Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 3(6), Вопросы алгебры — 17, 2001
2000 Mathematics Subject Classification: 20D10

О конечных группах с $\mathfrak{F}$-нормальными подгруппами

Д.В.Короткевич

В работе [1] введено понятие $\mathfrak{F}$-нормальной подгрупы и доказано, что конечная группа G принадлежит локальной формации $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда все ее силовские подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$ и являются либо нормальными, либо $\mathfrak{F}$-нормальными. В настоящей работе мы докажем теоремы, еще более подчеркивающие сходство локальной формации с классом нильпотентных групп. Мы будем рассматривать только конечные группы. Определение и обозначения см. в [2,3].

Определение 1 ([1]). Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$ — локальная формация. Пусть A — подгруппа группы G. Обозначим через $Z^f(A,G)$ наибольшую нормальную подгруппу из G такую, что $A_G \subseteq Z^f(A,G) \subseteq A^G$, и все G-главные факторы между A_G и $Z^f(A,G)$ f-центральны в G. Положим $N_G^f(A) = Z^f(A,G)N_G(A)$. Подгруппа A называется $\mathfrak{F}$-нормальной в G, если $N_G(A) \neq G$, но $N_G^f(A) = G$. Если $\mathfrak{F} = LF(F)$, где F — максимальный внутренний локальный спутник формации $\mathfrak{F}$, то вместо f-нормальности мы говорим о $\mathfrak{F}$-нормальности и пишем $Z^{\mathfrak{F}}(A,G)$ и $N_G^{\mathfrak{F}}(G)$. Нам понадобится следующая лемма, доказанная в [1].

Лемма 1. *Пусть $A \subseteq G$ и $N \lhd G$. Если $N \subsetneq A$, то $N_{G/N}^f(A/N) = N_G^f(A/N)/N$. Если A f-нормальна в G, то AN и AN/N либо нормальны, либо f-нормальны соответственно в G и G/N.*

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F} = LF(F)$, M — ненормальная максимальная подгруппа группы G. Подгруппа M $\mathfrak{F}$-нормальна в G тогда и только тогда, когда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$ (т.е. для максимальной подгруппы M наше определение $\mathfrak{F}$-нормальности совпадает со стандартным).*

Доказательство. Пусть H/M_G — главный фактор, добавляемый подгруппой M. Если M $\mathfrak{F}$-нормальна в смысле определения 1, то H/M_G $\mathfrak{F}$-централен. Но тогда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$ (см.[2]). Обратно, если H/M_G $\mathfrak{F}$-централен, то $N_G^{\mathfrak{F}}(M) = G$. □

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — локальные формации, причем $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \emptyset$. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}$ — класс групп вида $M \times H$, где $M \in \mathfrak{M}$, $H \in \mathfrak{H}$. Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая максимальная подгруппа из G либо нормальна, либо $\mathfrak{M}$-нормальна, либо $\mathfrak{H}$-нормальна.*

Доказательство. Пусть G — $\pi(\mathfrak{F})$-группа. Предположим, что $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G = G^{\mathfrak{M}} \times G^{\mathfrak{H}}$. Так как $G^{\mathfrak{M}}$ и $G^{\mathfrak{H}}$ — холловы нормальные подгруппы, то любая максимальная подгруппа содержит либо $G^{\mathfrak{M}}$, либо $G^{\mathfrak{H}}$. Теперь результат следует из леммы 2.

Пусть теперь любая максимальная подгруппа из G либо нормальна, либо $\mathfrak{M}$-нормальна, либо $\mathfrak{H}$-нормальна. Так как $\mathfrak{F}$ насыщена, то можно считать, что $G^{\mathfrak{F}}$ — единственная нефраттиниева минимальная нормальная подгруппа группы G. Если G нильпотентна, то ясно, что из $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ мы имеем $G \in \mathfrak{F}$. Пусть G ненильпотентна и V — любая ее ненормальная максимальная подгруппа. Если M $\mathfrak{M}$-нормальна, то $G^{\mathfrak{M}} \subseteq M$ и ввиду $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{M}}$ имеем, по лемме 2, что M $\mathfrak{F}$-нормальна. Аналогично, если M $\mathfrak{H}$-нормальна, то она и $\mathfrak{F}$-нормальна. Теперь, по лемме 2, получаем, что $G \in \mathfrak{F}$. □

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F} = LF(F)$ и C — некоторая подгруппа группы $G = A \times B$, где A и B — холловы подгруппы. Тогда $N^{\mathfrak{F}}_G(C) = N^{\mathfrak{F}}_A(A \cap C)N^{\mathfrak{F}}_B(B \cap C)$.*

Доказательство осуществляется проверкой, используя тот факт, что $C = (C \cap A)(C \cap B)$ и $N_G(C) = N_A(A \cap C)N_B(B \cap C)$. □

Лемма 5. *Для локальной формации $\mathfrak{F}$ следующие условия эквивалентны:*

1) $G \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и для любой собственной подгруппы C из G имеет место $C \neq N^{\mathfrak{F}}_G(C)$.

Доказательство. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $C^G = Z^{\mathfrak{F}}(C, G)$ и потому ясно, что $C \neq N^{\mathfrak{F}}_G(C)$. Пусть дано 2). Тогда ввиду $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ каждая максимальная подгруппа будет $\mathfrak{F}$-нормальной в G, а значит, $G \in \mathfrak{F}$. □

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) $G \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{N}_{\pi'}$, где π' — множество всех простых чисел, не входящих в $\pi(\mathfrak{F})$;

2) для любой собственной подгруппы C из G имеет место $C \neq N^{\mathfrak{F}}_G(C)$;

3) каждая максимальная подгруппа из G либо нормальна, либо $\mathfrak{F}$-нормальна в G;

4) каждая силовская подгруппа из G либо нормальна, либо $\mathfrak{F}$-нормальна в G.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \times \mathfrak{N}_{\pi'}$ и C — собственная подгруппа из G. Тогда $G = A \times B$, где A и B — холловы подгруппы, принадлежащие соответственно $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}_{\pi'}$. По лемме 4, $N^{\mathfrak{F}}_G(C) = N^{\mathfrak{F}}_A(C \cap A)N^{\mathfrak{F}}_B(C \cap B)$. Если $C \cap A$ отлична от A, то по лемме 5 имеем $C \cap A \subset N^{\mathfrak{F}}_A(C \cap A)$. Если $C \cap B$ отлична от B, то ввиду нильпотентности B получаем, что $C \cap B$ строго содержится в $N^{\mathfrak{F}}_B(C \cap B)$. Таким образом, из 1) следует 2). По лемме 2, из 2) следует 3). По лемме 3, из 3) следует 1).

Пусть дано 4). Поскольку $\mathfrak{F}$ содержится в $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \times \mathfrak{N}_{\pi'}$, то каждая силовская подгруппа из G будет либо нормальной, либо $\mathfrak{M}$-нормальной. Но тогда , по теореме из [1], группа G принадлежит $\mathfrak{M}$. Значит, из 4) следует 1).

Пусть дано 1), т.е. $G \in \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \times \mathfrak{N}_{\pi'}$. Пусть P — силовская подгруппа группы G. Имеем $G = A \times B$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{N}_{\pi'}$. Ясно, что P содержится либо в A, либо в B. По лемме 4, $N^{\mathfrak{F}}_G(P) = N^{\mathfrak{F}}_A(P \cap A)N^{\mathfrak{F}}_B(P \cap B)$. Предположим, что P содержится в A. Тогда $N^{\mathfrak{F}}_A(P) = N^{\mathfrak{F}}_A(P \cap A) = A$ и мы получаем $N^{\mathfrak{F}}_G(P) = G$. Пусть P содержится в B. Тогда P — силовская подгруппа в нильпотентной группе B. Таким образом, P нормальна в B, а значит, ввиду $G = A \times B$, подгруппа P нормальна в G. Значит, из 1) следует 4). □

Определение 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Группу G назовем $\mathfrak{F}$-дедекиндовой, если любая подгруппа из G либо нормальна, либо $\mathfrak{F}$-нормальна в G.

Напомним, что группа называется дедекиндовой, если в ней все подгруппы нормальны.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда каждая $\mathfrak{F}$-дедекиндова группа является прямым произведением $\mathfrak{F}$-дедекиндовой $\mathfrak{F}$-группы и дедекиндовой π'-группы.*

Доказательство. Пусть группа G является $\mathfrak{F}$-дедекиндовой. По теореме 1, $G = A \times B$, где A и B — холловы подгруппы, принадлежащие соответственно $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}_{\pi'}$. Пусть C — любая подгруппа из G. По лемме 4, $N_G^{\mathfrak{F}}(C) = N_A^{\mathfrak{F}}(C \cap A) N_B^{\mathfrak{F}}(C \cap B)$. По условию, $G = N_G^{\mathfrak{F}}(C)$. Значит, $N_A^{\mathfrak{F}}(C \cap A) = A$ и $N_B^{\mathfrak{F}}(C \cap B) = B$. Из первого равенства следует, что A является $\mathfrak{F}$-дедекиндовой. Так как B не имеет нетривиальных $\mathfrak{F}$-центральных главных факторов, из $N_B^{\mathfrak{F}}(C \cap B) = B$ следует $N_B(C \cap B) = B$, т.е. B дедекиндова. □

Abstract. The author uses the notion of $\mathfrak{F}$-normal subgroup introduced by him in a previous paper. A finite group G is called $\mathfrak{F}$-Dedekind if every subgroup of G is either normal or $\mathfrak{F}$-normal. It is proved that if $\mathfrak{F}$ is a saturated formation then every $\mathfrak{F}$-Dedekind finite group is a direct product of a $\mathfrak{F}$-Dedekind $\mathfrak{F}$-group and a Dedekind group.

Литература

[1] D.V.Korotkevich, *A new property of local formations of finite groups,* Proc. F.Scorina Gomel State Univ., №3 (16) (2000), 99–100.

[2] Л.А.Шеметков, *Формации конечных групп,* Москва, Наука, 1978.

[3] K.Doerk, T.Hawkes, *Finite soluble groups,* Berlin–New York, Walter de Gruyter, 1992.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 31.03.2001