

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАНЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ЦЕПЯМИ ДЛИНЫ ≤ 3

Д.П. Андреева, А.Н. Скиба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

FINITE GROUPS WITH GIVEN MAXIMAL CHAINS OF LENGTH ≤ 3

D.P. Andreeva, A.N. Skiba

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе получено описание конечной группы, у которой в каждой ее максимальной цепи длины три имеется собственная S -квазинормальная подгруппа, а также описание конечной группы, у которой все ее 3-максимальные подгруппы субнормальны (S -квазинормальны).

Ключевые слова: силовская подгруппа, группа Шмидта, n -максимальная подгруппа, нильпотентная группа, максимальная цепь длины n , разрешимая группа, S -квазинормальная подгруппа, субнормальная подгруппа.

A description of a finite group with the property that every its maximal chain of length 3 contains a proper S -quasinormal subgroup, and a description of a finite group with the property that every its 3-maximal subgroup is subnormal (S -quasinormal) are obtained.

Keywords: Sylow subgroup, Schmidt group, n -maximal subgroup, nilpotent group, maximal chain of length n , soluble group, S -quasinormal subgroup, subnormal subgroup.

Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы являются конечными. Символ G_p обозначает некоторую силовскую p -подгруппу группы G для некоторого простого числа p . Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой (или второй максимальной подгруппой) группы G , если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G . Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и т. д. Максимальной цепью длины n группы G называется всякая цепь вида

$$E_n < E_{n-1} < \dots < E_1 < E_0 = G,$$

где E_i является максимальной подгруппой в E_{i-1} , $i = 1, 2, \dots, n$.

Связь между n -максимальными подгруппами (где $n > 1$) группы G и структурой группы G исследовалась многими авторами. Но, пожалуй, наиболее ранние результаты в данном направлении были получены Редеем [1], описавшим неразрешимые группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами, и Хуппертом, установившим в работе [2] сверхразрешимость групп, в которых все вторые максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Хупперт доказал, что в случае, когда каждая третья максимальная подгруппа группы G является

нормальной в G , коммутант G' группы G нильпотентен и порядок каждого главного фактора группы G делится не более, чем на два (не обязательно различных) простых числа. Эти результаты получили свое дальнейшее развитие и в работе Л.Я. Полякова [3], который доказал, что группа является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми ее максимальными подгруппами. В работе [4] Агравалем была доказана сверхразрешимость группы при условии, что все ее 2-максимальные подгруппы S -квазинормальны (подгруппа H группы G называется S -квазинормальной в G , если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G). В более поздней работе [5] М. Асааду удалось усилить отмеченные выше результаты Хупперта, рассматривая лишь строго n -максимальные подгруппы для $n = 2, 3$. Заметим попутно, что в работе П. Флавелла [6] была найдена точная верхняя граница числа максимальных подгрупп группы, содержащих строго 2-максимальную подгруппу, и описаны группы, в которых эта граница достигается. Естественным развитием упомянутых выше результатов стала работа А. Манна [7], в которой автор анализировал строение групп, в которых каждая n -максимальная подгруппа субнормальна.

В последние годы получен ряд новых интересных результатов о вторых и третьих максимальных подгруппах. В недавней публикации [8] Ли Широнг получил классификацию

ненильпотентных групп, каждая 2-максимальная подгруппа которой является TI -подгруппой. В работе [9] Го Шуин и К.П. Шам доказали разрешимость групп, в которых все 2-максимальные подгруппы обладают свойством покрытия-изолирования. В работах [10]–[12] Го Веньбинем, Ли Баоджуном, А.Н. Скибой и К.П. Шагом были получены новые характеристики сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп. В работе [13] получено описание ненильпотентных групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами, а в работе [14] получено описание групп, в которых каждая максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами.

В связи с отмеченными выше результатами, Л.А. Шеметковым в 2005 году на Гомельском городском алгебраическом семинаре был поставлен следующий вопрос: что можно сказать о строении конечной группы G , если в каждой ее максимальной цепи длины n имеется собственная субнормальная в G подгруппа?

Понятно, что в нильпотентной группе все ее подгруппы субнормальны. Нетрудно также показать, что ненильпотентные группы, у которых в каждой максимальной цепи длины два имеется собственная субнормальная подгруппа, являются группами Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами (см. лемму 1.1). Решение задачи в случае $n = 3$ дает приведенная ниже теорема.

В дальнейшем p , q и r – простые делители порядка группы G ($p \neq q$), P , Q и R обозначают некоторые силовскую p -подгруппу, силовскую q -подгруппу и силовскую r -подгруппу группы G , соответственно.

Теорема А. В том и только в том случае в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная субнормальная в G подгруппа, когда G либо нильпотентна, либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, либо G является группой одного из следующих типов:

I. $G = P \rtimes Q$, где либо G – группа Шмидта с $|\Phi(P)| \leq p$ и $|Q : Q_G| = q$, либо выполняется одно из следующих условий:

(1) P является минимальной нормальной подгруппой в G и $|Q : Q_G| = q^2$;

(2) P является минимальной нормальной подгруппой в G , $|Q : Q_G| = q$ и любая максимальная подгруппа из Q , отличная от Q_G , является циклической;

(3) $G = G^{\text{nt}} \rtimes M$, где G^{nt} – минимальная нормальная подгруппа группы G , $M = M_p \rtimes Q$ – представитель единственного класса нильпотентных ненормальных максимальных подгрупп

группы G , $|M_p| = p$, $Q = \langle a \rangle$ – циклическая группа и $|Q : Q_G| = q$.

II. $G = P \rtimes (QR)$, где $P = G^{\text{nt}}$ является минимальной нормальной подгруппой в G , $|R| = r$, $Q = \langle a \rangle$ – циклическая группа, $|Q : Q_G| = q$ и либо R нормальна в G либо $|Q| = q$;

III. $G = P \rtimes Q = PA$, $|\Phi(P)| = p$, $A = \Phi(P) \rtimes Q$ – представитель единственного класса ненормальных максимальных подгрупп группы G , A – группа Шмидта и $|Q : Q_G| = q$;

IV. $\Phi(P) = 1$, G является подпрямым произведением ненормальных максимальных подгрупп A и B , где $A = A_p \rtimes Q$ – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, A_p – минимальная нормальная подгруппа в G и $|Q : Q_G| = q$; $B = B_p \rtimes Q$ и либо B – нильпотентная группа и $|B_p| = p$, $B_p \leq Z(G)$, либо $B \cong A$;

V. $G = P \rtimes (QR)$ и G имеет в точности три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются ненормальная холловская r' -подгруппа A , ненормальная холловская p' -подгруппа L и нормальная в G подгруппа M с $|G : M| = q$. Кроме того, выполняются следующие условия:

(i) A – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и $|Q : Q_G| = q$;

(ii) L либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, либо нильпотентной группой;

(iii) P является минимальной нормальной подгруппой в G , $|R| = r$ и либо R нормальна в G , либо $|Q| = q$.

Доказательство данной теоремы является очень сложным. В нашей работе мы рассмотрим некоторые приложения теоремы А, дающей описание групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная субнормальная подгруппа.

1 Предварительные результаты

Лемма 1.1 [15, теорема 2]. Пусть G – ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа;

(2) в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная S -квазинормальная в G подгруппа;

(3) в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная субнормальная в G подгруппа;

(4) G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

Лемма 1.2 [7, лемма 3]. Пусть $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G . В том и только в том случае каждая n -максимальная подгруппа группы G является субнормальной, когда каждая n -максимальная подгруппа группы G содержится в $F(G)$.

Лемма 1.3 [16, гл. VII, теорема 6.18]. Если G – группа Шмидта, то

(1) $G = P \rtimes \langle a \rangle$, где P и $\langle a \rangle$ – силовские p -подгруппа и q -подгруппа группы G соответственно;

(2) G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P \langle a^q \rangle$ и $P' \langle a \rangle$;

(3) $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы G , причем, если $|P/\Phi(P)| = p^\alpha$, то p^α сравнимо с единицей по модулю q ;

(4) если P абелева, то она элементарна.

Лемма 1.4 [17, теорема 1]. Пусть $A \leq G$. Если A S -квазинормальна в G , то A субнормальна в G .

Лемма 1.5 [7, теорема 6]. Пусть M – максимальная подгруппа группы G . Если L субнормальна в G и $L \subseteq M$, то $L \subseteq M_G$.

Лемма 1.6 [18, предложение B]. Пусть H – нильпотентная подгруппа группы G . Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) H S -квазинормальна в G ;

(2) каждая силовская подгруппа группы H S -квазинормальна в G .

Лемма 1.7 [18, лемма A]. Пусть $A \leq G$. Если A S -квазинормальна в G и A – p -группа, то $O^p(G) \subseteq N_G(A)$.

2 Основные результаты

Одним из приложений теоремы А является следующая теорема, описывающая группы у которых каждая 3-максимальная подгруппа субнормальна.

Теорема 2.1. В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа группы G является субнормальной, когда либо G нильпотентна, либо G – группа одного из следующих типов:

I. $G = P \rtimes Q$ – группа Шмидта, где либо $P' = 1$, либо $|P'| = p$;

II. G – бипримарная группа, не являющаяся группой Шмидта, одного из следующих видов:

(1) $G = P \rtimes Q$, где P – минимальная нормальная подгруппа группы G , Q – циклическая группа и $P \rtimes \Phi(Q)$ – группа Шмидта;

(2) $G = (P \rtimes Q_1) \times C_q$, где P – минимальная нормальная подгруппа группы G , $|C_q| = q$ и PQ_1 – группа Шмидта;

(3) $G = P \rtimes Q$, где P – минимальная нормальная подгруппа группы G , $Q = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = q$, $P \langle a \rangle$ и $P \langle b \rangle$ – группы Шмидта;

(4) $G = P \rtimes Q$, где $|P| = p$, $p > 2$ и Q изоморфна группе кватернионов порядка 8;

(5) $G = (P \rtimes Q_1)C_q$, где P – минимальная нормальная подгруппа группы G , $Q_1 = \langle a \rangle$, $C_q = \langle b \rangle$, $|Q_1C_q| = q^\beta$, $|a| = q^{\beta-1}$ ($\beta \in \mathbb{N}$), PQ_1 – группа Шмидта, $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$ и $[P, C_1] = 1$ для всякой подгруппы C_1 , изоморфной C_q ;

(6) $G = P \rtimes Q$, где $\Phi(P)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G , обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$;

(7) G – подпрямое произведение двух различных изоморфных групп Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;

(8) $G = (P_1 \times C_p) \rtimes Q$, где P_1 – минимальная нормальная p -подгруппа группы G , $|C_p| = p$, P_1Q – группа Шмидта, максимальная подгруппа из Q содержится в $Z(G)$ и $[C_p, Q] = 1$;

III. G – группа, порядок которой имеет в точности три простых делителя p, q, r и которая является группой одного из следующих видов:

(i) $G = (P \times R) \rtimes Q$, где P и R – минимальные нормальные подгруппы группы G , Q – циклическая группа и $F(G) = PR\Phi(Q)$;

(ii) $G = P \rtimes (R \times Q)$, где $|R| = r$, $|Q| = q$ и $P = F(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G .

Доказательство. Необходимость. Согласно условию, каждая 3-максимальная подгруппа группы G является субнормальной в G . Значит, в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная субнормальная в G подгруппа. Тогда G является группой одного из типов, описанных в теореме А. Кроме того, по лемме 1.1, каждая максимальная подгруппа группы G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

Будем предполагать, что G – ненильпотентная группа и $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma > 3$ для $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Предположим, что G является группой типа I в теореме А.

Если $G = P \rtimes Q$ является группой Шмидта, то G – группа типа I.

Предположим, что G не является группой Шмидта, P – минимальная нормальная подгруппа группы G и выполняется условие (1). Пусть Q – циклическая группа и Q_1 – максимальная подгруппа в Q . Тогда PQ_1 является максимальной подгруппой в G и поэтому PQ_1 либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Если PQ_1 является нильпотентной группой, то Q_1 нормальна в PQ_1 . С другой стороны, Q_1 нормальна в Q . Значит, Q_1 является нормальной подгруппой группы G и, следовательно, $Q_1 = Q_G$, т. е. $|Q : Q_G| = q$. Полученное противоречие показывает, что PQ_1 является группой Шмидта, т. е. G – группа типа II (1).

Предположим теперь, что Q – нециклическая группа. Пусть Q_1 и Q_2 – различные максимальные подгруппы из Q . Ввиду условия, каждая 3-максимальная подгруппа группы G субнормальна в G . А так как Q_G является 2-максимальной подгруппой в Q , то Q_1 и Q_2 несубнормальны в G и, кроме того, $Q_G \leq Q_1$ и $Q_G \leq Q_2$. Следовательно, $Q_G = Q_1 \cap Q_2$. Так как Q_1 и Q_2 несубнормальны в G , PQ_1 и PQ_2 являются группами Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. По основной теореме о конечных абелевых группах $Q = Q_1 \times Q_2$, где либо $|Q_1| = q$, либо $|Q_2| = q$. Значит, $Q_G = 1$ и поэтому $|Q_1| = |Q_2| = q$. Следовательно, G является группой типа II (3).

Пусть теперь выполняется условие (2). Очевидно, что в этом случае, PQ_G является нильпотентной группой. Пусть $L \neq Q_G$ – максимальная подгруппа из Q . Тогда L несубнормальна и циклическа. Значит, PL является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Если Q – абелева группа, то по основной теореме о конечных абелевых группах $Q = Q_G \times L$ и $|L| = q$. Значит, G – группа типа II (2).

Пусть теперь Q – неабелева группа и $|Q| = q^\beta$ ($\beta \in \mathbb{N}$). Если $q = 2$ и $\beta = 3$, то, ввиду [19, V, теорема 4.4], Q изоморфна либо группе кватернионов, либо диэдральной группе. В последнем случае $Q = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, где $|a| = 2^2$, $|b| = 2$, $a^b = a^{-1}$. Тогда Q имеет точно три максимальные подгруппы: $\langle a \rangle$, $\langle a^2 \rangle \langle b \rangle$ и $\langle a^2 \rangle \langle ab \rangle$ и

поэтому подгруппы вида $\langle a^2 \rangle$, $\langle b \rangle$ и $\langle ab \rangle$ являются 2-максимальными подгруппами в Q . Так как P – минимальная нормальная подгруппа в G , то Q является максимальной подгруппой в G . Тогда подгруппы $\langle a^2 \rangle$, $\langle b \rangle$ и $\langle ab \rangle$ являются 3-максимальными в группе G . В силу условия и леммы 1.2, каждая из этих подгрупп содержится в группе $F(G)$, что невозможно. Следовательно, Q изоморфна группе кватернионов порядка 8. Тогда в силу $q = 2$ и леммы 1.3 (3) (4) мы имеем $|P| = p$, и поэтому G является группой типа II (4).

Если теперь $q = 2$ и $\beta > 3$, либо q – нечетное простое, то, по [19, V, теорема 4.4], Q изоморфна одной из групп: $M_\beta(q)$, D_β , Q_β или S_β (см. [19, С. 190–191]). Если Q изоморфна одной из групп D_β , Q_β или S_β , то в силу [19, V, теорема 4.3] факторгруппа $Q/Z(Q)$ изоморфна группе $D_{\beta-1}$. В этом случае факторгруппа $Q/Z(Q)$ имеет точно две максимальные нециклические подгруппы. Следовательно, группа Q имеет по крайней мере две нециклические 2-максимальные подгруппы и поэтому в группе Q существует по крайней мере две нециклические максимальные подгруппы. Это означает, что в группе G существуют максимальные подгруппы M_1 и M_2 , которые содержат P и не являются группами Шмидта. Тогда M_1 и M_2 являются нильпотентными нормальными подгруппами в G и поэтому группа $G = M_1 M_2$ нильпотентна, противоречие. Следовательно, группа Q не может быть изоморфна одной из групп: D_β , Q_β или S_β .

Таким образом, группа Q изоморфна группе $M_\beta(q) = \langle a, b \mid a^{q^{\beta-1}} = b^q = 1, a^b = a^{1+q^{\beta-2}} \rangle$ (см. [19, С. 190]). В этом случае группа G имеет вид $G = (P \rtimes Q_1) \rtimes C_q$, где P – минимальная нормальная подгруппа в G , $Q_1 = \langle a \rangle$, $|a| = q^{\beta-1}$, $C_q = \langle b \rangle$, $|b| = q$, PQ_1 – группа Шмидта и $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$.

Пусть C – множество всех подгрупп группы G , изоморфных подгруппе C_q . Предположим, что для некоторой подгруппы C_1 из C выполняется $[P, C_1] \neq 1$. Это влечет, что подгруппа PC_1 является группой Шмидта. Тогда PC_1 является максимальной подгруппой в G и поэтому $|Q| = q^2$, что противоречит неабелевости Q . Таким образом, G является группой типа II (5).

Заметим, что если выполняется условие (3), то G является группой типа II (8).

Предположим теперь, что G является группой типа II в теореме А. Если R нормальна в G , то G является группой типа III (i). Если R ненормальна в G , то G – группа типа III (ii).

Очевидно, что если G является группой типа III в теореме А, то G – группа типа II (6).

Пусть теперь, G является группой типа IV в теореме А. Очевидно, если B – группа Шмидта, то G является группой типа II (7). Если же B – нильпотентная группа, то G является группой типа II (8).

Допустим, что G – группа типа V в теореме А. В этом случае группа G имеет 3-максимальную подгруппу P_1Q_G , где P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P . По условию, P_1Q_G является субнормальной подгруппой в G . Следовательно, P_1 нормальна в G , что противоречит минимальности P . Поэтому $P_1 = 1$. Следовательно, $|P| = p$.

Если R не является нормальной подгруппой в G , то $|Q| = q$. Тогда, $|G| = pqr$, что противоречит нашему исходному предположению о группе G . Если же R нормальна в G , то G является группой типа III (i).

Достаточность. Предположим, что G – группа одного из типов I–III теоремы. Покажем, что каждая 3-максимальная подгруппа из G является субнормальной. Ввиду леммы 1.2 для этого достаточно показать, что каждая 3-максимальная подгруппа группы G содержится в $F(G)$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что в каждом из случаев I–III теоремы это верно. Теорема доказана.

С помощью теоремы А докажем следующую теорему, дающую описание конечных групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная S -квазинормальная подгруппа.

Теорема 2.2. В том и только в том случае в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная S -квазинормальная в G подгруппа, когда G либо нильпотентна, либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, либо G является группой одного из следующих типов:

I. $G = P \rtimes Q$, где либо G – группа Шмидта с $|\Phi(P)| \leq p$ и $|Q:Q_G| = q$, либо выполняется одно из следующих условий:

(1) P является минимальной нормальной подгруппой в G и $|Q:Q_G| = q^2$;

(2) P является минимальной нормальной подгруппой в G , $|Q:Q_G| = q$ и любая максимальная подгруппа L из Q , отличная от Q_G , является циклической и $|L:L_G| = q$;

(3) $G = G^n \rtimes M$, где G^n – минимальная нормальная подгруппа группы G , $M = M_p \rtimes Q$ –

представитель единственного класса нильпотентных ненормальных максимальных подгрупп группы G , $|M_p| = p$, $Q = \langle a \rangle$ – циклическая группа и $|Q:Q_G| = q$.

II. $G = P \rtimes (QR)$, где $P = G^n$ является минимальной нормальной подгруппой в G , $|R| = r$, $Q = \langle a \rangle$ – циклическая группа, $|Q:Q_G| = q$ и либо R нормальна в G либо $|Q| = q$;

III. $G = P \rtimes Q = PA$, $|\Phi(P)| = p$, $A = \Phi(P) \rtimes Q$ – представитель единственного класса ненормальных максимальных подгрупп группы G , A – группа Шмидта и $|Q:Q_G| = q$;

IV. $\Phi(P) = 1$, G является подпрямым произведением ненормальных максимальных подгрупп A и B , где $A = A_p \rtimes Q$ – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, A_p – минимальная нормальная подгруппа в G и $|Q:Q_G| = q$; $B = B_p \rtimes Q$ и либо B – нильпотентная группа и $|B_p| = p$, $B_p \leq Z(G)$, либо $B = A$;

V. $G = P \rtimes (QR)$ и G имеет в точности три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются ненормальная холловская r' -подгруппа A , ненормальная холловская p' -подгруппа L и нормальная в G подгруппа M с $|G:M| = q$. Кроме того, выполняются следующие условия:

(i) A – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и $|Q:Q_G| = q$;

(ii) L либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, либо нильпотентной группой;

(iii) P является минимальной нормальной подгруппой в G , $|R| = r$ и либо R нормальна в G , либо $|Q| = q$.

Доказательство. Необходимость. Согласно лемме 1.4, в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная субнормальная в G подгруппа. Значит, G является группой одного из типов, описанных в теореме А.

Заметим также, что если G – группа типа I (2), то любая максимальная не S -квазинормальная в G подгруппа L из Q является циклической. Значит, если L_1 – максимальная подгруппа из L , то L_1 является S -квазинормальной подгруппой в G . А так как L_1 характеристична в L , то L_1 нормальна в Q . Кроме того, L_1 нормальна в PL_1 , так как, по лемме 1.4, L_1 субнормальна в G и, следовательно, субнормальна в PL_1 . Поэтому, по лемме 1.5, $L_1 = L_G$, что влечет $|L:L_G| = q$.

Достаточность. Прежде всего заметим, что в нильпотентной группе каждая подгруппа является S -квазинормальной. Предположим, что G – ненильпотентная группа.

Пусть G является группой типа I. Предположим вначале, что G – группа Шмидта и $\Phi(P)=1$. Тогда, по лемме 1.3 (2), G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы Q и PQ_G . Так как PQ_G является нормальной подгруппой группы G и максимальной подгруппой в Q является Q_G , то в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим, что G – группа Шмидта и $|\Phi(P)|=p$. Тогда, по лемме 1.3 (2), G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы $\Phi(P)Q$ и PQ_G . Очевидно, что PQ_G является нормальной подгруппой группы G . Кроме того, подгруппа Q является максимальной подгруппой в $\Phi(P)Q$, а нормальная в G подгруппа Q_G является максимальной в Q . Значит, и в этом случае, в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим теперь, что G не является группой Шмидта и P – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда Q является максимальной подгруппой группы G и Q ненормальна в G , так как G – ненильпотентная группа. Пусть $|Q:Q_G|=q^2$. Тогда PQ_G является 2-максимальной подгруппой группы и PQ_G нормальна в G . Кроме того, Q_G является 3-максимальной подгруппой группы G . Значит, в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа. Пусть теперь $|Q:Q_G|=q$ и любая максимальная подгруппа L из Q , отличная от Q_G , является циклической. Так как $|L:L_G|=q$, то в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Заметим, если же G является группой типа I (3), то, очевидно, в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Пусть теперь G – группа типа II. Очевидно, что любая максимальная подгруппа M группы G нормальна в G , если $P \leq M$. Значит, будем считать, что $P \not\leq M$. Кроме того, так как P является минимальной нормальной подгруппой группы G , то $M \cap P = 1$. Поэтому M – холловская p' -подгруппа группы G и $M = Q^x R^y$ для

некоторых x и $y \in G$. Не теряя общности, мы можем считать, что $M = QR$. Так как $|R|=r$ и Q – циклическая группа, то M имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы Q и RQ_G . Если R – нормальная подгруппа группы G , то RQ_G также является нормальной подгруппой группы G . Если же R не является нормальной подгруппой в G , то условие теоремы выполняется, так как Q_G является максимальной подгруппой в RQ_G . Кроме того, Q_G также является максимальной подгруппой в Q . Значит, если G является группой типа II, то в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим, что G является группой типа III. Так как A является представителем единственного класса ненормальных максимальных подгрупп группы G , то достаточно показать, что в каждой максимальной цепи длины два группы A имеется собственная субнормальная в G подгруппа. Так как A является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, то по лемме 1.3 (2), A имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы Q и $\Phi(P)Q_G$. Заметим, что так как $\Phi(P)$ является нормальной подгруппой в G , то $\Phi(P)Q_G$ – нормальная подгруппа группы G . Кроме того, по условию, Q_G – максимальная подгруппа в Q . Значит, в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Пусть теперь G – группа типа IV. Как и выше, можно показать, что в каждой максимальной цепи длины три группы G , проходящей через подгруппу A , имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Допустим, что B – нильпотентная группа. Из того, что $|B_p|=p$ вытекает, что Q является максимальной подгруппой в B . Так как подгруппа B максимальна в G и $B_p < N_p(B_p)$, то $N_G(B_p) = G$. Значит, подгруппа B_p , а вместе с ней и максимальная подгруппа $B_p Q_G$ из B нормальны в G . Следовательно, в каждой максимальной цепи длины три группы G , проходящей через B , имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим, что в G имеется ненормальная максимальная подгруппа M с $|G:M|=p^b$ для некоторого натурального числа b и $M \neq A^x$, $M \neq B^y$ для всех $x, y \in G$. Не теряя общности, мы можем считать, что $Q \leq M$. Так как P

нормальна в G , то $M = M_p \rtimes Q$. Заметим также, что M_p нормальна в G , так как P – абелева группа. Заметим, что так как $M \neq A^x$, то $M \cap A_p = 1$. Действительно, допустим, что имеет место обратное. Тогда $M_p \cap A_p \neq 1$ и $M_p \cap A_p$ – нормальная подгруппа в G , что влечет $M_p \cap A_p = A_p$, т. е. $A_p \subseteq M$. Тогда $A \subseteq M$ и поэтому $A = M$, противоречие. Значит, $M \cap A_p = 1$. Так как A – максимальная подгруппа в G и $G = AB$, то $A \neq B$. Кроме того, так как $A = A_p \rtimes Q$ и $B = B_p \rtimes Q$, то $B_p \not\subseteq A$. Значит, $G = B_p \rtimes A$. Тогда $P = B_p \times A_p$. А так как $|B_p| = p$, то $|P : A_p| = p$. Следовательно, из того, что $M \cap A_p = 1$, вытекает $|M_p| = p$. Заметим, что представителями двух классов максимальных подгрупп в M являются подгруппа Q и нормальная в G подгруппа $M_p Q_G$. Следовательно, в каждой максимальной цепи длины три группы G , проходящей через M , имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Допустим теперь, что B – группа Шмидта. Так как $B \simeq A$, то B – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и поэтому в каждой максимальной цепи длины три группы G , проходящей через подгруппу B , имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим, что в G имеется ненормальная максимальная подгруппа M с $|G : M| = p^c$ для некоторого натурального числа c и $M \neq A^x$, $M \neq B^y$ для всех $x, y \in G$. Не теряя общности, мы можем считать, что $Q \leq M$. Так как P нормальна в G , то $M = M_p \rtimes Q$. Заметим также, что M_p нормальна в G , так как P – абелева группа. Аналогично вышеприведенным рассуждениям, можно показать, что $M_p \cap A_p = 1$ и $M_p \cap B_p = 1$. Значит, из G -изоморфизма следует, что $P/A_p \simeq B_p A_p/A_p \simeq B_p$ и $P/A_p \simeq M_p A_p/A_p \simeq M_p$. Следовательно, M_p – минимальная нормальная подгруппа в G . Заметим также, что M_p является минимальной нормальной подгруппой в M , поскольку $PM = G$ и P – абелева группа. Значит, представителями двух классов максимальных подгрупп в M являются подгруппа Q и нормальная в G подгруппа $M_p Q_G$. Таким образом, в каждой максимальной цепи длины три группы G , проходящей через M , имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим теперь, что G – группа типа V. Как и выше, можно показать, что в каждой

максимальной цепи длины три группы G , проходящей через подгруппу A , имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Допустим вначале, что L – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. По лемме 1.3 (2), представителями двух классов максимальных подгрупп в L являются нормальная в G подгруппа RQ_G и подгруппа Q , максимальная подгруппа которой нормальна в G . Значит, и в этом случае в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим теперь, что L является нильпотентной группой. В этом случае представителями двух классов максимальных подгрупп в L являются нормальная в G подгруппа RQ_G и подгруппа Q . Значит, в этом случае, в каждой максимальной цепи длины три группы G , проходящей через L имеется собственная нормальная в G подгруппа. Теорема доказана.

В работе [20] Ю.В. Луценко и А.Н. Скиба доказали следующую теорему.

Теорема 2.3. *В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S -квазинормальной в G , когда группа G либо нильпотентна, либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, либо G изоморфна $SL(2, 3)$, либо G является сверхразрешимой группой одного из следующих типов:*

- (1) G – группа Шмидта;
- (2) $G = P \rtimes Q$, где $|P| = p$, $|Q| = q^\beta$ ($\beta \geq 3$); группа Q либо абелева, либо изоморфна группе кватернионов порядка 8, либо изоморфна группе $M_\beta(q)$; $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$;
- (3) $G = P \rtimes Q$, где P – циклическая группа порядка p^2 , обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$;
- (4) $G = (P_1 \times P_2) \rtimes Q$, где $|P_1| = |P_2| = p$, $P_1 Q$ – группа Шмидта и группа $P_2 Q$ либо нильпотентна, либо также является группой Шмидта;
- (5) $G = (P \rtimes Q)R$, где P и R – минимальные нормальные подгруппы группы G , $|P| = p$, $|R| = r$, Q – циклическая группа и $F(G) = PR\Phi(Q)$.

Используя теорему А, мы дадим короткое доказательство этой теоремы.

Доказательство. Необходимость. Согласно условию, каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S -квазинормальной в G . Значит, в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная S -квазинормальная в G подгруппа. Тогда, по лемме 1.4, G

является группой одного из типов, описанных в теореме А. Кроме того, так как каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S -квазинормальной в G , то, по лемме 1.4, каждая 3-максимальная подгруппа группы G субнормальна в G . Значит, по лемме 1.1, каждая максимальная подгруппа группы G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

Будем предполагать, что G – ненильпотентная группа и $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma > 3$ для $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Предположим, что G является группой типа I в теореме А.

Пусть $G = P \rtimes Q$ – группа Шмидта и $|\Phi(P)| = 1$, т. е. P является абелевой группой. Пусть $|Q| > q$. В этом случае группа G имеет 3-максимальную подгруппу $P_1 Q_2$, где P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P и Q_2 – 2-максимальная подгруппа в Q . По условию, $P_1 Q_2$ является S -квазинормальной подгруппой в G . Следовательно, по лемме 1.6 и по лемме 1.7, P_1 нормальна в G , что противоречит минимальности P . Поэтому $P_1 = 1$. Следовательно, $|P| = p$ и G является группой типа (1).

Пусть теперь $|Q| = q$. В этом случае каждая 2-максимальная подгруппа P_2 из P является 3-максимальной подгруппой в G . Тогда, по условию, P_2 является S -квазинормальной подгруппой в G . Следовательно, по лемме 1.6 и по лемме 1.7, P_2 нормальна в G , что противоречит минимальности P . Значит, $P_2 = 1$. Следовательно, $|P| = p^2$ и поэтому $|G| = p^2 q$, что противоречит нашему исходному допущению о группе G .

Предположим теперь, что $|\Phi(P)| = p$. Пусть $|Q| > q$. В этом случае группа G имеет 3-максимальную подгруппу $P_1 Q_2$, где P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P и Q_2 – 2-максимальная подгруппа в Q . По условию, $(P_1 Q_2)Q = Q(P_1 Q_2)$ и поэтому $P_1 Q$ является подгруппой в G . Ввиду леммы 1.3 (2), $\Phi(P)Q$ является максимальной подгруппой в G и поэтому $P_1 = \Phi(P)$. Следовательно, P является циклической группой, что противоречит неабелевости P .

Пусть теперь $|Q| = q$. Понятно, что каждая 2-максимальная подгруппа P_2 из P является 3-максимальной подгруппой в G . Тогда, по условию, $P_2 Q = Q P_2$ и поэтому $P_2 Q$ является подгруппой в G . Допустим, что $P_2 \not\leq \Phi(P)$. Тогда $P_2 \Phi(P)Q$ является подгруппой в G и поэтому,

ввиду максимальности $\Phi(P)Q$ в G , получаем либо $P_2 \Phi(P)Q = \Phi(P)Q$, либо $P_2 \Phi(P)Q = G$. Понятно, что второй случай не имеет места. Следовательно, $P_2 \Phi(P)Q = \Phi(P)Q$ и поэтому $P_2 \leq \Phi(P)$. Если $P_2 < \Phi(P)$, то P является абелевой группой, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $P_2 = \Phi(P)$ и поэтому $\Phi(P)$ является единственной 2-максимальной подгруппой в P . Ввиду рассматриваемого случая P не является циклической группой. Значит, согласно [21; III, теоремы 8.2 и 8.4] имеет место $|\Phi(P)| = 2$ и P изоморфна группе кватернионов Q_8 порядка 8. Так как при этом $|P/\Phi(P)| = 4$, то $4 \equiv 1 \pmod{q}$. Это влечет $q = 3$ и поэтому группа G изоморфна группе $SL(2, 3)$.

Теперь предположим, что $G = P \rtimes Q$ не является группой Шмидта, P – минимальная нормальная подгруппа в G и выполняется условие (1).

Пусть x – произвольный элемент из Q такой, что $|x| = q^{\beta-2}$, где $\beta \geq 3$. Тогда, поскольку $|Q| = q^\beta$, то x содержится в некоторой максимальной подгруппе Q_1 группы Q . Ясно, что PQ_1 является максимальной подгруппой в G и поэтому либо PQ_1 нильпотентна, либо PQ_1 – группа Шмидта с $|P| = p$ и $|Q_1| = q^{\beta-1}$. Очевидно, что в обоих случаях элемент x централизует группу P и поэтому $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$. Очевидно, что в этом случае, G – группа типа (2).

Предположим теперь, что выполняется условие (2) и $q = 2$, $\beta = 3$. Тогда, по [19; V, теорема 4.4], Q изоморфна либо группе Q_8 , либо диэдральной группе. В последнем случае $Q = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, где $|a| = 2^2$, $|b| = 2$, $a^b = a^{-1}$. Тогда Q имеет точно три максимальные подгруппы: $\langle a \rangle$, $\langle a^2 \rangle \langle b \rangle$ и $\langle a^2 \rangle \langle ab \rangle$ и поэтому подгруппы вида $\langle a^2 \rangle$, $\langle b \rangle$ и $\langle ab \rangle$ являются 3-максимальными подгруппами в G . Известно, что диэдральная группа D обладает свойством $\Omega_1(D) = D$ (см. [19; V, теорема 4.3]). Это означает, что одна из подгрупп порядка 2 диэдральной группы, например $\langle ab \rangle$, не содержится в Q_G . Значит, эта подгруппа не является S -квазинормальной в G , но является 3-максимальной подгруппой в G . Полученное противоречие показывает, что $Q \cong Q_8$. Следовательно, G снова является группой типа (2).

Если теперь либо $q = 2$ и $\beta > 3$, либо q – нечетное простое, то, по [19; V, теорема 4.4], в

первом случае Q изоморфна одной из групп $M_\beta(2)$, D_β , Q_β или S_β , а во втором Q изоморфна группе $M_\beta(q)$ (см. [19; С. 190–191]). Если Q изоморфна одной из групп D_β , Q_β или S_β , то, по [19; V, теорема 4.3], факторгруппа $Q/Z(Q)$ изоморфна $D_{\beta-1}$. Но в группе $D_{\beta-1}$ имеются две нециклические максимальные подгруппы и поэтому группа Q имеет по крайней мере две нециклические максимальные подгруппы, что противоречит условию. Следовательно, группа Q не может быть изоморфна одной из групп D_β , Q_β или S_β . Таким образом, группа Q изоморфна $M_\beta(q)$ и поэтому G снова является группой типа (2).

Пусть теперь выполняется условие (3). Очевидно, что максимальная в G подгруппа $G^{\text{н}} \rtimes Q$ является группой Шмидта и, следовательно, $|G^{\text{н}}| = p$. Откуда следует, что G является группой типа (4).

Предположим теперь, что G является группой типа II в теореме А.

Так как $|R| = r$, то PQ – максимальная подгруппа группы G . Значит, PQ либо нильпотентна, либо является группой Шмидта. Пусть P_1 – некоторая максимальная подгруппа группы P и Q_2 – 2-максимальная подгруппа группы Q . Тогда P_1Q_2 является 3-максимальной подгруппой в G . По условию, P_1Q_2 является S -квазинормальной подгруппой в G . Тогда, по лемме 1.6 и по лемме 1.7, P_1 нормальна в G , что противоречит минимальности P . Значит, $|P| = p$. Если R не является нормальной подгруппой в G , то $|Q| = q$. Тогда, $|G| = pqr$, что противоречит нашему исходному предположению о группе G . Если же R нормальна в G , то G является группой типа (5).

Пусть теперь G является группой типа III в теореме А.

Предположим вначале, что P – неабелева группа. Пусть P_2 – произвольная 2-максимальная подгруппа в P . Так как $|Q:Q_G| = q$, то P_2Q_G является 3-максимальной подгруппой в G и поэтому, по условию, $(P_2Q_G)Q = Q(P_2Q_G)$. Следовательно, P_2Q является подгруппой в G . Допустим, что $P_2 \not\leq \Phi(P)$. Тогда $P_2\Phi(P)Q$ является подгруппой в G и поэтому, ввиду максимальной $\Phi(P)Q$ в G , получаем либо $P_2\Phi(P)Q = \Phi(P)Q$, либо $P_2\Phi(P)Q = G$. Понятно, что второй случай не имеет места. Следовательно, $P_2\Phi(P)Q = \Phi(P)Q$ и поэтому $P_2 = \Phi(P)$. Следовательно, $\Phi(P)$ является единственной

2-максимальной подгруппой в P . Ввиду рассматриваемого случая P не является циклической группой. Значит, согласно [21; III, теоремы 8.2 и 8.4] имеет место $|\Phi(P)| = 2$ и P изоморфна группе Q_8 . Но $\Phi(P)Q = \Phi(P) \rtimes Q$ – группа Шмидта, что невозможно.

Теперь предположим, что P – абелева группа.

Допустим, что $|Q| > q$. Пусть P_1 – некоторая максимальная подгруппа группы P и Q_2 – 2-максимальная подгруппа группы Q . Тогда P_1Q_2 является 3-максимальной подгруппой в G . По условию, $(P_1Q_2)Q = Q(P_1Q_2)$ и поэтому P_1Q является подгруппой в группе G . Тогда, ввиду максимальной подгруппы $\Phi(P)Q$ в группе G , мы имеем $\Phi(P)Q = P_1Q$. Это означает, что $\Phi(P)$ является максимальной подгруппой в P и поэтому P – циклическая группа порядка p^2 . Так как $\Phi(P) \subseteq \Phi(G)$ и группа G не является нильпотентной, то $G/\Phi(P)$ – сверхразрешимая группа Шмидта. Поскольку, каждая максимальная подгруппа группы G , содержащая силовскую q -подгруппу группы G , является сверхразрешимой группой Шмидта, то максимальная подгруппа группы Q совпадает с $Z(G)$. Следовательно, G – группа типа (3).

Предположим теперь, что $|Q| = q$. Пусть P_2 – произвольная 2-максимальная подгруппа в P . Тогда P_2 является 3-максимальной подгруппой в G и поэтому P_2Q – подгруппа группы G . Рассуждая аналогично, как и выше, можно показать, что $\Phi(P)$ является единственной 2-максимальной подгруппой в P . Поэтому, ввиду абелевости, P является циклической группой. Это в свою очередь влечет $|G| = p^2q$, что противоречит нашему исходному допущению о группе G .

Допустим теперь, что G – группа типа IV в теореме А. Пусть S_1 – некоторая максимальная подгруппа в A_p . Так как $|Q:Q_G| = q$, то S_1Q_G является 3-максимальной подгруппой в G . По условию, S_1Q_G является S -квазинормальной подгруппой в G . Тогда, по лемме 1.6 и по лемме 1.7, S_1 нормальна в G , что противоречит минимальности A_p . Значит, $S_1 = 1$ и поэтому $|A_p| = p$. Если B – группа Шмидта, то, очевидно, что $|B_p| = p$. Значит, G – группа типа (4).

Допустим, что G – группа типа V в теореме А. В этом случае группа G имеет 3-максимальную подгруппу P_1Q_G , где P_1 – некоторая максимальная подгруппа в P . По условию, P_1Q_G является S -квазинормальной подгруппой в G .

Следовательно, по лемме 1.6 и по лемме 1.7, P_1 нормальна в G , что противоречит минимальности P . Поэтому $P_1 = 1$. Следовательно, $|P| = p$.

Если R не является нормальной подгруппой в G , то $|Q| = q$. Тогда, $|G| = pqr$, что противоречит нашему исходному предположению о группе G . Если же R нормальна в G , то G является группой типа (5).

Достаточность. Прежде всего заметим, что в нильпотентной группе каждая подгруппа является S -квазинормальной.

Предположим теперь, что G является не-нильпотентной группой с $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где p, q, r – простые (необязательно различные) числа и $\alpha + \beta + \gamma > 3$.

Допустим, что G изоморфна группе $SL(2, 3)$. В этом случае $G = P \rtimes Q$ является группой Шмидта, где $P \cong Q_8$ и Q – группа порядка 3. Рассмотрим максимальную подгруппу $\Phi(P)Q^x$ группы G . Так как $|\Phi(P)| = 2$ и $|Q| = 3$, то 2-максимальная подгруппа группы $\Phi(P)Q^x$ является единичной нормальной подгруппой в G . Теперь рассмотрим максимальную подгруппу P группы G . Так как P является группой кватернионов порядка 8, то $\Phi(P)$ является единственной 2-максимальной подгруппой группы P . Понятно, что подгруппа $\Phi(P)$ нормальна в G и поэтому каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S -квазинормальной.

Предположим, что G – группа типа (1). Легко показать, что в этом случае каждая 3-максимальная подгруппа нормальна в G .

Допустим теперь, что G является группой типа (2). Покажем, что в этом случае группа G удовлетворяет одному из условий:

- (а) $G = P \rtimes Q$, где $|P| = p$, Q – циклическая группа и $P \rtimes \Phi(Q)$ – группа Шмидта;
- (б) $G = (P \rtimes Q_1) \times C_q$, где $|P| = p$, $|C_q| = q$ и PQ_1 – группа Шмидта;
- (в) $G = P \rtimes Q$, где $|P| = p$, $p > 2$ и $Q \cong Q_8$;
- (г) $G = (P \rtimes Q_1)C_q$, где $|P| = p$, $Q_1 = \langle a \rangle$, $C_q = \langle b \rangle$, $|Q_1 C_q| = q^\beta$, $|a| = q^{\beta-1}$, PQ_1 – группа Шмидта, $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$ и $[P, C_1] = 1$ для всякой подгруппы C_1 , изоморфной C_q .

Так как, по условию, $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$, то в группе G имеется ненильпотентная максимальная подгруппа H . Понятно, что H содержит P и поэтому $H = P \rtimes Q_1$, где Q_1 – некоторая максимальная подгруппа в Q . Ввиду условия, каждая максимальная подгруппа группы Q_1

централизует P . Это в свою очередь влечет, что каждая максимальная подгруппа группы H является нильпотентной и поэтому H – группа Шмидта.

Если теперь группа Q циклическая, то G является группой типа (а). Предположим, что Q является абелевой, но нециклической группой. Тогда $Q = Q_1 \times C_q$, где $|C_q| = q$. Ввиду условия, $[P, C_q] = 1$ и поэтому G является группой типа (б).

Пусть теперь Q изоморфна группе Q_8 . Тогда, очевидно, G является группой типа (с). Осталось рассмотреть случай, когда Q изоморфна группе $M_\beta(q)$. Из того, что G имеет максимальную подгруппу Шмидта $H = P \rtimes Q_1$ и строения группы $M_\beta(q)$, получаем

$$G = (P \rtimes Q_1)C_q,$$

где $|P| = p$, $Q_1 = \langle a \rangle$, $C_q = \langle b \rangle$, $|Q_1 C_q| = q^\beta$, $|a| = q^{\beta-1}$, PQ_1 – группа Шмидта, $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$. Поскольку, ввиду условия, $[P, C_1] = 1$ для всякой подгруппы C_1 , изоморфной C_q , то в этом случае G является группой типа (д).

Таким образом, в случае, когда G является группой типа (2), для нее выполняется одно из условий (а)–(д).

Если G является группой типа (а), то 3-максимальными подгруппами в G являются подгруппы Q_2 и PQ_3 , где Q_2 и Q_3 – 2-максимальная и 3-максимальная подгруппы в Q , соответственно. Очевидно, что каждая из этих подгрупп нормальна в G .

Предположим теперь, что G – группа типа (с). Легко видеть, что в этом случае каждая 3-максимальная подгруппа нормальна в G .

Пусть теперь G является группой типа (д). Покажем индукцией по $|G|$, что каждая 3-максимальная подгруппа T группы G S -квазинормальна. Допустим вначале, что $T \cap Q_1^x \neq 1$ для некоторого $x \in G$. Тогда Q_1^x имеет собственную подгруппу Z такую, что $Z \leq T$ и $|Z| = q$. Так как PQ_1^x – группа Шмидта, то $Z \leq C_G(P)$ и поэтому Z нормальна в G . Так как $Z \leq \Phi(PQ_1)$, то PQ_1/Z является группой Шмидта. Легко заметить, что группа G/Z удовлетворяет и всем остальным условиям, описанным в случае (д), и поэтому G/Z является группой типа (д). Так как $|G/Z| < |G|$, ввиду $|Z| \neq 1$, и T/Z является 3-максимальной подгруппой в G/Z , то, по выбору G , T/Z S -квазинормальна в G/Z . Тогда, по лемме 1.4 (2), T S -квазинормальна в G , что противоречит выбору группы G .

Следовательно, $T \cap Q_1^x = 1$ для всех $x \in G$. Так как группа G является q -нильпотентной, то, по лемме 1.6, $|Q_1|$ делит $|G:T|$ и, по лемме 1.5, либо $|G:T| = q^3$, либо $|G:T| = pq^2$.

Допустим, что верен первый случай. Тогда либо $|Q_1| = q^3$, либо $|Q_1| = q^2$. Если $|Q_1| = q^2$, то $T = P$ является S -квазинормальной в G , что противоречит выбору группы G . Если $|Q_1| = q^3$, то $T = PC_q$. Ввиду условия $[P, C_q] = 1$, легко показать, что группа C_q S -квазинормальна в G . Но тогда и группа T является S -квазинормальной в G , что противоречит выбору группы G .

Теперь предположим, что $|G:T| = pq^2$. Так как при этом $|Q_1|$ делит $|G:T|$, то $T \simeq C_q$. Аналогично, как и выше, можно показать, что T снова является S -квазинормальной в G . Полученное противоречие показывает, что каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S -квазинормальной.

Аналогично рассматривается случай, когда G является группой типа (b).

В случае, когда G – группа одного из типов (3), (4) или (5), непосредственной проверкой легко убедиться, что каждая 3-максимальная подгруппа является нормальной в G . Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Redei, L.* Ein Satz über die endlichen einfachen Gruppen / L. Redei // *Acta Math.* – 1950. – Vol. 84. – P. 129–153.
2. *Huppert, B.* Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // *Math. Z.* – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
3. *Поляков, Л.Я.* Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л.Я. Поляков // Минск : Наука и техника. – 1966. – С. 75–88.
4. *Agrawal, R.K.* Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1976. – Vol. 54. – P. 13–21.
5. *Asaad, M.* Finite groups some whose n -maximal subgroups are normal / M. Assad // *Acta Math. Hung.* – 1989. – Vol. 54. – № 1. – P. 9–27.
6. *Flavell, P.* Overgroups of second maximal subgroups / P. Flavell // *Arch. Math.* – 1995. – Vol. 64. – P. 277–282.
7. *Mann, A.* Finite groups whose n -maximal subgroups are subnormal / A. Mann // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.
8. *Shirong, Li.* Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI-groups / Li Shirong // *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy.* – 2000. – Vol. 100A. – № 1. – P. 65–71.
9. *Guo, X.Y.* Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X.Y. Guo, K.P. Shum // *Journal of Pure and Applied Algebra.* – 2003. – Vol. 181. – P. 297–308.
10. *Guo, W.* X -semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // *J. Algebra.* – 2007. – Vol. 315. – P. 31–41.
11. *Baojun, Li.* New characterizations of finite supersoluble groups / Li Baojun, A.N. Skiba // *Science in China Series A: Mathematics.* – 2008. – Vol. 50. – № 1. – P. 827–841.
12. *Guo, W.* Finite groups with given s -embedded and n -embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // *J. Algebra.* – 2009. – Vol. 321. – P. 2843–2860.
13. *Guo, W.* The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekova, A.N. Skiba // *Communications in Algebra.* – 2009. – Vol. 37. – P. 2446–2456.
14. *Го, В.* Конечные группы, в которых любая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами / В. Го, Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба // *Матем. заметки.* – 2009. – Т. 86. – № 3. – С. 350–359.
15. *Ковалькова, Д.П.* Конечные группы с заданными системами S -квазинормальных подгрупп / Д.П. Ковалькова, А.Н. Скиба // *Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* – 2010. – № 3. – С. 35–43.
16. *Doerk, K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992.
17. *Kegel, O.* Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // *Math. Z.* – 1962. – Vol. 87. – P. 205–221.
18. *Schmid, P.* Subgroups Permutable with All Sylow Subgroups / P. Schmid // *J. Algebra.* – 1998. – V. 207. – № 1. – P. 285–293.
19. *Gorenstein, D.* Finite groups / D. Gorenstein. – New York : Chelsea, 1980.
20. *Луценко, Ю.В.* О конечных группах, в которых каждая 2-максимальная или 3-максимальная подгруппа обобщенно перестановочна со всеми силовскими подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // *Укр. мат. журнал.* – 2009. – Т. 61. – № 12. – С. 1630–1639.
21. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin : Heidelberg, New York : Springer, 1967.

Поступила в редакцию 24.03.11.