

$$dz = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + F_z^{-1}(x, y, z)(R_1(x, y, z)dx+$$
$$+R_2(x, y, z)dy) - R_1(-x, -y, F(x, y, z))dx - R_2(-x, -y, F(x, y, z))dy, \tag{15}$$

где $F(x, y, z)$ — отражающая функция уравнения (1), $R_1(x, y, z)$ и $R_2(x, y, z)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условию полной интегрируемости уравнения (15) и такие, что правая часть этого уравнения имеет непрерывные производные по x, y и z.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично случаю обыкновенных дифференциальных уравнений [1, с.24].

Abstract. Classes of Pfaff equations with the same reflecting function are considered in the paper. It is shown that the set of all fully integrable Pfaff equations can be divided into equivalence classes characterized by the same reflecting function common for all the levels of the class. The condition ensuring the equivalence of two fully integrable Pfaff equations is given.

Литература

1. Мироненко, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. — Мн.: Изд-во "Университетское", 1986. — 76 с.

2. Жогаль, С.П. Об обобщении понятия отражающей функции на уравнения Пфаффа / С.П. Жогаль // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. — 2009. — №5(56). — С. 70–73.

3. Гайшун, И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. — Мн.: Наука и техника, 1983. — 272 с.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 11.09.09