Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 20N05, 20N15

О дистрибутивности решетки τ-классов Шунка конечных n-арных групп

М.И.Ефремова

Напомним [1], что система $< X, () >$ с одной n-арной операцией $(\ )$ называется n-арной группой, если эта операция ассоциативна и в X разрешимо каждое из уравнений

$$(a_1 \ldots a_{i-1} x a_{i+1} \ldots a_n),$$

где i пробегает $1, 2, \ldots, n$. Все рассматриваемые ниже n-арные группы конечны.

Пусть со всякой n-арной группой G сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Мы говорим, следуя [2, 3], что τ — подгрупповой m-функтор, если для любой n-арной группы G система $\tau(G) \setminus \{G\}$ либо пуста, либо содержит лишь максимальные в G подгруппы, и выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой n-арной группы G;

2) для любых n-арных групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ и для любого эпиморфизма $\varphi : A \mapsto B$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$, $B^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Следуя [4], мы говорим, что класс n-арных групп $\mathfrak{F}$ является τ-классом Шунка, если $\mathfrak{F}$ — гомоморф n-арных групп , т.е. всякий гомоморфный образ любой группы из $\mathfrak{F}$ снова принадлежит $\mathfrak{F}$, и классу $\mathfrak{F}$ принадлежит всякая такая n-арная группа G, что $G/M_G \in \mathfrak{F}$ верно для всех $M \in \tau(G) \setminus \{G\}$. По определению, всякому τ-классу Шунка $\mathfrak{F}$ принадлежит всякая такая n-арная группа G, что $\tau(G) = \{G\}$.

Нетрудно видеть, что если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольное множество τ-классов Шунка, то $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ также является τ-классом Шунка. Пусть $\mathfrak{L}_n^{\tau}$ — множество всех τ-классов Шунка n-арных групп. На этом множестве введем частичный порядок $\leq$, полагая $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$. Относительно этого порядка множество $\mathfrak{L}_n^{\tau}$ является полной решеткой, и τ-класс Шунка, состоящий из всех n-арных групп, является в нем наибольшим элементом (см. теорему 3 на с.149 из [6]). В данной работе мы покажем, расширяя теорему 3.5.10 из [5] и следствие 1.2.8 из [2], что решетка $\mathfrak{L}_n^{\tau}$ дистрибутивна.

Всякое отображение множества всех классов n-арных групп в себя называется операцией на классах n-арных групп. Мы будем обозначать операции на классах n-арных групп прямыми большими латинскими буквами. Результат операции U, примененной к классу $\mathfrak{X}$, обозначается через $U\mathfrak{X}$. Если U_1 и U_2 — некоторые операции на классах n-арных групп, то через $U_1 U_2 \mathfrak{X}$ мы обозначим класс $U_1(U_2\mathfrak{X})$. В дальнейшем операции на классах n-арных групп мы будем называть коротко операторами. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M}$ — произвольные классы n-арных групп. Напомним, что оператор C называется:

1) оператором расширения, если $\mathfrak{X} \subseteq C\mathfrak{X}$;

2) идемпотентным оператором, если $C\mathfrak{X} = C(C\mathfrak{X})$;

3) монотонным оператором, если выполняется следующее условие: если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$, то $C\mathfrak{X} \subseteq C\mathfrak{M}$.

Оператор C называется оператором замыкания, если он является одновременно монотонным, идемпотентным и оператором расширения.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный класс n-арных групп. В следующем предложении $H\mathfrak{X}$ обозначает класс всех гомоморфиных образов всех n-арных групп из $\mathfrak{X}$. Легко видеть, что H — оператор замыкания. Введем еще один оператор на классах n-арных групп. Через $P_{\tau}\mathfrak{X}$ обозначим класс всех таких n-арных групп G, что $G/M_G \in \mathfrak{X}$ для любой $M \in \tau(G) \setminus \{G\}$.

В дальнейшем мы будем использовать ряд понятий теории универсальных алгебр, которые можно найти в [7]. Следуя [7], мы обозначаем через M_G произведение всех таких конгруэнций π n-арной группы G, что $\pi M = M$.

Предложение 1. 1) Оператор P_τ монотонен, является идемпотентным, но не обязательно является оператором расширения;

2) $P_\tau = HP_\tau$ и $H \leq P_\tau H$ (т.е. $H\mathfrak{X} \subseteq P_\tau H\mathfrak{X}$ для любого класса $\mathfrak{X}$);

3) оператор $P_\tau H$ является оператором замыкания.

Доказательство. Докажем 2). Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный класс n-арных групп. Поскольку H – оператор расширения, то $P_\tau\mathfrak{X} \subseteq HP_\tau\mathfrak{X}$. Если $G \in HP_\tau\mathfrak{X}$, то $G \cong L/\pi$ для некоторой n-арной группы $L \in P_\tau\mathfrak{X}$ и для некоторой конгруэнции π на G. Пусть M – некоторая подгруппа n-арной группы G, принадлежащая $\tau(G) \setminus \{G\}$. Следовательно, при изоморфизме $G \cong L/\pi$ подгруппа M переходит в T/π, где T/π подгруппа в L/π, принадлежащая $\tau(L/\pi)\setminus\{L/\pi\}$. Значит, T — подгруппа в L, принадлежащая $\tau(L)\setminus\{L\}$. Ввиду леммы 3.2.21 [5],

$$G/M_G \cong (L/\pi)/(T/\pi)_{L/\pi} \cong (L/\pi)/(T_L/\pi) \cong L/T_L.$$

Так как $L \in P_\tau\mathfrak{X}$, то $L/T_L \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $G/M_G \in \mathfrak{X}$ для любой подгруппы M n-арной группы G, принадлежащей $\tau(G) \setminus \{G\}$. Значит, $G \in P_\tau\mathfrak{X}$ и $H(P_\tau\mathfrak{X}) \subseteq P_\tau\mathfrak{X}$. Отсюда следует, что $HP_\tau = P_\tau$.

Докажем, что $H \leq P_\tau H$. Пусть $G \in H\mathfrak{X}$. Тогда $H(G) \subseteq H\mathfrak{X}$, и для любой факторгруппы G/M_G n-арной группы G такой, что подгруппа M принадлежит $\tau(G) \setminus \{G\}$, имеет место $G/M_G \in H\mathfrak{X}$. Отсюда следует, что $G \in P_\tau H\mathfrak{X}$. Поэтому, $H \leq P_\tau H$.

Для доказательства 1) достаточно показать, что $P_\tau^2 = P_\tau$. Действительно, оператор P_τ является монотонным и также понятно, что P_τ не обязательно является оператором расширения. На основании 2) мы имеем

$$P_\tau\mathfrak{X} = H(P_\tau\mathfrak{X}) \subseteq P_\tau H(P_\tau\mathfrak{X}) = P_\tau(HP_\tau)\mathfrak{X} = P_\tau^2\mathfrak{X}.$$

С другой стороны, если $G \in P_\tau^2\mathfrak{X}$, то $G/M_G \in P_\tau\mathfrak{X}$ для любой подгруппы M n-арной группы G, $M \in \tau(G)\setminus\{G\}$. Так как $G/M_G \in P_\tau\mathfrak{X}$, то для факторгруппы M/M_G группы G/M_G, принадлежащей $\tau(G/M_G) \setminus \{G/M_G\}$ выполняется

$$(G/M_G)/(M/M_G)_{(G/M_G)} \in \mathfrak{X}.$$

И по лемме 3.2.21 [5], имеем

$$(G/M_G)/(M/M_G)_{(G/M_G)} \cong (G/M_G)/(M_G/M_G) \cong G/M_G.$$

Отсюда следует, что $G/M_G \in \mathfrak{X}$ для любой подгруппы M n-арной группы G, принадлежащей $\tau(G) \setminus \{G\}$. Таким образом, $G \in P_\tau\mathfrak{X}$. Значит, $P_\tau^2\mathfrak{X} \subseteq P_\tau\mathfrak{X}$. Следовательно, $P_\tau^2 = P_\tau$. Это показывает, что P_τ — идемпотентный оператор.

Для доказательства 3) заметим, что по 2) мы имеем $\mathfrak{X} \subseteq H\mathfrak{X} \subseteq P_\tau H\mathfrak{X}$, и, следовательно, $P_\tau H$ — оператор расширения; более того, $P_\tau H$ является, очевидно, монотонным оператором. Наконец, чтобы показать, что этот оператор является идемпотентным, мы, используя части 1) и 2), видим, что

$$(P_\tau H)^2 = P_\tau(HP_\tau)H = P_\tau^2 H = P_\tau H.$$

Предложение доказано.

Если $\mathfrak{X}$ — произвольный класс n-арных групп, то пересечение всех τ-классов Шунка, содержащих $\mathfrak{X}$, снова является τ-классом Шунка. Мы называем его τ-классом Шунка, порожденным $\mathfrak{X}$, и обозначаем через $\mathrm{Schunck}_\tau\,\mathfrak{X}$.

Предложение 2. Для любого класса n-арных групп $\mathfrak{X}$ справедливо равенство

$$\mathrm{Schunck}_\tau\,\mathfrak{X} = P_\tau H\mathfrak{X}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = P_\tau H\mathfrak{X}$. Согласно предложению 1, $\mathfrak{X} \subseteq P_\tau H\mathfrak{X}$. Покажем, что $P_\tau H\mathfrak{X}$ — τ-класс Шунка. Согласно предложению 1,

$$H(\mathfrak{F}) = H(P_\tau H\mathfrak{X}) = (HP_\tau)(H\mathfrak{X}) = P_\tau(H\mathfrak{X}) = P_\tau H\mathfrak{X} = \mathfrak{F}.$$

Значит, $\mathfrak{F}$ — гомоморф. Пусть теперь G — такая n-арная группа, у которой $G/M_G \in \mathfrak{F}$ для любой подгруппы M, принадлежащей $\tau(G) \setminus \{G\}$. Тогда

$$G \in P_\tau(P_\tau H\mathfrak{X}) = (P_\tau P_\tau)(H\mathfrak{X}) = P_\tau(H\mathfrak{X}) = \mathfrak{F}.$$

Итак, $\mathfrak{F}$ — τ-класс Шунка, содержащий класс $\mathfrak{X}$. Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — τ-класс Шунка, порожденный $\mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$.Так как $\mathfrak{M}$ — гомоморф, то $H\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$. А так как класс $\mathfrak{M}$ — τ-класс Шунка, то $\mathfrak{F} = P_\tau H\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$, и поэтому $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} = P_\tau H\mathfrak{X}$, т.е.

$$\mathrm{Schunck}_\tau\,\mathfrak{X} = P_\tau H\mathfrak{X}.$$

Предложение доказано.

n-Арную группу G называем τ-примитивной, если она имеет такую подгруппу $M \in \tau(G) \setminus \{G\}$, что $M_G = \Delta$ — нулевая конгруэнция на G. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X}$ — произвольные τ-классы Шунка. Тогда положим

$$\mathfrak{M} \vee_\tau \mathfrak{X} = \mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{X}), \mathfrak{M} \wedge_\tau \mathfrak{X} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{X}.$$

Теорема 1. Решетка L_n^τ дистрибутивна.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$(\mathfrak{X}_1 \vee_\tau \mathfrak{X}_2) \wedge_\tau \mathfrak{X}_3 \subseteq (\mathfrak{X}_1 \wedge_\tau \mathfrak{X}_3) \vee_\tau (\mathfrak{X}_2 \wedge_\tau \mathfrak{X}_3)$$

(1)

для любых τ-классов Шунка n-арных групп $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$.

Пусть

$$A \in (\mathfrak{X}_1 \vee_\tau \mathfrak{X}_2) \wedge_\tau \mathfrak{X}_3 = (\mathfrak{X}_1 \vee_\tau \mathfrak{X}_2) \cap \mathfrak{X}_3.$$

Ввиду предложения 2, $\mathfrak{X}_1 \vee_\tau \mathfrak{X}_2 = P_\tau H(\mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2)$. Следовательно, $A \in \mathfrak{X}_3$ и $A \in P_\tau H(\mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2)$. Отсюда имеем, что все τ-примитивные гомоморфные образы n-арной группы A принадлежат $H(\mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2)$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — набор всех неизоморфных τ-примитивных гомоморфных образов n-арной группы A. Тогда найдутся n-арные группы $X_1, X_2, \ldots, X_k$ из $\mathfrak{X}_1$ и $F_{k+1}, \ldots, F_m$ из $\mathfrak{X}_2$ такие, что

$$X_1/\pi_1 \cong A_1, \ldots, X_k/\pi_k \cong A_k,$$

$$F_{k+1}/\Psi_{k+1} \cong A_{k+1}, \ldots, F_m/\Psi_m \cong A_m,$$

где π_i — конгруэнция на X_i, Ψ_j — конгруэнция на F_j.

Так как $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ — гомоморфы, то $A_1 \in \mathfrak{X}_1, \dots, A_k \in \mathfrak{X}_1, A_{k+1} \in \mathfrak{X}_2, \dots, A_m \in \mathfrak{X}_2$. Кроме того, $A_i \in \mathfrak{X}_3$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$. Поэтому

$$A_1 \in \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_3, \dots, A_k \in \mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_3,$$

$$A_{k+1} \in \mathfrak{X}_2 \cap \mathfrak{X}_3, \dots, A_m \in \mathfrak{X}_2 \cap \mathfrak{X}_3.$$

Но тогда $A_i \in (\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_3) \vee_\tau (\mathfrak{X}_2 \cap \mathfrak{X}_3)$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$, т.е. все τ-примитивные гомоморфные образы n-арной группы A принадлежат классу Шунка $(\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_3) \vee_\tau (\mathfrak{X}_2 \cap \mathfrak{X}_3)$. Следовательно, $A \in (\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_3) \vee_\tau (\mathfrak{X}_2 \cap \mathfrak{X}_3)$. Таким образом, мы имеем (1). Теорема доказана.

Следствие. Для любой конечной n-арной группы G τ-класс Шунка, порожденный G, содержит лишь конечное множество τ-подклассов Шунка.

Литература

[1] С.А.Русаков, *Алгебраические n-арные системы*, Мн.: Навука і тэхніка, 1992.

[2] М.В.Селькин, *Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп*, Мн,: Беларуская навука, 1997.

[3] А.Н.Скиба, *Алгебра формаций*, Мн,: Беларуская навука, 1997.

[4] М.В.Селькин, А.Н.Скиба, *Об одном способе построения дистрибутивных p-алгебр*, Гашюцова теория классов конечных групп и других алгебраических систем, Тезисы докл. Гомель, 2000, с.54–56.

[5] А.Ф. Аль-Дабабсех, *Модулярные решетки классов конечных n-арных групп*, Гомель: БелГУТ, 2000.

[6] Г.Биркгофф, *Теория решеток*, М.: Наука, 1984.

[7] А.И.Мальцев, *Алгебраические системы*, М.: Наука, 1970.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 27.03.2001