Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 16P140, 16G10

Об идеале, связанном с первичным колчаном ассоциативного кольца

В.В.Кириченко, Ю.М.Рябухин

Пусть A кольцо с конечно разложимой диагональю и T-нильпотентным первичным радикалом $Pr(A)$. Доказывается существование двустороннего идеала $Y \subset Pr(A)$ такого, что колчан $Q(A,Y)$, ассоциированный с идеалом Y, совпадает с конденсацией первичного колчана кольца A.

§1. Предварительные сведения

Пусть Q — конечный ориентированный граф (колчан в терминологии Габриеля). Множество всех вершин колчана Q обозначается $VQ = \{1, ..., n\}$, а множество всех стрелок через AQ. Колчан Q будем записывать в виде $Q = \{VQ, AQ\}$. Колчан $Q = \{VQ_1, AQ_1\}$ называется подколчаном колчана Q, если $VQ_1 \subseteq VQ$ и $AQ_1 \subseteq AQ$. В этом случае будем писать $Q_1 \subseteq Q$. Если Q_1 и Q_2 — подколчаны колчана Q, мы будем говорить, что подколчан Q_1 содержит подколчан Q_2, если $VQ_2 \subseteq VQ_1$ и $AQ_2 \subseteq AQ_1$ и писать $Q_2 \subseteq Q_1$.

Путь колчана Q — это набор стрелок $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ такой, что конец каждой предшествующей стрелки совпадает с началом последующей стрелки. (Этот путь будем обозначать $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$). Пусть i — начало стрелки σ_1, а j — конец стрелки σ_k. В этом случае $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$ называется путем из вершины i в вершину j или, что то же, путь $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$ соединяет вершины i и j.

Определение 1.1. Колчан Q называется сильно связным, если либо он состоит из одной вершины без стрелок, либо существует путь, соединяющий любые его вершины i и j (возможно, что $i = j$).

Определение 1.2 [1, §7.7]. Сильно связной компонентой колчана Q называется максимальный по включению сильно связный подколчан колчана Q.

Определение 1.3 [1, §7.7]. Разбиение множества вершин VQ колчана Q на попарно непересекающиеся подмножества такие, что подколчаны, соответствующие этим подмножествам, являются сильно связными компонентами колчана Q, называется *разбиением колчана* Q в сильно связные компоненты $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ и обозначается $P(Q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$.

Теорема 1.4 [1, Theorem 7.7.5]. Каждый колчан Q имеет разбиение

$$P(Q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$$

в сильно связные компоненты $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$. Это разбиение единственно с точностью до перенумерации вершин колчана Q, т.е., если $P(Q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$ и $P(Q, G_1, G_2, \ldots, G_m)$ два таких разбиения, то $m = n$, и существует подстановка σ множества $\{1, 2, \ldots, m\}$ такая, что $Q_i = G_{\sigma(i)}$ для $i = 1, 2, \ldots, m$.

Приведем необходимые сведения о первичных колчанах ассоциативных колец (см. [1, §7.5]).

Определение 1.5. Пусть $Pr(A)$ является первичным радикалом кольца A. Фактор кольцо $A/Pr(A)$ называется диагональю кольца A.

Диагональ кольца является полупервичным кольцом, т.е. кольцом, в котором нет ненулевых нильпотентных идеалов.

Напомним, что кольцо A называется неразложимым, если оно не является прямым произведением двух колец.

Определение 1.6. Кольцо A называется конечно разложимым кольцом, или просто FD-кольцом, если оно является конечным прямым произведением неразложимых колец.

Определение 1.7. Кольцо A называется кольцом с конечно разложимой диагональю, или просто FDD-кольцом, если его диагональ является FD-кольцом.

Предложение 1.8 [1, Proposition 7.5.1]. Первичный радикал FDD-кольца A имеет двустороннее пирсовское разложение следующего вида:

$$Pr(A) = \bigoplus_{i,j=1}^{t} f_i Pr(A) f_j,$$

где $1 = f_1 + \ldots + f_t$ разложение $1 \in A$ в сумму попарно ортогональных идемпотентов, $f_i A f_i = A_i$ и $f_i Pr(A) f_i = \mathcal{I}_i$; $\quad f_i A f_j = f_i Pr(A) f_j \quad (i \neq j; i, j = 1, \ldots, t)$, причем $\bar{A} = A/Pr(A) = A_1/\mathcal{I}_1 \times \ldots \times A_t/\mathcal{I}_t$ – разложение FD-кольца $\bar{A}$ в прямое произведение неразложимыз колец.

Приведем определение первичного колчана произвольного FDD-кольца, используя обозначения предложения 1.8.

Определение 1.9. Пусть A является FDD-кольцом с первичным радикалом $\mathcal{I} = Pr(A)$ и $W = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$. Установим соответствие между идемпотентами $f_1, \ldots f_t$ и вершинами $1, \ldots, t$, соединяя вершину i с вершиной j стрелкой с началом в i и концом в j тогда и только тогда, когда $f_i W f_j \neq 0$. Полученный таким способом конечный ориентированный граф называется первичным колчаном FDD-кольца A и обозначается $PQ(A)$.

Очевидно, $PQ(A) = PQ(A/Pr^2(A))$. В силу теоремы об однозначной разложимости конечно разложимого кольца в прямое произведение колец [1, Theorem 2.5.11] $PQ(A)$ определен однозначно с точностью до перенумерации вершин.

§2. Идеал кольца с конечно разложимой диагональю, ассоциированный с конденсацией его первичного колчана.

Пусть $1 = f_1 + \ldots + f_t$ — разложение единицы FDD-кольца A в сумму попарно ортогональных идемпотентов, удовлетворяющее условиям предложения 1.8, $PQ(A)$ — его первичный колчан.

Отметим, что если первичный колчан кольца A является связным, то кольцо A неразложимо.

Определение 2.1. Кольцо с конечно разложимой диагональю будем называть связным (сильно связным), если его первичный колчан связен (сильно связен).

Пусть $P(PQ(A), Q_1, \ldots, Q_m)$ — разбиение колчана $PQ(A)$ в сильно связные компоненты $Q_1, \ldots, Q_m$. Мы будем говорить, что идемпотент f_k принадлежит Q_i и писать $f_k \in Q_i$, если $k \in Q_i$.

Обозначим через g_i сумму всех идемпотентов f_k, принадлежащих сильно связной компоненте Q_i. Из предложения 1.8 и теоремы 1.4 следует, что $1 \in A$ представляется в виде: $1 = g_1 + \ldots g_m$, где $g_i g_j = \delta_{ij} g_j$ для $i, j = 1, \ldots, m$.

Пусть

$$A = \bigoplus_{i,j=1}^{m} g_i A g_j$$

двустороннее пирсовское разложение кольца A относительно разложения $1 = g_1 + \ldots + g_m$.

Определение 2.2 [1, с.232]. Пусть $P(Q, Q_1, \ldots, Q_m)$ разбиение колчана Q в сильно связные компоненты $Q_1, \ldots, Q_m$. Конденсацией Q^* колчана Q называется колчан, вершинами которого являются точки $q_1, \ldots, q_m$, соответствующие сильно связным компонентам $Q_1, \ldots, Q_m$ и в Q^* из q_i в q_j ведет стрелка тогда и только тогда, когда в Q есть стрелка с началом в VQ_i и концом в VQ_j $\quad (i \neq j; \quad i, j = 1, \ldots, m)$.

Дадим теперь определение колчана ассоциированного с идеалом. Для полусовершенных колец такое определение было дано в [2].

Определение 2.3. Пусть J — двусторонний идеал кольца A, лежащий в первичном радикале $Pr(A)$ кольца A, причем факторкольцо A/J является FD-кольцом и $\bar{A} = A/J = \bar{A}_1 \times \ldots \times \bar{A}_t$ — соответствующее разложение $\bar{A}$ в прямое произведение неразложимых колец, $\bar{1} = \bar{f}_1 + \ldots + \bar{f}_t$ – соответствующее разложение $\bar{1} \in \bar{A}$ в сумму попарно ортогональных центральных идемпотентов. Пусть $V = J/J^2$. Сопоставим идемпотентам $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_t$ вершины $1, \ldots, t$, соединяя вершину i с вершиной j тогда и только тогда, когда $\bar{f}_i W \bar{f}_j \neq 0$. Полученный таким образом колчан будем называть колчаном, ассоциированным с идеалом J, и обозначать $Q(A, J)$.

Теорема 2.4. Пусть A — кольцо с конечно разложимой диагональю и T-нильпотентным первичным радикалом $Pr(A)$. В кольце A существует двусторонний идеал $Y \subset Pr(A)$ такой, что колчан $Q(A, Y)$ совпадает с конденсацией первичного колчана $PQ(A)$ кольца A.

Доказательство. Через Y обозначим двусторонний идеал кольца A, порожденный множеством

$$\sum_{i,j=1; i\neq j}^{m} g_i A g_j.$$

Из предложения 1.8 следует, что $Y \subset Pr(A)$. Будем считать, что матрица смежности первичного колчана $PQ(A)$ имеет вид:

$$[PQ(A)] = \begin{bmatrix} [Q_1] & * & \ldots & * \\ 0 & [Q_2] & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & [Q_m] \end{bmatrix} \quad (1).$$

Из теоремы 11.5.5 [3] следует, что $g_iAg_j = 0$ при $j < i$. Поэтому

$$Pr^2(A) = \begin{bmatrix} Pr^2(g_1Ag_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & Pr^2(g_mAg_m) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

и, поскольку

$$\bigoplus_{i<j} g_iPr(A)g_j = \bigoplus_{i<j} g_iYg_j = Y,$$

то

$$A/Y = g_1Ag_1 \times \ldots \times g_mAg_m.$$

Из представлений (1)и (2) следует, что $PQ(g_kAg_k) = Q_k$ при $k = 1, \ldots, m$. Поэтому все кольца g_kAg_k неразложимы и вершины колчана $Q(A,Y)$ можно занумеровать числами $1, \ldots, m$, которые соответствуют идемпотентам $g_1, \ldots, g_m$. Очевидно, в $Q(A,Y)$ идет стрелка из i в j тогда и только тогда, когда есть стрелка в конденсации $PQ(A)^*$ первичного колчана $PQ(A)$. Следовательно, $Q(A,Y) = PQ(A)^*$. Теорема доказана.

Abstract. Let A be a ring, with finitely decomposable diagonal and T-nilpotent prime radical $Pr(A)$.

It is proved the existence of the two-sided ideal $Y \subset Pr(A)$ such that the associated quiver $Q(A,Y)$ coincides with the condensation of the prime quiver of the ring A.

Литература

[1] N.M.Gubareni, V.V.Kirichenko, *Rings and modules,* Czestochowa, Poland, 2001.

[2] В.В.Кириченко, Самир Валио, Ю.В.Яременко, *Полусовершенные кольца и их колчаны,* Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры, Киев: Ин-т математики, 1993 — с.438-456.

[3] Ф.Каш, *Модули и кольца,* М.: Мир, 1981.

В.В.Кириченко
Киевский национальный
университет им. Т.Шевченко

Ю.М.Рябухин
Институт математики
АН Молдовы

Поступило 24.03.2001