Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 20D20

О E- и C-свойствах подгрупп конечных групп

Т.И.Васильева

Рассматриваются только конечные группы. В 1963 году Гашюцом [1] был предложен способ нахождения классов сопряженных подгрупп в конечных разрешимых группах, основанный на введенном им понятии формации. Он доказал, что для локальной формации $\mathfrak{F}$ каждая конечная разрешимая группа обладает в точности одним классом сопряженных $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп. В дальнейшем существование и сопряженность $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп были установлены в группах с разрешимым и $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом (см., например, [2]). В [3] было доказано, что класс $\mathfrak{X}$, относительно которого во всякой разрешимой группе $\mathfrak{X}$-покрывающие подгруппы существуют и сопряжены, является классом Шунка. В [4, 5] для класса Шунка $\mathfrak{X}$ изучались условия существования и сопряженности $\mathfrak{X}$-покрывающих подгрупп в расширениях π-разрешимой группы с помощью $\mathfrak{X}$-группы. Настоящая статья посвящена отысканию $\mathfrak{X}$-покрывающих подгрупп и нахождению условий их сопряженности в расширениях π-разрешимой группы с помощью группы, обладающей $E-$ или $C-$свойством.

Для класса групп $\mathfrak{X}$ подгруппа H группы G называется $\mathfrak{X}$-покрывающей подгруппой [6], если $H \in \mathfrak{X}$ и из условий $H \subseteq U \subseteq G$, $V \lhd U$ и $U/V \in \mathfrak{X}$ всегда следует $HV = U$. Классом Шунка называется непустой гомоморф $\mathfrak{X}$, содержащий всякую группу, у которой все примитивные факторгруппы принадлежат $\mathfrak{X}$. Для обозначения ядра подгруппы M группы G применяется запись M_G. Через π обозначается некоторое множество простых чисел, π' — дополнение к π во множестве всех простых чисел. Группа называется π-замкнутой, если она имеет нормальную π-холлову подгруппу. $\mathfrak{S}^{\pi}$ — класс всех π-разрешимых групп.

Для непустых классов групп $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ обозначим через $E_{\mathfrak{X}}\mathfrak{F}$ и $C_{\mathfrak{X}}\mathfrak{F}$ следующие классы групп:

$E_{\mathfrak{X}}\mathfrak{F} = (G \mid$ в группе G существует $\mathfrak{X}$-покрывающая подгруппа, принадлежащая $\mathfrak{F})$,

$C_{\mathfrak{X}}\mathfrak{F} = (G \mid$ группа $G \in E_{\mathfrak{X}}\mathfrak{F}$ и любые две $\mathfrak{X}$-покрывающие подгруппы сопряжены в $G)$.

Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп, то положим $E_{\mathfrak{X}}\mathfrak{G} = E_{\mathfrak{X}}$ и $C_{\mathfrak{X}}\mathfrak{G} = C_{\mathfrak{X}}$.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — непустые гомоморфы. Если W — подгруппа группы G такая, что $W \in E_{\mathfrak{X}}\mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $WN/N \in E_{\mathfrak{X}}\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть R — $\mathfrak{X}$-покрывающая подгруппа группы W и $R \in \mathfrak{F}$. Тогда факторгруппа $RN/N \simeq R/R \cap N \in Q\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$ и $RN/N \in Q\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$. Покажем, что RN/N — $\mathfrak{X}$-покрывающая подгруппа в WN/N. Пусть $RN/N \subseteq U/N \subseteq WN/N$, $V/N \lhd U/N$ и $U/N/V/N \in \mathfrak{X}$. По тождеству Дедекинда, $U = (U \cap W)N$ и $V = (V \cap W)N$. Так как $R \subseteq U \cap W \subseteq W$, $U/V = (U \cap W)N/(V \cap W)N \simeq U \cap W/(V \cap W)(N \cap W) \in \mathfrak{X}$ и R — $\mathfrak{X}$-покрывающая подгруппа в W, то $R(V \cap W)(N \cap W) = U \cap W$. Откуда $RN/N \cdot V/N = U/N$, что завершает доказательство леммы.

Следуя монографии [7], для непустого класса групп $\mathfrak{X}$ максимальную подгруппу M группы G будем называть $\mathfrak{X}$-абнормальной в G, если $G/M_G \notin \mathfrak{X}$. Подгруппу H группы G будем называть $\mathfrak{X}$-абнормальной в G, если всегда из $H \subseteq M \subset T \subseteq G$, где M — максимальная подгруппа в T, следует, что M $\mathfrak{X}$-абнормальна в T. Нам потребуется результат, который следует из теоремы 11.6 [7].

Лемма 2 [7]. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой гомоморф. Подгруппа R является $\mathfrak{X}$-покрывающей подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $R \in \mathfrak{X}$ и R является $\mathfrak{X}$-абнормальной подгруппой в G.*

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, состоящий из π-замкнутых групп, группа G есть расширение π-разрешимой группы с помощью $E_{\mathfrak{X}}$-группы. Если всякая π'-подгруппа из G принадлежит $E_{\mathfrak{X}}$, то $G \in E_{\mathfrak{X}}$.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. По условию, в ней существует нормальная π-разрешимая подгруппа S такая, что $G/S \in E_{\mathfrak{X}}$. По выбору G подгруппа $S \neq 1$.

Выберем в S минимальную нормальную подгруппу N группы G. Факторгруппа G/N является расширением π-разрешимой группы S/N с помощью $E_{\mathfrak{X}}$-группы. Если B/N — произвольная π'-подгруппа из G/N, то B π-разрешима. По теореме 1.8.1 из [8], в B существует π'-холлова подгруппа $B_{\pi'}$ и $B = B_{\pi'}N$. Так как $B_{\pi'} \in E_{\mathfrak{X}}$, то $B_{\pi'}N/N \in E_{\mathfrak{X}}$, по лемме 1. По выбору G факторгруппа $G/N \in E_{\mathfrak{X}}$.

Пусть R/N — $\mathfrak{X}$-покрывающая подгруппа группы G/N.

Если $R \neq G$, то $R \in E_{\mathfrak{X}}$, т.е. в R существует $\mathfrak{X}$-покрывающая подгруппа, которая, по лемме 15.1 из [2], является $\mathfrak{X}$-покрывающей подгруппой группы G. Противоречие.

Значит, $R = G$.

Если N — разрешимая группа, то N — абелева группа. Так как G не принадлежит классу $\mathfrak{X}$ и $G/N \in \mathfrak{X}$, то в G найдется максимальная подгруппа M такая, что G/M_G не принадлежит $\mathfrak{X}$. Поэтому N не содержится в M, $G = MN$ и $N \cap M = 1$. Подгруппа M $\mathfrak{X}$-абнормальна в G и $M \simeq G/N \in \mathfrak{X}$, поэтому, по лемме 2, M является $\mathfrak{X}$-покрывающей подгруппой группы G. Противоречие.

Предположим, что N не является разрешимой группой. Так как N характеристически проста, то N есть прямое произведение изоморфных простых групп $N_1, N_2, \ldots, N_m$. Ряд $1 = N_0 \subset N_1 \subset N_1N_2 \subset \ldots \subset N_1N_2\ldots N_m = N$ является композиционным и его факторы $N_1N_2\ldots N_i/N_1N_2\ldots N_{i-1} \simeq N_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Так как N π-разрешима, то $|N_i|$ — π'-число, $i = 1, 2, \ldots, m$. Поэтому N — π'-группа. По теореме Фейта-Томпсона, $2 \in \pi'$. Обозначим через W добавление к N в G. Тогда $G = WN$ и $W \cap N \subseteq \Phi(W)$. Из $G/N \simeq W/W \cap N$ и насыщенности класса Шунка $\mathfrak{X}$ следует, что $W \in \mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{X}$ состоит из π-замкнутых групп, то π-холлова подгруппа W_π группы W нормальна в W. По теореме Холла, получаем, что $W = W_\pi W_{\pi'}$, где $W_{\pi'}$ — π'-холлова подгруппа группы W. Заметим, что W_π разрешима, как группа нечетного порядка, и является π-холловой подгруппой группы G. При этом $W_\pi N/N \lhd G/N \in \mathfrak{X}$. Так как $G/W_\pi N$ есть π'-группа и $W_\pi N$ π-разрешима, то G π-разрешима. Можно считать, что $G = S$.

Если $W_\pi \lhd G$, то в W_π найдется разрешимая нормальная подгруппа. Этот случай рассмотрен выше.

Пусть $N_G(W_\pi) \neq G$. По выбору G в $N_G(W_\pi)$ существует $\mathfrak{X}$-покрывающая подгруппа L. Из π-замкнутости G/N, пронормальности W_π в G и леммы 1 получаем $G/N = N_{G/N}(W_\pi N/N) = N_G(W_\pi)N/N = LN/N$. Так как N — π'-группа и $L \subseteq N_G(W_\pi)$, то $W_\pi \subseteq L$. Если $L \subseteq U \subseteq G$, $V \lhd U$ и $U/V \in \mathfrak{X}$, то $U/V = N_{U/V}(W_\pi V/V) = N_U(W_\pi)V/V = LV/V$. Это означает, что L является $\mathfrak{X}$-покрывающей подгруппой группы G. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, состоящий из π-замкнутых групп и содержащий все π'-группы. Тогда во всяком расширении π-разрешимой группы с помощью $E_{\mathfrak{X}}$-группы существует $\mathfrak{X}$-покрывающая подгруппа.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка и $\pi(\mathfrak{X}) \subseteq \pi$. Тогда во всяком расширении π-разрешимой группы с помощью $E_{\mathfrak{X}}$-группы существует $\mathfrak{X}$-покрывающая подгруппа.*

Следствие 3. *Если $\mathfrak{X}$ — класс всех π-замкнутых групп, то во всяком расширении π-разрешимой группы с помощью $E_{\mathfrak{X}}$-группы существует $\mathfrak{X}$-покрывающая подгруппа.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, состоящий из π-замкнутых групп, группа G есть расширение π-разрешимой группы с помощью $C_{\mathfrak{X}}\mathfrak{S}^{\pi}$-группы. Если всякая π'-подгруппа из G принадлежит $C_{\mathfrak{X}}$, то $G \in C_{\mathfrak{X}}$.*

Доказательство. По теореме 1, группа $G \in E_{\mathfrak{X}}$. Докажем сопряженность $\mathfrak{X}$-покрывающих подгрупп. Предположим, что существуют группы, которые удовлетворяют условию теоремы, но не принадлежат $C_{\mathfrak{X}}$. Выберем среди них группу G наименьшего порядка. Пусть R_1 и R_2 — $\mathfrak{X}$-покрывающие подгруппы группы G такие, что $R_1 \neq R_2^g$ для любого $g \in G$. Обозначим через S нормальную π-разрешимую подгруппу группы G, для которой $G/S \in C_{\mathfrak{X}}\mathfrak{S}^{\pi}$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в S. Покажем, что любая π'-подгруппа B/N из G/N принадлежит $C_{\mathfrak{X}}$. Из π-разрешимости B следует, что $B = B_{\pi'}N$ для некоторой π'-холловой подгруппы $B_{\pi'}$ из B. Так как $B_{\pi'} \in E_{\mathfrak{X}}$, то, по лемме 1, $B/N \in E_{\mathfrak{X}}$. Пусть V_1/N и V_2/N — произвольные $\mathfrak{X}$-покрывающие подгруппы из B/N. Тогда $V_i = (V_i \cap B_{\pi'})N$ и, по условию, в $V_i \cap B_{\pi'}$ существует $\mathfrak{X}$-покрывающая подгруппа L_i, $i = 1, 2$. Если N — π'-подгруппа, то $L_1 = L_2^g$ для некоторого $g \in B$. Отсюда $V_1/N = L_1N/N = L_2^gN/N = (V_2/N)^{gN}$, $gN \in B/N$. Если N — разрешимая π-группа, то $V_i/N \simeq V_i \cap B_{\pi'} \in \mathfrak{X}$, т.е. $L_i = V_i \cap B_{\pi'}$ для $i = 1, 2$. Покажем, что L_i является $\mathfrak{X}$-покрывающей подгруппой $B_{\pi'}$, $i = 1, 2$. Пусть $L_i \subseteq U \subseteq B_{\pi'}$, $V \lhd U$ и $U/V \in \mathfrak{X}$. Тогда $V_1/N \subseteq UN/N \subseteq B/N$, $UN/N/VN/N \simeq U/V(U \cap N) \in \mathfrak{X}$. Откуда $V_1/N \cdot VN/N = UN/N$. Тогда $L_1NV = UN$. Так как L_1V и U — π'-холловы подгруппы π-разрешимой группы UN, то, по теореме 1.8.1 из [8], $(L_1V)^y = U$ для некоторого $y \in N$. Поскольку $|U| = |(L_1V)^y| = |L_1V|$, то получаем $U = L_1V$. Значит, L_1 является $\mathfrak{X}$-покрывающей подгруппой группы $B_{\pi'}$. Аналогично показывается, что L_2 есть $\mathfrak{X}$-покрывающая подгруппа в $B_{\pi'}$. По условию, $L_1 = L_2^x$ для некоторого $x \in B_{\pi'}$. Тогда $V_1/N = L_2^xN/N = (V_2/N)^{xN}$, $xN \in B/N$. Итак, для G/N условия теоремы выполнены. По выбору G факторгруппа $G/N \in C_{\mathfrak{X}}$, поэтому $R_1N/N = R_2^hN/N$ для некоторого $h \in G$. Так как R_iS/S есть $\mathfrak{X}$-покрывающая подгруппа в $G/S \in C_{\mathfrak{X}}\mathfrak{S}^{\pi}$, то $R_i \in \mathfrak{S}^{\pi}$ для $i = 1, 2$.

Пусть $R_1N \neq G$. Из π-разрешимости N и изоморфизма $R_1N/N \simeq R_1/R_1 \cap N \in \mathfrak{S}^{\pi} \cap \mathfrak{X}$ по выбору группы G имеем $R_1N \in C_{\mathfrak{X}}$. Поэтому $\mathfrak{X}$-покрывающие подгруппы R_1 и R_2^h сопряжены в R_1N. Противоречие.

Если $R_1N = G$, то G является π-разрешимой группой. По теореме 2 из [4], $G \in \mathfrak{X}$. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, состоящий из π-замкнутых групп и содержащий все π'-группы. Тогда всякое расширение π-разрешимой группы с помощью $C_{\mathfrak{X}}\mathfrak{S}^{\pi}$-группы принадлежит $C_{\mathfrak{X}}$.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка и $\pi(\mathfrak{X}) \subseteq \pi$. Тогда всякое расширение π-разрешимой группы с помощью $C_{\mathfrak{X}}\mathfrak{S}^{\pi}$-группы принадлежит $C_{\mathfrak{X}}$.*

Теорема 2 включает теорему 1 из [9].

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{H}$ — локальная формация, состоящая из π-замкнутых групп, группа G есть расширение π-разрешимой группы с помощью $C_{\mathfrak{H}}$-группы. Если всякая π'-подгруппа из G принадлежит $C_{\mathfrak{H}}$, то $G \in C_{\mathfrak{H}}$.*

Доказательство. Так как локальная формация является классом Шунка, то, по теореме 1, группа $G \in E_{\mathfrak{H}}$. Для доказательства сопряженности $\mathfrak{H}$-покрывающих подгрупп предположим, что существуют группы, для которых теорема не выполняется. Пусть G — группа наименьшего порядка, в которой существуют $\mathfrak{H}$-покрывающие подгруппы H_1 и H_2 такие, что $H_1 \neq H_2^x$ для любого x $\in G$. По условию теоремы, в G найдется π-разрешимая группа S, для которой $G/S \in C_{\mathfrak{H}}$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в S. Как в теореме 2 показывается, что любая π'-подгруппа из G/N принадлежит $C_{\mathfrak{H}}$. По выбору G факторгруппа $G/N \in C_{\mathfrak{H}}$, поэтому $H_1N/N = H_2^hN/N$ для некоторого $\in G$.

Пусть $H_1N \neq G$. Тогда $H_1N \in C_{\mathfrak{H}}$ как расширение π-разрешимой группы с помощью $C_{\mathfrak{H}}$-группы. Поэтому $\mathfrak{H}$-покрывающие подгруппы H_1 и H_2^h сопряжены в H_1N. Противоречие.

Пусть $H_1N = G$.

Если N — разрешимая группа, то N абелева. Отсюда и из того, что G не принадлежит $\mathfrak{H}$, получаем $N \cap H_i = 1$, H_i является максимальной подгруппой в G и $N = G^{\mathfrak{H}}$. Предположим, что ядра подгрупп H_1 и H_2 в G не равны 1. Обозначим пересечение этих ядер через K. Допустим, что $K \neq 1$. Покажем, что всякая π'-подгруппа B/K из G/K принадлежит $C_{\mathfrak{H}}$. Так как π-холлова подгруппа K_π группы K нормальна в K и является характеристической подгруппой в K, то K_π нормальна в B. Подгруппа $B = K_\pi W$, где W — π'-холлова подгруппа из B. По условию, в $W \in E_{\mathfrak{H}}$, тогда $B/K \in E_{\mathfrak{H}}$, по лемме 1. Пусть V_1/K и V_2/K — произвольные $\mathfrak{H}$-покрывающие подгруппы из B/K. По тождеству Дедекинда, $V_i = K_\pi(V_i \cap W)$, поэтому $V_i = K_\pi T_i$ для некоторой $\mathfrak{H}$-покрывающей подгруппы T_i подгруппы $V_i \cap W$, $i = 1, 2$. Если $T_1 \subseteq U \subseteq W$ и $U/V \in \mathfrak{H}$ для нормальной подгруппы V в U, то $V_1 = K_\pi T_1 \subseteq K_\pi U \subseteq K_\pi W = B$ и $K_\pi U/K/K_\pi V/K \simeq K_\pi U/K_\pi V \simeq U/V(K_\pi \cap U) = U/V \in \mathfrak{H}$. Тогда $V_1/K \cdot K_\pi V/K = K_\pi U/K$, поэтому $K_\pi T_1 V = K_\pi U$. Из $|T_1V| = |U|$ следует, что $T_1V = U$. Таким образом, T_1 есть $\mathfrak{H}$-покрывающая подгруппа группы W. Аналогично показывается, что T_2 есть $\mathfrak{H}$-покрывающая подгруппа группы W. По условию, $T_1 = T_2^m$ для некоторого $m \in W$. Следовательно, $V_1/K = K_\pi T_1/K = K_\pi T_2^m/K = (V_2/K)^m K$. Значит, B/K принадлежит $C_{\mathfrak{H}}$. Ввиду того, что $(G/K)^{\mathfrak{H}} \simeq N/N \cap K$ — π-разрешимая группа и $H_1/K \in \mathfrak{H}$, по выбору G факторгруппа G/K принадлежит $C_{\mathfrak{H}}$. Откуда $H_1/K = H_2^z/K$ для некоторого $z \in G$. Противоречие.

Итак, $K = 1$. Если ядро R подгруппы H_1 не равно 1, то $RH_2 = G$. Из $G/R \simeq H_2/R \cap H_2 \in \mathfrak{H}$ следует, что $N = G^{\mathfrak{H}} \subseteq R \subseteq H_1$, т.е. $K \neq 1$. Противоречие.

Таким образом, ядра подгрупп H_1 и H_2 в G равны 1. По теореме 8.5 из [2], подгруппы H_1 и H_2 сопряжены в G. Противоречие.

Пусть N — неразрешимая группа. Из π-разрешимости N следует, что $|N|$ есть π'-число. По теореме Фейта-Томпсона, $2 \in \pi'$. Из того, что H_1 π-замкнута, следует $H_1 = ZY$, где Z и Y — π-холлова и π'-холлова подгруппы группы H_1 соответственно, причем Z нормальна в H_1. Тогда группа $G = ZYN$ и Z есть разрешимая π-холлова подгруппа группы G. Из π-замкнутости G/N следует, что ZN — нормальная подгруппы в G. Так как G/ZN есть π'-группа и ZN π-разрешима, получаем, что G — π-разрешимая группа. Теперь сопряженность H_1 и H_2 следует по теореме 2. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — локальная формация, состоящая из π-замкнутых групп и содержащая все π'-группы. Тогда всякое расширение π-разрешимой группы с помощью $C_{\mathfrak{H}}$-группы принадлежит $C_{\mathfrak{H}}$.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{H}$ — локальная формация и $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi$. Тогда всякое расширение π-разрешимой группы с помощью $C_{\mathfrak{H}}$-группы принадлежит $C_{\mathfrak{H}}$.*

Заметим, что пример из [5] показывает что в теореме 2 условие $C_{\mathfrak{X}}\mathfrak{S}^{\pi}$ является существенным, а в теореме 3 нельзя заменить локальную формацию на класс Шунка.

Abstract. The paper is devoted to finding classes of finite non-soluble groups in which $\mathfrak{F}$-covering subgroups exist and conjugate.

Литература

[1] W.Gaschütz, *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen*, Math. Z. 80:4 (1963), 300–305.

[2] Л.А.Шеметков, *Формации конечных групп*, М.: Наука, 1978.

[3] H.Schunk, *$\mathfrak{H}$-Untergruppen in endlichen auflösbarer Gruppen*, Math. Z. 97:4 (1967), 326–330.

[4] Т.И.Васильева *Конечные π-разрешимые группы и их проекторы*, ДАН БССР 29:3 (1985), 197–200.

[5] Т.И.Васильева *Проекторы расширений π-разрешимых групп*, Вопросы алгебры N 2 (1985), 87–92.

[6] K.Doerk, T.Hawkes, *Finite soluble groups*, Berlin-New York, Walter de Gruyter, 1992.

[7] Л.А.Шеметков, А.Н.Скиба *Формации алгебраических систем*, М.: Наука, 1989.

[8] С.А.Чунихин *Подгруппы конечных групп*, М.: Наука, 1964.

[9] В.Г.Сементовский *О проекторах конечных групп с π-разрешимыми корадикалами*, Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. наук N 1 (1984), 33–37.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 22.03.2001