Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 20D10

Формации с единственной максимальной p-композиционной подформацией

И.В.Близнец

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

Символом $C^p(G)$ обозначается пересечение всех централизаторов всех главных p-факторов H/K группы G (($C^p(G) = G$, если группа G таковых главных факторов не имеет). Будем использовать следующую терминологию из [2].

Пусть p — произвольное простое число. Всякая функция вида $f : \{p, p'\} \mapsto$ {формации групп} называется p-композиционным спутником. Для произвольнрого p-композиционного спутника f символом $CF_p(G)$ обозначается класс групп $\{G \mid G/O_p(G) \in f(p')$ и $G/C^p(G) \in f(p)$, если $p \in \pi(G)\}$. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_p(f)$, то говорят, что она p-композиционна, а f — p-композиционный спутник этой формации.

Пересечение всех p-композиционных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначается через $c_p \operatorname{form}(\mathfrak{X})$ и называется p-композиционной формацией, порожденной $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то формация $c_p \operatorname{form}(\mathfrak{X})$ называется однопорожденной p-композиционной формацией.

В теории формаций особую роль играют неприводимые формации различных типов. В частности, c_p-неприводимые формации — это такие p-композиционные формации $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} \neq \operatorname{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{X}_i)$, где $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ — набор всех собственных p-композиционных подформаций из $\mathfrak{F}$.

Если p-композиционные формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ таковы, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, и не существует такой p-композиционной формации $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ называется максимальной p-композиционной подформацией в $\mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Пусть G — монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом P. Тогда если P — не является p-группой, то формация $\mathfrak{F} = c_p \operatorname{form}(G)$ — c_p-неприводима, и ее максимальная p-композиционная подформация $\mathfrak{M}$ имеет такой внутренний p-композиционный спутник m, что*

$$m(a) = \begin{cases} \operatorname{form}(G/C^p(G)), & \text{если } a = p \in \pi(G), \\ \varnothing, & \text{если } a = p \notin \pi(G), \\ \operatorname{form}(G/P), & \text{если } a = p'. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть P — неабелева группа. И пусть f — минимальный p-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда ввиду леммы 5 [4],

$$f(a) = \begin{cases} \operatorname{form}(G/C^p(G)), & \text{если } a = p \in \pi(G), \\ \varnothing, & \text{если } a = p \notin \pi(G), \\ \operatorname{form}(G/O_p(G)), & \text{если } a = p'. \end{cases}$$

Рассмотрим формацию $\mathfrak{M} = CF_p(m)$, где m — такой p-композиционный спутник, что

$$m(a) = \begin{cases} \operatorname{form}(G/C^p(G)), & \text{если } a = p \in \pi(G), \\ \varnothing, & \text{если } a = p \notin \pi(G), \\ \operatorname{form}(G/P), & \text{если } a = p'. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{M}$ — максимальная p-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная собственная p-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$ и h — ее минимальный p-композиционный спутник. Тогда ввиду леммы 6 [4], $h \leq f$. Пусть $a \in \{p, p'\}$ и $h(a) \subset f(a)$. Тогда если $a = p$, то $m(a) = f(a)$. Значит, $h(a) \subseteq m(a)$. Пусть $a = p'$. Тогда по лемме 2.1.5 [3], $m(a) = \mathrm{form}(G/P)$ — единственная максимальная подформация формации $f(\mathrm{a}) = f(p')$. Значит, $h(a) \subseteq m(a)$. Итак, для всех $a \in \{p, p'\}$ имеет место $h(a) \subseteq m(a)$. Поэтому, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$.

Покажем, что $\mathfrak{M}$ — собственная p-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$. Прежде заметим, из описания спутника m следует, что $m \leq f$, т.е. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Тогда

$$\mathrm{form}(G) = f(p') \subseteq m(p') = \mathrm{form}(G/P),$$

что противоречит лемме 2.1.5 [3]. Итак, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ — c_p-неприводима, и $\mathfrak{M}$ — ее единственная максимальная p-композиционная подформация.

Покажем теперь, что m — внутренний спутник формации $\mathfrak{M}$. Так как $P \nsubseteq O_p(G)$, то $P \subseteq C^p(G)$. Следовательно, $G/C^p(G) \in \mathrm{form}(G/P)$. Значит, $(G/C^p(G))/O_p(G/^p(G)) \in m(p')$. Так как $G/C^p(G) \in m(p)$, то

$$(G/C^p(G))/C^p(G/C^p(G)) \in \mathrm{form}(G/C^p(G)) = m(p).$$

Значит, $G/C^p(G) \in \mathfrak{M}$ и поэтому $m(p) \subseteq \mathfrak{M}$. Легко видеть, что $C^p(G)/P = C^p(G/P)$, и поэтому

$$(G/P)/C^p(G/P) = (G/P)/(C^p(G)/P) \simeq G/C^p(G) \in \mathrm{form}(G/C^p(G)) = m(p).$$

Кроме того, очевидно, $(G/P)/O_p(G/P) \in m(p')$. Следовательно, $G/P \in \mathfrak{M}$, и поэтому $m(p') \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, m — внутренний спутник формации $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа группы G, H — монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом Q, причем $(|P|, |Q|) = 1$. Тогда формация $\mathfrak{F} = c_p\,\mathrm{form}(G)$ — c_p-неприводима и ее максимальная p-композиционная подформация $\mathfrak{M}$ имеет такой внутренний p-композиционный спутник m, что*

$$m(a) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/P), & \text{если } a = p \in \pi(G), \\ \varnothing, & \text{если } a = p \notin \pi(G), \\ \mathrm{form}(G/O_p(G)), & \text{если } a = p'. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть f — минимальный p-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Поскольку, $F_p(G) = 1$, то по лемме 5 [4]

$$f(a) = \begin{cases} \mathrm{form}(G), & \text{если } a = p \in \pi(G), \\ \varnothing, & \text{если } a = p \notin \pi(G), \\ \mathrm{form}((G/P)/O_p(G/P)), & \text{если } a = p'. \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольная собственная p-композиционная подформация формации $\mathfrak{F}$ и h — минимальный p-композиционный спутник формации $\mathfrak{H}$.

Ввиду леммы 6 [4], $h \leq f$. Пусть $a = p \in \pi(G)$. Допустим, что $h(a) = f(a)$. Тогда

$$G \in \mathrm{form}(G) = f(a) = h(a) \subseteq \mathfrak{H}.$$

И поэтому $\mathfrak{F} = c_p \operatorname{form}(G) \subseteq \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что $h(a) \subset f(a)$. Тогда, поскольку по лемме 2.1.5 [3] $\operatorname{form}(G/P)$ — единственная максимальная подформация формации $f(a) = \operatorname{form}(G)$, то $h(a) \subseteq m(a)$. Во всех остальных случаях $m(a) = f(a)$. Поэтому $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$. Из описания спутника m мы имеем $m \leq f$, т.е. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$, то $f \leq m$. Значит,

$$\operatorname{form}(G) = f(p) \subseteq m(p) = \operatorname{form}(G/P),$$

где $p \in \pi(G)$, что противоречит лемме 2.1.5 [3]. Итак, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ — c_p-неприводимая формация, и $\mathfrak{M}$ — ее единственная максимальная p-композиционная подформация.

Покажем, что m — внутренний p-композиционный спутник формации $\mathfrak{M}$. Так как $P \nsubseteq O_p(G)$, то $P \subseteq C^p(G)$. Следовательно, $G/C^p(G) \in \operatorname{form}(G/P)$. Значит, $(G/C^p(G))/O_p(G/^p(G)) \in m(p')$. Так как $G/C^p(G) \in m(p)$, то

$$(G/C^p(G))/C^p(G/C^p(G)) \in \operatorname{form}(G/C^p(G)) = m(p).$$

Значит, $G/C^p(G) \in \mathfrak{M}$, и поэтому $m(p) \subseteq \mathfrak{M}$. Легко видеть, что $C^p(G)/P = C^p(G/P)$, и поэтому

$$(G/P)/C^p(G/P) = (G/P)/(C^p(G)/P) \simeq G/C^p(G) \in \operatorname{form}(G/C^p(G)) = m(p).$$

Кроме того, очевидно, $(G/P)/O_p(G/P) \in m(p')$. Следовательно, $G/P \in \mathfrak{M}$, и поэтому $m(p') \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, m — внутренний спутник формации $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Abstract. The p-composition formations of finite groups with an unique maximal p-composition subformation are studing.

Литература

[1] K.Doerk and T.Hawkes. *Finite soluble groups*, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1992.

[2] Л.А.Шеметков, А.Н.Скиба, *Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп*, Укр. матем. журн. 52, № 6(2000). С.783–797.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 18.05.2001