Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 16P140, 16G10

Нетеровы справа праворядные полупервичные и полудистрибутивные кольца

М.А.Хибина

1. Полупервичные праворядные кольца

Все кольца ассоциативны с $1 \neq 0$, все модули правые и унитарные. Если A — кольцо, то через $A_A({}_AA)$ обозначаем правый (левый) регулярный A-модуль.

Модуль называется *цепным (uniserial)*, если все его подмодули линейноупорядочены по включению. Модуль называется *полуцепным (serial)*, если он является прямой суммой цепных модулей. Кольцо A называется *праворядным (леворядным)*, если модуль $A_A({}_AA)$ является полуцепным. Кольцо A, которое одновременно праворядное и леворядное, называется *полуцепным.* Эта терминология ведет свое начало от Л.А.Скорнякова.

Хорошо известно, что праворядное кольцо всегда является полусовершенным [1, гл.22].

Всюду в статье термин "идеал"означает двусторонний идеал.

Напомним, что кольцо A называется *полупервичным*, если оно не содержит ненулевых нильпотентных идеалов. В случае когда произведение произвольных двух ненулевых идеалов кольца A отлично от нуля, кольцо A называется *первичным.* Из определения следует, что первичное кольцо всегда полупервично.

Следующая теорема дает критерий того, что полусовершенное полупервичное кольцо A является конечным прямым произведением первичных колец.

Теорема 1.1.[2]. *Полусовершенное полупервичное кольцо A является конечным прямым произведением первичных колец тогда и только тогда, когда кольца e_iAe_i первичны при $i = 1, \dots, n$, где $1 = e_1 + \ldots + e_n$ — разложение единицы кольца A в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов.*

Теорема 1.2. *Полупервичное праворядное кольцо является конечным прямым произведением первичных праворядных колец.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующие две леммы.

Лемма 1.3.[2]. *Пусть e — ненулевой идемпотент полупервичного кольца A. Тогда кольцо eAe полупервично.*

Доказательство. Пусть $e = e_1, e_2 = 1 - e_1, A_{ij} = e_iAe_j (i, j = 1, 2)$. Предположим, что кольцо eAe не является полупервичным. Тогда в нем существует ненулевой нильпотентный идеал J. Нетрудно проверить, что множество $\tilde{J} = J + JA_{12} + A_{21}J + A_{21}JA_{12}$ является двусторонним нильпотентным идеалом кольца A, что противоречит его полупервичности.

Лемма 1.4. *Полупервичное локальное праворядное кольцо A является первичным.*

Доказательство. Пусть J_1 и J_2 — два ненулевых идеала кольца A, таких, что $J_1J_2 = 0$. В силу праворядности A можно считать, что $J_1 \supset J_2$. Но тогда $J_2^2 = 0$ и из полупервичности A следует, что $J_2 = 0$. Это противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы 1.2. сразу следует из лемм 1.3 и 1.4 и теоремы 1.1.

2. Полусовершенные полудистрибутивные правые кольца Голди

Приведем определение правого кольца Голди [3, §7.2]

Определение2.1. *Кольцо A называется правым кольцом Голди, если:*

(1) *кольцо A удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей правых аннуляторов;*

(2) *кольцо A не содержит бесконечных прямых сумм правых идеалов.*

Очевидно, что нетеровы справа кольца являются правыми кольцами Голди.

Напомним, что модуль M называется *дистрибутивным*, если для любых его подмодулей K, L, N справедливо равенство $K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$.

Очевидно, что подмодули и фактормодули дистрибутивного модуля – дистрибутивны.

Полудистрибутивным модулем называется прямая сумма дистрибутивных модулей. Кольцо A называется *полудистрибутивным справа (слева)*, если регулярный модуль $A_A({}_AA)$ полудистрибутивен. Полудистрибутивное справа и слева кольцо называется *полудистрибутивным.*

Кольцо A называется *цепным (uniserial)*, если правый и левый A-модули A_A и ${}_AA$ являются цепными.

Следующая теорема дает критерий полудистрибутивности полусовершенных полупервичных правых колец Голди.

Теорема 2.1.[2]. *Полупервичное полусовершенное правое кольцо Голди A полудистрибутивно тогда и только тогда, когда для любого локального идемпотента $e \in A$ кольцо eAe — цепное.*

Общий критерий полудистрибутивности произвольного полусовершенного кольца принадлежит А.А.Туганбаеву [4] (см. также [5, гл. 11]).

Приведем формулировку этого критерия, следуя [2, теорема 1.4].

Теорема 2.2.[2]. *Полусовершенное кольцо A полудистрибутивно справа (слева) тогда и только тогда, когда для любых локальных идемпотентов e и f кольца A множество eAf является цепным правым fAf-модулем (цепным левым eAe-модулем).*

Через $M_n(D)$ обозначим кольцо всех квадратных матриц порядка n над телом D.

Пусть $\mathcal{O}$ — дискретно нормированное кольцо с простым элементом π, $\pi\mathcal{O} = \mathcal{O}\pi$ — его единственный максимальный идеал. Обозначим через D — классическое тело частных кольца $\mathcal{O}$.

Рассмотрим следующее подкольцо в кольце $M_n(D)$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \ldots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \ldots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \ldots & \mathcal{O} \end{pmatrix} (*),$$

α_{ij} — целые рациональные числа, причем $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всех i, j, k; $\alpha_{ii} = 0$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Такое кольцо является нетеровым с двух сторон полусовершенным полудистрибутивным первичным кольцом, и кольцо $M_n(D)$ является классическим кольцом частных кольца Λ.

Для кольца Λ вида $(*)$ мы используем следующее обозначение: $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$, где $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ — матрица показателей кольца Λ.

Теорема 2.3.[2]. *Нетерово справа полусовершенное полупервичное кольцо A полудистрибутивно тогда и только тогда, когда оно является конечным прямым произведением полных матричных колец над телами $M_{n_i}(D_i)$*
$(i = 1, 2, \ldots, p)$ и колец $\Lambda_j = \{\mathcal{O}_j, \mathcal{E}(\Lambda_j)\}$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$.

Обозначим через $H_s(\mathcal{O})$ кольцо вида $\{\mathcal{O}, \mathcal{E}(H_s(\mathcal{O}))\}$, где

$$\mathcal{E}(H_s(\mathcal{O})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} (**)$$

квадратная $(0, 1)$-матрица порядка s.

Теорема 2.4. *Следующие условия равносильны для нетерова справа полусовершенного полупервичного и полудистрибутивного кольца A:*

(a) кольцо A праворядно;

(b) кольцо A наследственно с двух сторон;

(c) кольцо A является полуцепным;

(d) кольцо A эквивалентно в смысле Мориты конечному прямому произведению тел и колец $H_{s_j}(\mathcal{O}_j)$ $(j = 1, \ldots q)$.

Доказательство. Очевидно, во всех случаях кольцо A можно считать приведенным и неразложимым в прямое произведение колец.

$(a) \Rightarrow (b)$. По теореме 2.3 кольцо A можно считать либо телом, либо кольцом вида $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$. Очевидно, что тело является наследственным кольцом. В силу того, что кольцо Λ является приведенным, то в матрице $\mathcal{E}(\Lambda)$ нет симметричных нулей, и первую строку, которая соответствует первому неразложимому проективному Λ-модулю P_1 можно сделать нулевой. Модуль P_1R является проективным (он содержит единственный максимальный подмодуль в силу того, что кольцо Λ праворядно) и поэтому совпадает с $P_2 = (\alpha_{21}, 0, \ldots, 0) = (1, 0, \ldots, 0)$, модуль $P_2R = P_3 = (1, 1, 0, \ldots, 0)$ и, продолжая этот процесс, получим, что $P_{s-1}R = P_s = (1, 1, \ldots, 1, 0)$. Следовательно, матрица $\mathcal{E}(\Lambda)$ совпадает с матрицей $(**)$. В силу [6] кольцо Λ наследственно с двух сторон.

Импликация $(b) \Rightarrow (c)$ вытекает из следствия 3.9 и теоремы 3.11 [7].

Импликация $(c) \Rightarrow (d)$ следует из теоремы 2.3 и [6].

Из теоремы 2.2 и [6] получаем доказательство импликации $(d) \Rightarrow (a)$. Теорема доказана.

Abstract. It is proved that a semi-prime right Noetherian right serial semi-distributive ring is a hereditary serial ring.

Литература

[1] К.Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории,* т.2, М., "Мир", 1979.

[2] В.В.Кириченко, М.А.Хибина, *Полусовершенные полудистрибутивные кольца,* Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры, Киев: Ин-т математики, 1993.- С.457-480.

[3] И.Херстейн, *Некоммутативные кольца,* М., "Мир", 1972.

[4] А.А.Туганбаев, *Полудистрибутивные кольца,* Тезисы 19 Всесоюзной алгебраической конференции. Ч.1. Львов, 1987.

[5] Tuganbaev Askar A., *Semidistributive Modules and Rings,* Kluwer Academic Publishers.1998.

[6] G.O.Michler, *Structure of Semi-Perfect Hereditary Noetherian Rings,* J. Algebra 13, 1969, 327-344.

[7] V.V.Kirichenko, *Semi-perfect Semi-Distributive Rings,* Algebras and Representation Theory 3 (2000), 81-98.

Институт Кибернетики
им. В.М.Глушкова НАН Украины

Поступило 20.03.2001