

ИНФОРМАТИКА

УДК 539.3

Применение численных методов для анализа
напряженно-деформированного состояния
неоднородной полосы и основания

Е. М. БЕРЕЗОВСКАЯ

Введение. В настоящее время в инженерной практике получают большое распространение конструкции, элементы которых имеют покрытия с изменяющейся структурой физико-механических свойств. Такие конструкции изготавливаются из неоднородных анизотропных [1] или слоистых композиционных материалов [2] на металлической или полимерной основе. Несмотря на успех в области современных расчетных методов, расчет параметров слоистых неоднородных тел разработан все еще недостаточно полно из-за отсутствия адекватных математических моделей, с достаточной точностью описывающих исследуемые тела. Методика решения граничной задачи для неоднородной ортотропной полосы, свободно лежащей или жестко скрепленной с однородным изотропным или ортотропным основанием, содержится в работе [3]. Там же получены аналитические зависимости по определению характеристик напряженно-деформированного состояния полосы и основания.

Постановка задачи. В настоящей работе проводится анализ решения следующей граничной задачи: задана бесконечная, ортотропная неоднородная полоса шириной h с упругими характеристиками $a_{ij} = H_{ij} e^{kx+ly}$, лежащая на жестком или упругом основании (рисунок 1). Здесь H_{ij} – упругие характеристики соответствующего однородного материала, k и l – параметры неоднородности. Оси ортотропии совпадают с осями декартовой системы координат, ориентированной для однородного материала, в которой одна ось параллельна краю полосы, а другая – перпендикулярна ей. На верхней границе определена нормальная $p(x)$ нагрузка. Прилагаемые усилия могут быть сосредоточенными или распределенными на отрезке $[-a, a]$.

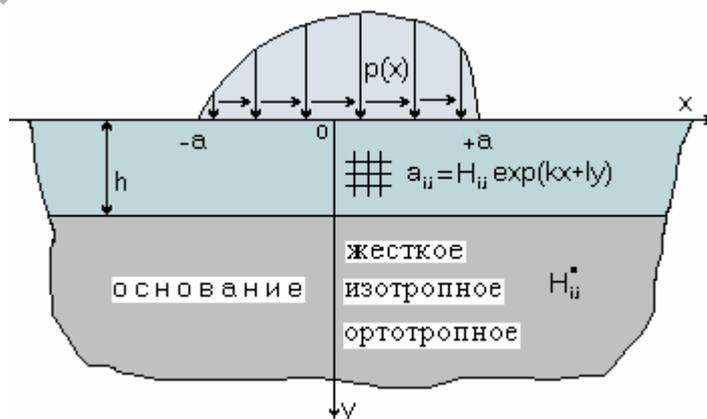


Рисунок 1 – Схема действия нагрузки на слоистую систему.

Граничные условия для полосы свободно лежащей на основании при действии нормальной нагрузки имеют вид:

$$\sigma_{y(1)}|_{y=0} = \begin{cases} p(x), & -a \leq x \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad \tau_{xy(1)}|_{y=0} = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{y(1)}|_{y=h} = \sigma_{y(2)}|_{y=h}, \quad \nu_{(1)}|_{y=h} = \nu_{(2)}|_{y=h} \quad (2)$$

$$\tau_{xy(1)}|_{y=h} = 0, \quad \tau_{xy(2)}|_{y=h} = 0. \quad (3)$$

Граничные условия для полосы, жестко скрепленной с основанием, совпадают с равенствами (1), (2), а равенство (3) необходимо записать в виде

$$u_{(1)}|_{y=h} = u_{(2)}|_{y=h}, \quad \tau_{xy(1)}|_{y=h} = \tau_{xy(2)}|_{y=h}. \quad (4)$$

Индекс “1” при переменной обозначает неоднородную ортотропную полосу, а индекс “2” – упругое основание. Математическая модель рассматриваемой задачи приведена в работе [3].

Анализ состояния полосы, лежащей на жестком основании. На приведенных ниже графиках p_0 означает для равномерного распределения давления $-P/2a$, для треугольного – $\frac{P}{a}(a-|x|)$ при $|x| < a$, для параболического – $\frac{3P}{4a}(1-\frac{x^2}{a^2})$.

Исследуем влияние анизотропии на распределение напряжений и перемещений в неоднородной ортотропной полосе в случае плоского напряженного состояния. Рассмотрим изменение напряжений на границе раздела: ортотропная полоса – жесткое основание. На рисунке 2 и рисунке 3 показаны распределения напряжений σ_y для неоднородного ортотропного материала, который в однородном случае представляет полосу из углепластика с техническими постоянными $E_1 = 11.95 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 0.95 \cdot 10^4$ МПа, $G_{12} = 0.46 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{12} = 0.3$ при соотношении между областью действия давления и шириной полосы соответственно $a/h=2$ и $a/h=0.5$. В рассматриваемом случае модуль Юнга E_1 по первой оси ортотропии больше модуля Юнга E_2 второй оси. Ниже приведены графики напряжений для различных законов распределения давления: на рисунках 2 и 3 линии 1,2,3 отвечают равномерному закону; линии 4,5,6 характеризуют параболическое распределение, а линии 7,8,9 соответствуют треугольному распределению усилий. Линии 1,4,7 со значениями параметров неоднородности $k=0$ и $l=0$ обозначают случай однородного ортотропного материала. Линии 2,5,8 и 3,6,9 получены для $k=0, l=0.5$ и $k=0, l=-0.5$ соответственно.

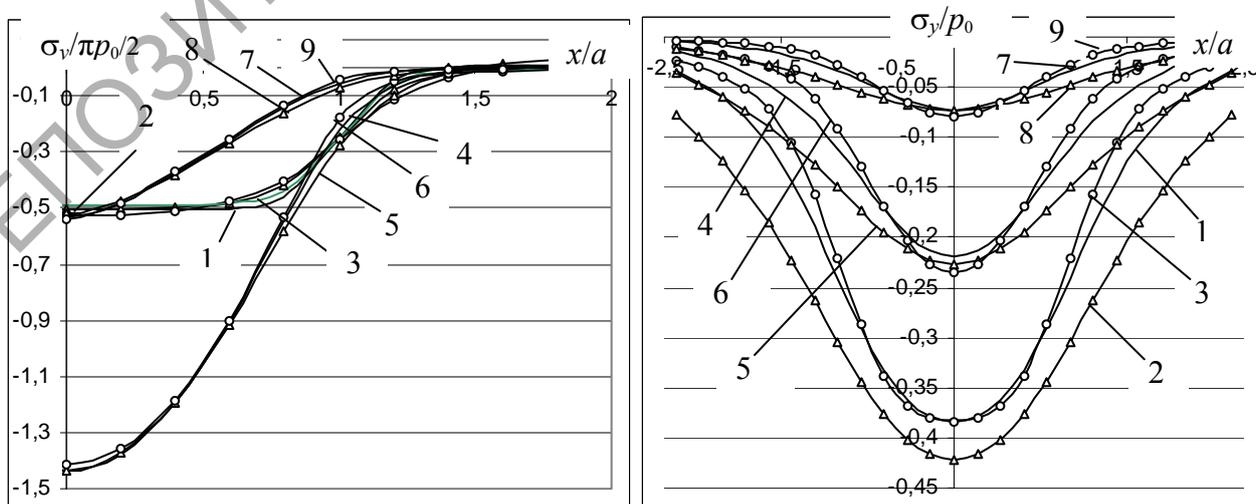


Рисунок 2 – Распределение напряжений σ_y на границе раздела неоднородная ($E_1 > E_2$) ортотропная полоса-основание: слева - $a/h=2$, справа - $a/h=0.5$.

Приведем некоторые числовые значения, характеризующие распределение нормальных напряжений. В качестве базовой точки отсчета для всех срезов по y возьмем точку $x=0$. Результаты сравниваются со значениями, полученными при нулевых значениях k и l . Рассматриваемые параметры неоднородности, как следует из результатов исследований, изображенных на рисунке 2 слева, вызывают изменение напряжений около 4%. Но уже при другом соотношении факторов, влияющих на напряженно-деформируемое состояние (НДС) (рисунок 2 справа), имеем изменение напряжений от -3% до +10% для треугольного, от -4% до +19% для равномерного и в пределах 7% для параболического законов распределения усилий.

Анализ НДС полосы, лежащей на упругом основании. Этот пункт посвящен анализу численных результатов НДС неоднородной ортотропной полосы и основания, которое может быть однородным изотропным или однородным ортотропным. В качестве базового материала рассматривается древесина (сосна), углепластик и высокомодульные углеродные волокна [1]. Приведен графический материал, иллюстрирующий численные расчеты для случая плоского напряженного состояния.

Сначала рассмотрим НДС полосы из композиционного материала, свободно лежащей на однородном изотропном основании с модулем упругости $E = 1.95 \cdot 10^4$ МПа при действии равномерно распределенной на промежутке $[-1, 1]$ нагрузки $p(x)$. Полоса считалась изготовленной из такого композиционного материала, который в однородном случае является ортотропным углепластиком. На рисунках 4 и 5 приведены графики распределения напряжений σ_y в полосе для $y/h = 0,5$ и основании для $y/h = 2,5$ при $a/h = 2$. Параметры неоднородности полосы принимают следующие значения: $k = 0, l = 0$ (кривые 1, 4); $k = 0,4, l = 0,5$ (кривые 2, 5); $k = -0,4, l = -0,5$ (кривые 3, 6).

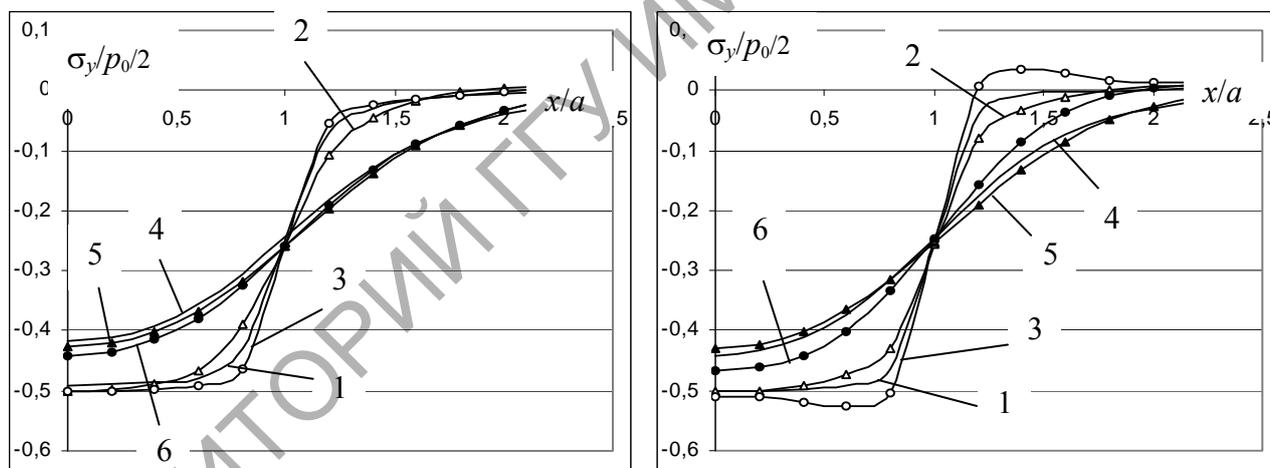


Рисунок 3 – Распределение напряжений σ_y в неоднородной ортотропной полосе и однородном изотропном основании при $a/h=2$: слева - $E_1 > E_2$, справа - $E_2 > E_1$.

На рисунках заметно влияние на напряжение изменение направления осей ортотропии материала полосы.

Рассмотрим влияние на НДС полосы и основания различных неоднородных материалов. Пусть полоса состоит из материала, который в однородном случае является высокомодульными углеродными волокнами с техническими характеристиками $E_1 = 19.4 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 0.772 \cdot 10^4$ МПа, $G_{12} = 0.421 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{12} = 0.3$, а основание представляет ортотропный материал – древесина (сосна), для которой $E_1 = 1.0 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 0.6 \cdot 10^4$ МПа, $G_{12} = 0.07 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{12} = 0.01$. На рисунке 4 при $a/h=0,5$ изображены линии распределения

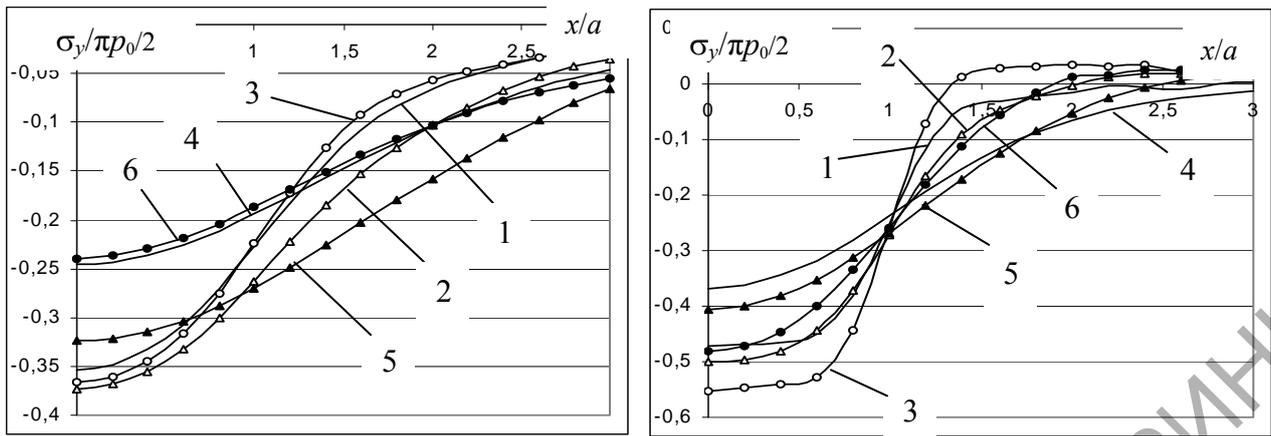


Рисунок 4 – Распределение напряжений σ_y в полосе (слева – $E_1 > E_2$, справа – $E_1 < E_2$) и основании ($E_1 < E_2$), состоящих их различных ортотропных материалов при $a/h=0.5$.

напряжений σ_y со значениями $y/h=0,5$ для полосы и $y/h=2$ для основания ($h=2$). Модули упругости для основания находятся в отношении $E_1 < E_2$, а для полосы – $E_1 > E_2$ и $E_1 < E_2$ соответственно для левого и правого рисунков. Кривые 1 и 4 получены при $k=0$ и $l=0$, линии 2 и 5, 3 и 6 соответствуют параметрам неоднородности $k=0.1$ и $l=0.3$, и $k=-0.1$ и $l=-0.3$.

На рисунке 5 изображены напряжения для высокомодульной углеродной неоднородной полосы при $a/h=1$ и $y/h=0.5$ для полосы и $y/h=2$ для изотропного основания с параметрами неоднородности материала $k=0, l=0$ – линии 1,4; $k=0.2, l=0.5$ – линии 2,5 и $k=-0.2, l=-0.5$ – линии 3 и 6. Модуль упругости для полосы $E_1 < E_2$, а основания – для рисунка 5 слева – $E > E_1$ и справа – $E < E_1$.

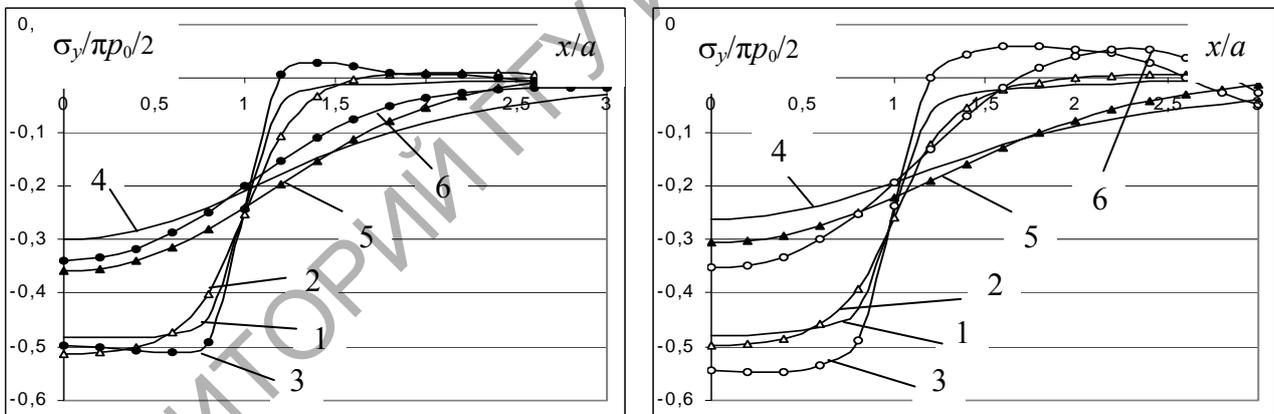


Рисунок 5 – Распределение напряжений σ_y в полосе ($E_1 < E_2$) жестко скрепленной с изотропным основанием при $a/h=1$: слева - $E_1 < E$, справа - $E > E_1$.

На приведенных выше рисунках прослеживается существенная зависимость напряжений от зоны приложения усилий и ширины полосы. Из приведенного графического материала следует, что в полосе происходят меньшие изменения напряжения, чем в основании. Так, максимальное изменение σ_y в полосе составляет 12%, в то время как в основании оно достигает 34% (рисунок 5 справа). Наибольшее колебание напряжений от 33% до -6% просматривается на рисунке 4 слева. Эти результаты были получены при $x=0$.

Программная реализация численного решения задачи о нахождении НДС неоднородной ортотропной полосы, находящейся под действием нормальных сил и расположенной на однородном изотропном или ортотропном основании, реализованы на языке C++. При вы-

числении несобственные интегралы представлялись суммой двух слагаемых: главной частью и остаточным членом. Вычисление определенных интегралов главной части осуществлялось с помощью формул Ньютона–Котеса, причем верхний предел выбирался исходя из остаточного члена. Остаточный член оценивался известными методами теории погрешностей. Графические построения реализовывались с помощью средств Microsoft Office 2003.

Выводы. Численный анализ и их графическая реализация наглядно свидетельствуют о том, что неоднородность достаточно сильно влияет на напряженно-деформированное состояние тел. Таким образом, установлена существенная зависимость НДС исследуемых тел от неоднородности и вида материалов, направлениями осей ортотропии, толщины полосы и вида основания и приложенных нагрузок. Полученное математическое описание задачи и численные результаты согласуются с результатами для случая однородной ортотропной полосы [2].

Приведенные выше цифры процентов хотя и характеризуют происходящие процессы в полосе и основании, однако для каждого конкретного сочетания материалов необходимы по приведенной методике свои собственные исследования.

Abstract. We determined particularities of influence of anisotropies of materials on stress-strain state loading system under the influence of various surface-loading modes.

Литература

1. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий; Москва, Гостехиздат, 1977.
2. Можаровский, В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В. В. Можаровский, В. Е. Старжинский; Минск, Наука и техника, 1988.
3. Березовская, Е. М. Методика расчета напряженно-деформированного состояния неоднородной полосы, находящейся под действием внешних сил / Е. М. Березовская // Известия ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель. 2007. - № 6(45).

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 16.03.09