Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 20D10

Формации с максимальной n-кратно p-насыщенной нильпотентной подформацией

И.П.Шабалина

Все рассматриваемые нами группы конечны. Класс групп называется формацией, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Напомним, что подгрупповой функтор Скибы τ [1] сопоставляет каждой группе G такую систему её подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \longrightarrow B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

В дальнейшем τ обозначает некоторый подгрупповой функтор Скибы. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется p-насыщенной [2], если для любой группы G с $G/(\Phi(G) \cap O_p(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Напомним некоторые определения и обозначения работы [3].

Всякую функцию вида

$$f : \{p, p'\} \to \{\text{формации групп}\}$$

называют [3] p-локальным спутником. Символ G_{pd} служит для обозначения наибольшей нормальной подгруппы в G, у которой каждый композиционный фактор H/K — pd-группа (т.е. $p \mid |H/K|$). Полагают $G_{pd} = 1$, если G не имеет факторов с таким свойством. Пусть f — p-локальный спутник. Тогда $LF_p(f) = (G \mid G/G_{pd} \in f(p')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$, если $p \mid |G|)$. Всякую формацию считают 0-кратно p-насыщенной. При $n \geq 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно p-насыщенной , если $\mathfrak{F} = LF_p(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно p-насыщенными формациями. Формация, состоящая лишь из нильпотентных групп, называется нильпотентной. Напомним, что если τ-замкнутая n-кратно p-насыщенная формация ненильпотентна, но нильпотентна каждая её собственная τ-замкнутая n-кратно p-насыщенная подформация, то $\mathfrak{F}$ называется минимальной τ-замкнутой n-кратно p-насыщенной ненильпотентной формацией. Максимальной τ-замкнутой n-кратно p-насыщенной подформацией формации $\mathfrak{F}$ называется всякая такая её собственная τ-замкнутая n-кратно p-насыщенная подформация $\mathfrak{M}$, что для любой τ-замкнутой n-кратно p-насыщенной подформации $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$ с условием $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ выполняется $\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{M}, \mathfrak{F}\}$. В частности, максимальной p-насыщенной подформацией формации $\mathfrak{F}$ называется всякая такая её собственная p-насыщенная формация $\mathfrak{M}$, что для любой p-насыщенной подформации $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$ с условием $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ выполняется $\mathfrak{H} \in \{\mathfrak{M}, \mathfrak{F}\}$.

Легко видеть, что множество $l_{\tau}^{p_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно p-насыщенных формаций является полной решёткой. Если $\Omega = \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2\}$ — произвольное двухэлементное подмножество этой решётки, то символом $\mathfrak{X}_1 \vee_{\tau}^{p_n} \mathfrak{X}_2$ обозначается верхняя грань для Ω в $l_{\tau}^{p_n}$.

Следующая теорема описывает τ-замкнутые n-кратно p-насыщенные ненильпотентные формации с максимальной n-кратно p-насыщенной нильпотентной подформацией.

Теорема 1. *В том и только в том случае τ-замкнутая n-кратно p-насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет максимальную τ-замкнутую n-кратно p-насыщенную нильпотентную подформацию, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{\tau}^{p_n} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — n-кратно* *p-насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная τ-замкнутая n-кратно p-насыщенная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая n-кратно p-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_{\tau}^{p_n} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$;

2) всякая τ-замкнутая n-кратно p-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид

$$\mathfrak{H} \vee_{\tau}^{p_n} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N}).$$

Отметим, что в основе доказательства данной теоремы лежит следующий принципиальный факт, расширяющий соответствующий результат работы [4].

Предложение 1. Решётка всех τ-замкнутых n-кратно p-насыщенных формаций $l_{\tau}^{p_n}$ является алгебраической и модулярной.

В случае, когда τ — тривиальный подгрупповой функтор (т.е. $\tau(G) = \{G\}$ для любой группы G), символ τ опускают.

Следствие 1. *В том и только в том случае n-кратно p-насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет максимальную n-кратно p-насыщенную нильпотентную подформацию, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{p_n} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — n-кратно p-насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная n-кратно p-насыщенная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая n-кратно p-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в

$$\mathfrak{M} \vee^{p_n} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N});$$

2) всякая n-кратно p-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид

$$\mathfrak{H} \vee^{p_n} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N}).$$

Следуя [1], мы обозначаем через s и s_n соответственно такие подгрупповые функторы, что для любой группы G $s(G)$ — множество всех подгрупп в G, а $s_n(G)$ — множество всех нормальных подгрупп в G.

Следствие 2. *В том и только в том случае s-замкнутая n-кратно p-насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет максимальную s-замкнутую n-кратно p-насыщенную нильпотентную подформацию, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{s}^{p_n} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — n-кратно p-насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная s-замкнутая n-кратно p-насыщенная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая n-кратно p-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в

$$\mathfrak{M} \vee_{s}^{p_n} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N});$$

2) всякая s-замкнутая n-кратно p-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид

$$\mathfrak{H} \vee_{s}^{p_n} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N}).$$

Следствие 3. *В том и только в том случае s_n-замкнутая n-кратно p-насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет максимальную s_n-замкнутую n-кратно p-насыщенную нильпотентную подформацию, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{s_n}^{p_n} \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — n-кратно p-насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная s_n-замкнутая n-кратно p-насыщенная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая n-кратно p-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в

$$\mathfrak{M} \vee_{s_n}^{p_n} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N});$$

2) всякая s_n-замкнутая n-кратно p-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид

$$\mathfrak{H} \vee_{s_n}^{p_n} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N}).$$

При $n = 1$ из следствий 1-3 получаем соответственно следующие результаты.

Следствие 4. (Джарадин Джехад [5]). *В том и только в том случае p-насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет максимальную p-насыщенную нильпотентную подформацию, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^p \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — p-насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная p-насыщенная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая p-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в

$$\mathfrak{M} \vee^p (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N});$$

2) всякая p-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид

$$\mathfrak{H} \vee^p (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N}).$$

Следствие 5. *В том и только в том случае s-замкнутая p-насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет максимальную s-замкнутую p-насыщенную нильпотентную подформацию, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_s^p \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — p-насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная s-замкнутая p-насыщенная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая p-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в

$$\mathfrak{M} \vee_s^p (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N});$$

2) всякая s-замкнутая p-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид

$$\mathfrak{H} \vee_s^p (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N}).$$

Следствие 6. *В том и только в том случае s_n-замкнутая p-насыщенная ненильпотентная формация $\mathfrak{F}$ имеет максимальную s_n-замкнутую p-насыщенную нильпотентную подформацию, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_{s_n}^p \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — p-насыщенная нильпотентная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная s_n-замкнутая p-насыщенная ненильпотентная формация, при этом:*

1) всякая p-насыщенная нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в

$$\mathfrak{M} \vee^p_{s_n} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N});$$

2) всякая s_n-замкнутая p-насыщенная ненильпотентная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид

$$\mathfrak{H} \vee^p_{s_n} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N}).$$

Abstract. In this paper we study the τ-closed n-multiply p-saturated non-nilpotent formations with maximal n-multiply p-saturated nilpotent subformation.

Литература

[1] А.Н.Скиба, *Алгебра формаций,* Мн.: Беларуская навука, 1997, 240 с.

[2] Л.А.Шеметков, *О произведении формаций,* Докл. АН БССР, 1984, Т. 28, №2, С. 101–103.

[3] L.A.Shemetkov, A.N.Skiba, *Multiply ω–local formations and Fitting classes of finite groups,* Sibirian Advances in Mathematics, 10:2 (2000), 1-30 (Russian).

[4] Ballester-Bolinches A., L.A.Shemetkov, *On lattices of p-local formations of finite groups,* Math. Nachr. 1997. V. 186. P. 57–65.

[5] Джарадин Джехад. *Классификация p-локальных формаций длины ≤ 3,* Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Гомель, 1996.

Белорусский государственный университет транспорта

Поступило 29.03.2001