Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 20F38, 20D25

Функционалы на группах и вербальные подгруппы

В.М.Усенко

В настоящей работе обобщается понятие n-абелевой группы [1]. В группах, которые при этом возникают, описываются вербальные подгруппы, порожденные одним групповым словом.

1. Основные понятия и обозначения.

Следуя [1] в терминологии и обозначениях, отметим некоторые особенности их использования в настоящей работе. Запись $x :=$ означает "положим x равным (по определению)..."

1.1. Групповую операцию будем обозначать символом $*$, используя при этом для соответствующей группы обозначение $(G, *, \theta_G = \theta)$, где θ_G – нейтральный элемент группы G. Если $x \in G$, то $\bar{x}$ – элемент, противоположный элементу x в группе $(G, *, \theta_G = \theta)$, т.е. $x * \bar{x} = \bar{x} * x = \theta$. Через i_g будем обозначать внутренний автоморфизм группы G, определяемый ее элементом g, т.е. $xi_g = \bar{g} * x * g$ для всех $x \in G$. Положим, далее, $[u; v] = u * v * \bar{u} * \bar{v}$ – коммутатор элементов $u, v \in G$, $[G]$ – коммутант группы G.

Как обычно, $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел, $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел.

Для всех элементов x группы $(G, *, \theta_G = \theta)$ положим

$$x\nu_0 := \theta,\ x\nu_1 := x,\ x\nu_{-1} := \bar{x},$$

$$x\nu_{m+1} := x\nu_m * x,\ x\nu_{m-1} := x\nu_m * \bar{x},\ m \in \mathbb{Z}.$$

Через $\mathcal{NT}(G)$ обозначим множество всех преобразований группы G, рассматриваемых как правые операторы относительно операций композиции и суммирования преобразований:

$$x(\varphi\psi) := (x\varphi)\psi,$$

$$x(\varphi * \psi) := x\varphi * x\psi,$$

$$x \in G,\ \varphi, \psi \in \mathcal{NT}(G)$$

Относительно этих преобразований множество $\mathcal{NT}(G)$ является почтикольцом (см.,например, [1]), которое мы будем называть симметрическим почтикольцом на группе G. При этом ι_G – единица почтикольца $\mathcal{NT}(G)$ (=тождественное преобразование группы G), ϑ_G – нуль почтикольца $\mathcal{NT}(G)$ (=нулевое преобразование группы G, т.е. $x\vartheta_G = \theta, x \in G$).

Если X – множество, G – группа, то $Map(X; G)$ – группа всех отображений множества X в группу G относительно операции суммирования отображений, определяемой так же, как и операция суммирования преобразований. При этом ϑ_G^X – нейтральный элемент группы $Map(X; G)$ (=нулевое отображение: $x\vartheta_G^X = \theta, x \in X$).

1.2. Через $F(X)$ будем обозначать свободную группу в алфавите X. Если $x \in X$, то $\tilde{x} \in \{x; \bar{x}\}$. Если $w \in F[X]$, то $l(w)$ – длина группового слова w. Для всех $x \in X$ положим $\varepsilon(\tilde{x}) = -1$, если $\tilde{x} = \bar{x}$ и $\varepsilon(\tilde{x}) = 1$, если $\tilde{x} = x$. Если

$$w = \tilde{x}_{i_1} * \tilde{x}_{i_2} * ... * \tilde{x}_{i_m},$$

то

$$l_k(w) := \sum_{j=1}^{m} \delta_{k,i_j} \cdot \varepsilon(\tilde{x}_{i_j}),$$

где $\delta_{r,s}$ – символ Кронекера. Число $l_k(w)$ назовем x_k – логарифмом группового слова w. Очевидно, что $l_k(w_1 * w_2) = l_k(w_1) + l_k(w_2)$. Если $X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$, то целочисленную последовательность $L_X(w) = \{l_i(w)\}_{i=1}^{\infty}$ (или $L_X(w) = \{l_i(w)\}_{i=1}^{n}$, когда $X = \{x_1, ..., x_n\}$) будем называть X – логарифмом элемента $w \in F(X)$.

1.3. Полуретракцией группы G (см. []) называется такое ее преобразование $\tau \in \mathcal{NT}(G)$, что

$$(g * h)\tau = (g\tau * h\tau)\tau$$

для всех $g, h \in G$.

Если $Y \subseteq X$, то через π_Y будем обозначать идемпотентный эндоморфизм группы $F(X)$ такой, что $x\pi_Y = x$, когда $x \in Y$, и $x\pi_Y = \theta$ в противном случае. Если $Y = \{x_{i_1}, ..., x_{i_m}\}$, то преобразование $\tau_Y = \pi_{x_{i_1}} * ... * \pi_{x_{i_m}}$ является полуретракцией группы $F(X)$.

Говоря о полуретракциях, будем пользоваться обозначениями, терминологией и результатами работы [2] без дальнейших ссылок.

1.4. Пусть $(U, *, \theta_U = \theta)$, $(H, *, \theta_H = \theta)$ – группы, для которых заданы отображения

$$\sigma : H \to AutU : x \mapsto \sigma_x$$

$$q : H \times H \to U : (x; y) \mapsto (x; y)q.$$

Будем говорить, что $[U, H : (\sigma; q)]$ – шрейерова пара групп, если для всех $x, y, z \in H$ выполняются условия

$$\sigma_{x*y} = \sigma_y \sigma_x i_{\overline{(x;y)q}},$$

$$(x; y)q * (x * y; z)q = (y; z)q\sigma_x * (x; y * z)q.$$

Систему $< \sigma; q >_U^H$ будем называть при этом системой факторов соответствующей шрейеровой парой (или шрейеровой системой $(U; H)$ факторов).

Если $[U; H : (\sigma; q)]$ – некоторая шрейерова пара групп, то множество $U \times H$ является группой относительно операции

$$(x; y) * (t; u) = (x * t\sigma_y * (y; u)q; y * u),$$

$$x, t \in U, y, u \in H.$$

Эта группа называется шрейеровым произведением (или шрейеровым $(\sigma; q)$-произведением, если нужно отметить соответствующую систему факторов) и обозначается через $[U \times H : (\sigma; q)]$. Группа G тогда и только тогда изоморфна шрейеровому произведению $[U; H : (\sigma; q)]$, когда $U \cong Ker\pi$, $H \cong G^\pi$ для некоторой полуретракции π группы G. Здесь G^π – так называемая π-мутация группы G (см. [2]) – группа, определяется на множестве $Im\pi$ операцией $x *_\pi y = (x * y)\pi$. При этом

$$(x; y)q = x * y * \overline{(x * y)\pi},$$

$$u\sigma_x = ui_{\bar{x}}$$

для всех $u \in Ker\pi$, $x, y \in G^\pi$.

2. Функционалы на группах.

2.1. Пусть $(G, *, \theta_G = \theta)$ – группа, X – множество, $Map(X; G) := G^X$ – группа всех отображений множества X в группу G (п.1.1). Элементы группы G^X будем называть X-последовательностями над G. Функционалами на группе G, (X-функционалами на G, G^X-функционалами) будем называть отображения

$$f : G^X \to G : \sigma \mapsto \sigma f.$$

Множество $(X; G)\Phi$ всех G^X-функционалов является, понятно, группой относительно операции суммирования отображений (см. п.1.1).

2.2. Если $f \in (X; G)\Phi$ – некоторый G^X-функционал, то отображение

$$A_f : G^X \times G^X \to G : (\sigma_1; \sigma_2) \mapsto (\sigma_1; \sigma_2)A_f = (\sigma_1 * \sigma_2)f * \overline{\sigma_2 f} * \overline{\sigma_1 f}$$

назовем аддитивным дефектом этого функционала. Рассматривая выражения $(\sigma * \bar{\sigma})f$, $(\sigma_1 * \sigma_2)(f_1 * f_2)$, $((\sigma_1 * \sigma_2) * \sigma_3)f$ и $(\sigma_1 * (\sigma_2 * \sigma_3))f$, $(\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in G^X, f, f_1, f_2 \in (X; G)\Phi)$, непосредственной проверкой устанавливаем для аддитивных дефектов тождества симметрирования

$$(\bar{\sigma}; \sigma)A_f = \vartheta_G^X * \overline{\sigma f} * \overline{\bar{\sigma} f},$$
$$(\sigma; \bar{\sigma})A_f = \vartheta_G^X * \overline{\bar{\sigma} f} * \overline{\sigma f},$$
$$\sigma \in G^X, f \in (X; G)\Phi,$$

тождество редукции

$$(\sigma_1; \sigma_2)A_{f_1 * f_2} = (\sigma_1; \sigma_2)A_{f_1} * (\sigma_1; \sigma_2)A_{f_2} i_{\overline{\sigma_2 f_1}} * [\sigma_2 f_1; \sigma_1 f_2] i_{\overline{\sigma_1 f_1}}$$
$$\sigma_1, \sigma_2 \in G^X, f_1, f_2 \in (X; G)\Phi$$

и факторное тождество

$$(\sigma_1 * \sigma_2; \sigma_3)A_f * (\sigma_1; \sigma_2)A_f = (\sigma_1 * \sigma_2; \sigma_3)A_f * (\sigma_2; \sigma_3)A_f i_{\overline{\sigma_1 f}},$$
$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in G^X, f \in (X; G)\Phi.$$

2.3. Если $\sigma \in G^X$, $\tau \in \mathcal{NT}(G)$ (см. 1.1), то, очевидно, $\sigma\tau \in G^X$, причем

$$\sigma(\tau_1 \tau_2) = (\sigma\tau_1)\tau_2,$$
$$\sigma(\tau_1 * \tau_2) = \sigma\tau_1 * \sigma\tau_2$$
$$\sigma \in G^X, \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{NT}(G).$$

Аналогично, $f\tau \in (X; G)\Phi$ и

$$f(\tau_1 \tau_2) = (f\tau_1)\tau_2,$$
$$f(\tau_1 * \tau_2) = f\tau_1 * f\tau_2$$

для всех $f \in (X; G)\Phi$, $\tau, \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{NT}(G)$. В этих условиях приобретает смысл отношение коммутирования G^X-функционалов с элементами симметрического почтикольца $\mathcal{NT}(G)$. А именно: $\tau f = f\tau$, $(f \in (X; G)\Phi, \tau \in \mathcal{NT}(G))$ тогда и только тогда, когда

$$(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f) = \sigma(f\tau) = (\sigma f)\tau$$

для всех $\sigma \in G^X$. Будем говорить, в частности, что G^X-функционал f нормален, если $\varphi f = f\varphi$ для всех $\varphi \in EndG \subseteq \mathcal{NT}(G)$. Множество $(X;G)E$ всех нормальных G^X-фукционалов является подгруппой группы $(X;G)\Phi$ всех G^X-функционалов. При этом, если $f \in (X;G)E$, $\varphi \in EndG$ то

$$(\sigma_1;\sigma_2)A_f\varphi = (\sigma_1\varphi;\sigma_2\varphi)A_f,\ \sigma_1,\sigma_2 \in G^X.$$

Важным следствием этого свойства аддитивных дефектов нормальных функционалов есть инвариантность подгруппы $A_f(G)$, порождаемой в G множеством ImA_f. Отсюда, в частности, следует, что композиция нормального функционала $f \in (X;G)\Phi$ и произвольной $A_f(G)$-полуретракции ([2]) τ всегда будет гомоморфизмом группы G^X в τ-мутацию ([2]) G^τ группы G.

Подгруппу $A_f(G)$ назовем подгруппой редукции нормального G^X-функционала f (или f-редуктивной подгруппой группы G).

2.4. Пусть $f \in (X;G)E$ – нормальный G^X-функционал. Подгруппу $(X;G)f$ группы G, порождаемую множеством Imf, назовем f-подгруппой этой группы. Подгруппа редукции G^X-функционала при этом оказывается нормальной в $(X;G)f$. В этой ситуации положим

$$A_f^X = \{(u;\sigma)|u \in A_f(G), \sigma \in G^X\},$$
$$D_f^X = \{(u;\sigma) \in A_f^X(G), |\bar{u} = \sigma f\}.$$

Множество $A_f^X(G)$ оказывается при этом группой – шрейеровым произведением $[A_f(G) \times G^X : (\alpha;q)]$, где

$$\alpha_\sigma = i_{\overline{\sigma f}}, \sigma \in G^X,$$
$$(\sigma_1;\sigma_2)q = \overline{(\sigma_1;\sigma_2)A_f}, \sigma_1,\sigma_2 \in G^X,$$

$D_f^X(G)$ – нормальная подгруппа группы $A_f^X(G)$, а f-подгруппа $(X;G)f$ получает следующее описание:

Предложение. Для любого $f \in (X;G)E$ имеет место изоморфизм

$$(X;G)f \cong A_f^X(G)/D_f^X(G). \tag{1}$$

Доказательство. Очевидно, что образ $Im\eta$ отображения

$$\eta : G^{X;f} \to G : (u;\sigma) \mapsto (u;\sigma)\eta = u * \sigma f$$

будет подгруппой f-подгруппы $(X;G)f$. Вместе с тем, если $v \in (X;G)f$, то

$$v = (\sigma_1 f)' * (\sigma_2 f)' * \ldots * (\sigma_k f)',$$

где $(\sigma_i f)' \in \{\sigma_i f; \overline{\sigma_i f}\}$, $1 \le i \le k$. Индукцией по k нетрудно показать, что

$$v = w * \rho f, w \in A_f(G), \rho \in G^X$$

для всех $v \in (X;G)f$, т.е. отображение η является сюрьекцией на $(X;G)f$. Кроме того, для произвольных елементов $g_1 = (u_1;\sigma_1)$, $g_2 = (u_2;\sigma_2)$ группы $A_f^X(G)$ получаем

$$(g_1 * g_2)\eta = u_1 * u_2 i_{\overline{\sigma_1 f}} * \overline{(\sigma_1;\sigma_2)A_f} * (\sigma_1 * \sigma_2)f =$$
$$= u_1 * \sigma_1 f * u_2 * \sigma_2 f = g_1\eta * g_2\eta.$$

При этом для $g = (u; \sigma) \in A_f^X(G)$ равенство

$$g\eta = u * \sigma f = \theta_G$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\bar{u} = \sigma f$.

Предложение доказано.

Группу $A_f^X(G)$ назовем шрейеровой параметризацией f-подгруппы $(X;G)f$ группы G, а подгруппу $D_f^X(G)$ - ядром этой параметризации. Изоморфизм (1) будем называть шрейеровой координатизацией f-подгруппы $(X;G)f$.

3. Вербальные G^X-функционалы.

3.1. Если $F = F(X)$ – свободная группа в алфавите X, $x_1, ..., x_n \in X$, то запись $w = (x_1, ..., x_n)w \in F$ будет означать, что в запись группового слова w входят лишь элементы из множества $\{x_1, ..., x_n\}$. Если при этом

$$w = (x_1, ..., x_n)w = \tilde{x}_{i_1} * \tilde{x}_{i_2} * ... * \tilde{x}_{i_m},$$

$\sigma \in G^X$, то

$$(x_1\sigma; ...; x_n\sigma)w = (x_{i_1}\sigma)' * (x_{i_2}\sigma)' * ... * (x_{i_m}\sigma) \in G,$$

где $(x_{i_j}\sigma)' = x_{i_j}\sigma$, если $\tilde{x}_{i_j} = x_{i_j}$ и $(x_{i_j}\sigma)' = \overline{x_{i_j}\sigma}$, если $\tilde{x}_{i_j} = \bar{x}_{i_j}$. В этих обозначениях для каждого $w = (x_1, ..., x_n)w \in F$ естественно определяется отображение

$$\mu_w : G^X \to G : \sigma \mapsto \sigma\mu_w = (x_1\sigma; ...; x_n\sigma)w,$$

которое мы будем называть вербальным w-функционалом (V_w-функционалом) на группе G. Множество

$$(X;G)V = \{\mu_w | w \in F\}$$

является подгруппой группы $(X;G)E$ всех нормальных G^X-функционалов. Элементы группы $(X;G)V$ будем называть вербальными функционалами (V-функционалами) на группе G.

3.2. Пусть $\mu_w \in (X;G)V$. Тогда

$$(\sigma_1; \sigma_2)A_{\mu_w} = [\sigma_1; \sigma_2]_w i_{\overline{\sigma_1\mu_w}},$$

где

$$[\sigma_1; \sigma_2]_w = \overline{\sigma_1\mu_w} * (\sigma_1 * \sigma_2)\mu_w * \overline{\sigma_2\mu_w} \in A_{\mu_w}(G).$$

елемент $[\sigma_1; \sigma_2]_w$ назовем вербальным w-коммутатором X-последовательностей (п.2.1) $\sigma_1, \sigma_2 \in G^X$. Подгруппу

$$A_{\mu_w}(G) := [G]_w$$

редукции (п.2.3) вербального w-функционала μ_w назовем вербальным w-коммутантом (V_w-коммутантом) группы G.

Напомним (см., [2]), что подгруппа H группы G называется вербальной, если она порождена множеством

$$W_G = \{(x_1\sigma, ..., x_n\sigma)w | w \in W \subseteq F(X), \sigma \in G^X\}.$$

Если $W = \{w\}$, $w \in F$, будем говорить о моногенной вербальной подгруппе $(G)w$. Очевидно, что для всех $w \in F$ имеем

$$(G)w = (X; G)\mu_w.$$

Предложение п.2.4 позволяет, таким образом, получить шрейерову координатизацию любой моногенной вербальной подгруппы данной группы. Шрейеровы параметризации моногенных вербальных подгрупп являются при этом расширениями соответствующих вербальных коммутантов с помощью группы X-последовательностей (п.2.1).

Пользуясь легко проверяемым тождеством редукции п.2.2 для вербальных коммутаторов –

$$[\sigma_1; \sigma_2]_{w_1 * w_2} = [\sigma_1; \sigma_2]_{w_1} i_{\sigma_1 \mu_{w_2}} * [\overline{\sigma_1 \mu_{w_2}}; \sigma_2 \mu_{w_1}] * [\sigma_1; \sigma_2]_{w_2} i_{\overline{\sigma_2 \mu_{w_1}}}, \tag{2}$$

$$\sigma_1, \sigma_2 \in G^X, w_1, w_2 \in F,$$

индукцией по длине элементов $w \in F$ устанавливаем следущее основное свойство вербальных коммутантов:

ЛЕММА. При любом $w \in F$ V_w-коммутант любой группы $[G]_w$ содержится в коммутанте ее моногенной вербальной подгруппы $(G)w$:

$$[G]_w \leq [(G)w].$$

3.3. Лемма п.3.2 позволяет существенно дополнить результаты работы [3] о расположении моногенных вербальных подгрупп их описанием в терминах шрейеровых произведений (п.1.4). Напомним ([3]), что если d наибольший общий делитель x-логарифмов (п.1.2, $x \in X$) слова $w \in F(X)$, то

$$(G)^d \subseteq (G)w \subseteq [G](G)^d \tag{3}$$

где $(G)^d = \{g\nu_d | g \in G\}$ (обозначение ν_d см. п.1.1). Факторное тождество (2) для V_w-коммутаторов и лемма п.3.2. позволяют в (3) заменить коммутант $[G]$ группы G ее V_w-коммутантом:

$$(G)^d \subseteq (G)w \subseteq [G]_w (G)^d,$$

а поскольку $[G]_w \leq (G)w$, то, окончательно,

$$(G)w = [G]_w (G)^d.$$

Подмножество $(G)^d$ не будет, однако, в общем случае подгруппой группы G. Чтобы придать последнему соотношению структурный характер, выберем некоторую $[G]_w$-полуретракцию τ группы G (п.1.3) и положим

$$(G)^w := \{g\nu_d\tau | g \in G\},$$

$$g_1\nu_d\tau *_w g_2\nu_d\tau := (g_1 * g_2)\nu_d\tau. \tag{4}$$

Корректность определения операции $*_w$ позволит установить

ЛЕММА. В любой группе G для любого $w \in F$ условие

$$(g_1 * g_2)\nu_d * \overline{g_2\nu_d} * \overline{g_1\nu_d} \in [G]_w$$

выполняется для всех $g_1, g_2 \in G$.

Доказательство. Пусть $w = (x_1, ..., x_n)w \in F(x)$ – произвольное групповое слово, d-наибольший общий делитель x_i-логарифмов $l_i = l_i(w)$ слова w $(1 \leq i \leq n)$. Пусть, далее, $l_i = m_i d$, $1 \leq i \leq n$. Т.к. числа $m_1, ..., m_n$ взаимно просты, то

$$m_1k_1 + m_2k_2 + ... + m_nk_n = 1$$

при некоторых целых $k_1, k_2, ..., k_n$. Для каждого $g \in G$ выберем $\sigma_g \in G^X$ так, чтобы

$$x_i\sigma_g = g\nu_{k_i}, 1 \leq i \leq n.$$

Тогда $\sigma_g\mu_w = g\nu_d$ для всех $g \in G$ и

$$(g_1 * g_2)\nu_d * \overline{g_2\nu_d} * \overline{g_1\nu_d} = (\sigma_{g_1} * \sigma_{g_2})\mu_w * \overline{\sigma_{g_2}\mu_w} * \overline{\sigma_{g_1}\mu_w} =$$

$$= [\sigma_{g_1}; \sigma_{g_2}]_w i_{\overline{\sigma_{g_1}\mu_w}} \in [G]_w$$

при любых $g_1, g_2 \in G$.

Лемма доказана.

3.4. Воспользуемся леммой п.3.3 для доказательства корректности операции (4).

Если

$$g_1\nu_d\tau = h_1\nu_d\tau,\ g_2\nu_d\tau = h_2\nu_d\tau, \tag{5}$$

то

$$g_1\nu_d\tau *_w g_2\nu_d\tau = (g_1 * g_2)\nu_d\tau = (< g_1; g_2 > *g_1\nu_d * g_2\nu_d)\tau,$$

где

$$< g_1; g_2 >= (g_1 * g_2)\nu_d * \overline{g_2\nu_d} * \overline{g_1\nu_d}.$$

Т.к. по лемме п.3.3 имеем $< g_1; g_2 > \tau = \theta$, то используя (5) получаем

$$g_1\nu_d\tau *_w g_2\nu_d\tau = (g_1\nu_d\tau * g_2\nu_d\tau)\tau = (h_1\nu_d\tau * h_2\nu_d\tau)\tau =$$

$$= (h_1\nu_d * h_2\nu_d)\tau = (< \overline{h_1; h_2} > *(h_1 * h_2)\nu_d)\tau =$$

$$= (< \overline{h_1; h_2} > *(h_1 * h_2)\nu_d\tau)\tau = (h_1 * h_2)\nu_d\tau.$$

Таким образом, операция $*_w$ определена корректно.

Нетрудно теперь убедиться непосредственно, что множество $(G)^w$ является группой относительно операции (4). Группу $(G)^w$ назовем бернсайдовой производной вербальной группы $(G)w$.

3.5. Из результатов пп 3.2-3.4 и из наличия устанавливаемого прямыми вычислениями гомоморфизма

$$\varphi : (G)w \rightarrow (G)^w : g = (g * \overline{g\nu_d}) * g\nu_d \mapsto g\varphi = g\nu_d\tau$$

непосредственно следует

Теорема. *Любая многогенная вербальная подгруппа произвольной группы является шрейеровым произведением своих вербального коммутанта и бернсайдовой производной.*

4. Группы Бэра и их вербальные подгруппы.

Факторизуя группы по их вербальным коммутантам, естественно приходим к понятию, обобщающему понятие n-абелевой группы, введенному в работе Бэра [4]: группу G назовем группой Бэра с ключом $w \in F(X)$ (или V_w-абелевой группой), если ее вербальный w-коммутант тривиален. Очевидно, что группа G тогда и только тогда будет V_w-абелевой, когда G^X-функционал μ_w является гомоморфизмом. Когда $w = x\nu_n$, V_w – абелева группа – это ни что иное, как n-абелева группа Бэра из [4]. Такие группы мы будем называть группами Бэра со степенным ключом. Группы Бэра со степенным ключом изучались довольно интенсивно (см., например,[5,6]). Для групп Бэра с произвольным ключом естественно возникает вопрос о строении их моногенных вербальных подгрупп, т.к. описание п.3.5 в этом случае утрачивает силу. Этот вопрос и является основным в настоящем разделе работы.

Отметим, что для дальнейшего без ограничения общности можно использовать групповые слова $w \in F(X)$ в конечном алфавите $X = \{x_1, ..., x_n\}$.

4.1. Следуя обозначениям п.1.2, положим

$$\pi_i = \pi_{\{x_i\}}, \pi'_i = \pi_{X \setminus \{x_i\}}, 1 \leq i \leq n.$$

Идемпотентные эндоморфизмы π_i, π'_i группы F назовем каноническими проекторами этой группы.

Пусть $(G, *, \theta_G = \theta)$ – произвольная группа для всех $1 \leq i$, $j \leq n$, $\sigma \in G^X$ положим $x_i(\sigma\Delta_j) = x_i\sigma$, если $i = j$ и $x_i(\sigma\Delta_j) = \theta$, если $i \neq j$. Преобразования

$$\Delta_i : G^X \to G^X : \sigma \mapsto \sigma\Delta_i, 1 \leq i \leq n$$

оказываются при этом идемпотентными эндоморфизмами группы G^X, удовлетворяющими условиям:

$$\Delta_i * ... * \Delta_n = \iota_{G^X},$$

$$\Delta_i * \Delta_j = \Delta_j * \Delta_i, 1 \leq i, j \leq n,$$

$$\Delta_i\Delta_j = \Delta_j\Delta_i = \vartheta_{G^X}, 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Эндоморфизмы Δ_i и $\Delta'_i = \iota_{G^X} * \overline{\Delta_i}$, $1 \leq i \leq n$ будем называть каноническими проекторами группы G^X.

Непосредственной проверкой устанавливаются следующие тождества сопряженности канонических проекторов:

$$\sigma\Delta_i\mu_w = \sigma\mu_{w\pi_i},$$

$$\sigma\Delta'_i\mu_w = \sigma\mu_{w\pi'_i},$$

$$\sigma \in G^X, w \in F(X),$$

$$1 \leq i \leq n.$$

В обозначениях пп. 1.1–1.3 будем, кроме того, иметь

$$w\pi_i = x_i\nu_{l_i(w)},$$

$$w\tau_X = x_1\nu_{l_1(w)} * ... * x_n\nu_{l_n(w)}$$

для всех $w \in F(X)$.

В технике канонических проекторов получаем следующий критерий для групп Бэра:

Предложение. Группа G тогда и только тогда будет V_w-абелевой, когда каждый G^X-функционал $\mu_{w\pi_i}$ $(1 \le i \le n)$ является гомоморфизмом и

$$[\sigma\mu_{w\pi_i}; \eta\mu_{w\pi_j}] = \theta \tag{6}$$

для всех $\sigma, \eta \in G^X$, $1 \le i \ne jn$.

Доказательство. Необходимость указанных в формулировке свойств G^X-функционала μ_w для V_w-абелевости группы G следует из гомоморфности G^X-функционала μ_w. В то же время их непосредственное применение к выражению

$$[\sigma_1; \sigma_2]_w = \overline{\sigma_1\mu_w} * (\sigma_1 * \sigma_2)\mu_w * \overline{\sigma_2\mu_w}$$

дает

$$[\sigma_1; \sigma_2]_w = \overline{\sigma_1\mu_{w\pi_n}} * ... * \overline{\sigma_1\mu_{w\pi_1}} * (\sigma_1 * \sigma_2)\mu_{w\pi_1} * ... * (\sigma_1 * \sigma_2)\mu_{w\pi_n} * \overline{\sigma_2\mu_{w\pi_n}} * ... * \overline{\sigma_2\mu_{w\pi_1}} =$$
$$= \overline{\sigma_1\mu_{w\pi_n}} * ... * \overline{\sigma_2\mu_{w\pi_1}} * \sigma_1\mu_{w\pi_1} * \sigma_2\mu_{w\pi_1} * ... * \sigma_1\mu_{w\pi_n} * \sigma_2\mu_{w\pi_n}\overline{\sigma_2\mu_{w\pi_n}} * ... * \overline{\sigma_2\mu_{w\pi_1}}.$$

Еще раз применяя тождество (6), получаем

$$[\sigma_1; \sigma_2]_w = \theta.$$

Предложение доказано.

4.2. Будем говорить, что группа G является центральным произведением своих нормальных подгрупп $U_1, ..., U_n$, если

$$G = U_1 * ...U_m,$$

а подгруппы U_i $(1 \le i \le m)$ попарно поэлементно перестановочны, т.е. для всех $1 \le i \ne j \le m$, любые элементы $a \in U_i$, $b \in U_j$ коммутируют.

Несложно заметить, что любое центральное произведение $G = U_1 * ... * U_m$ является гомоморфным образом прямого произведения $U_1 \times ... \times U_n$, причем соответствующий гомоморфизм инъективен на каждой из прямых компонент. Обратно, если гомоморфизм прямого произведения $U_1 \times ... \times U_m$ инъективен на каждой из подгрупп U_i $(1 \le i \le m)$, то его образ – центральное произведение образов подгрупп U_i. Ядро гомоморфизма, о котором идет речь – такая подгруппа D центра группы $U_1 \times ... \times U_m$, что $D \cap U_i = \{\theta\}$ при любом $1 \le i \le m$. В самом деле, если φ – такой гомоморфизм и

$$(u_1; ...; u_m)\varphi = \theta,$$

то

$$((\bar{a}; \bar{u}_2; ...; \bar{u}_m) * (u_1; u_2; ...; u_m) * (a; u_2; ...; u_m) * (\bar{u}_1; \bar{u}_2; ...; \bar{u}_m))\varphi =$$
$$= (\bar{a} * u_1 * a * \bar{u}_1; \theta; ...; \theta)\varphi = \theta,$$

а это в силу инъективности φ на U_1 означает, что

$$\bar{a} * u_1 * a\bar{u}_1 = \theta$$

т.е. u_1 – элемент центра группы U_1. Аналогично для остальных компонент элемента $(u_1; ...; u_m) \in Ker\varphi$.

4.3. Моногенная вербальная подгруппа $(G)_w$ V_w-абелевой группы G описывается в терминах центрального произведения (которое, отметим, является обобщением понятия прямого произведения с объединенной подгруппой из [7]).

Пусть G – абелева группа. Тогда в силу предложения п.4.1. G^X-функционалы $\mu_{w\pi_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ будут гомоморфизмами группы G^X в группу G. Подгруппы $Im\mu_{w\pi_i}$ назовем главными w-компонентами группы G. Имеет место

Теорема. *Вербальная подгруппа* $(G)_w$ V_w*-абелевой группы* G *является центральным произведением главных* w*-компонент.*

Доказательство. Утверждение, сформулированное в теореме следует из того, что гомоморфизм μ_w является композицией гомоморфизма группы G^X в прямое произведение $Im\mu_{w\pi_1} \times ... \times Im\mu_{w\pi_n}$ и гомоморфизма

$$Im\mu_{w\pi_1} \times ... \times Im\mu_{w\pi_n} \to G : (u_1; ...; u_n) \mapsto u_1 * ... * u_n.$$

Литература

[1] О.В.Мельников, В.Н.Ремесленников и др. *Общая алгебра*, Т.1 // М:Наука, 1990, 592 с.

[2] В.М.Усенко, *Напўвретракцўї моноїдўв* // Труды ИПММ НАН Украины, 5 (2000), С. 155–164.

[3] O.Grün, *Beiträge zur Gruppen theorie*, VI // Math. Nachr., 16 (1957), P. 271–280.

[4] R.Baer, *Factorization of n-soluble and n-nilpotent groups,* Proc. Amer. MAth. Soc., 4 (1953), P. 15–26.

[5] Г.А.Карасев, *Факторизация некоторых классов групп,* Сиб. матем. журн., 3 (1962), С. 378–385.

[6] Л.А.Калужнин, *Строение n-абелевых групп,* Матем. заметки, 2 (1967), С. 455–464.

[7] H.W.Kuhn, *Subgroup theorems for groups presented by generators and relations,* Ann. of Math., 56 (1952), P.22–46.

Луганский государственный
педагогический университет
имени Тараса Шевченко

Поступило 20.03.2001