МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ДРОБЯМИ ПАДЕ–ЧЕБЫШЁВА

Ю.А. Лабыч, А.П.Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

APPROXIMATION OF CONTINUOUS FUNCTIONS BY RATIONAL PADE–CHEBYSHEV FRACTIONS

Yu.A. Labych, A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Для некоторого класса непрерывных функций, представимых в виде ряда по многочленам Чебышёва, найдена асимптотика поведения параболических последовательностей элементов таблицы Паде–Чебышёва. Установлена асимптотика наилучших рациональных приближений данного класса функций.

Ключевые слова: *наилучшие равномерные приближения, аппроксимации Паде–Чебышёва, тригонометрические аппроксимации Паде, рациональная аппроксимация, точные константы рациональной аппроксимации.*

The paper is concerned with the description of the asymptotic behaviour of parabolic sequences of the elements of Pade-Chebyshev table for some continuous functions represented by Chebyshev series. The asymptotic form of the best rational approximations for such functions is determined.

Keywords: *best approximations in the uniform norm, Pade–Chebyshev approximant, trigonometric Pade approximant, rational approximation, the accurate constants of rational approximation.*

Введение

Будем рассматривать вещественные непрерывные на отрезке $[-1,1]$ функции, представимые рядом Фурье

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,T_n(x),\ \ x\in[-1,1],\qquad(0.1)$$

где $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ – многочлен Чебышева. Последовательность коэффициентов $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ обладает всей информацией о f, поэтому принципиально возможным является описание различных свойств этой функции непосредственно в терминах, определяемых через коэффициенты ряда Фурье-Чебышева (0.1).

Обозначим через $\mathcal{R}_{n,m}$ множество всех алгебраических рациональных дробей $r(x)=p_n(x)/q_m(x)$, где p_n и q_m – вещественные алгебраические многочлены и $\deg p_n\le n$, $\deg q_m\le m$. Для функции f, непрерывной на отрезке $[-1,1]$, определим наилучшие равномерные алгебраические рациональные приближения порядка (n,m) следующим образом:

$$R_{n,m}(f)=R_{n,m}(f;[-1,1]):=\inf\{\|f-r\|:r\in\mathcal{R}_{n,m}\},$$

а $\|g\|=\max\{|g(x)|:x\in[-1,1]\}$.

Бесконечно малые $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ будем называть эквивалентными $(\alpha_n\sim\beta_n)$, если $\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\to1$ при $n\to\infty$.

Если f является сужением на $[-1,1]$ целой функции и представима рядом (0.1), то, согласно теореме С.Н. Бернштейна [1, глава 2], существует бесконечное множество значений n, для которых

$$R_{n,0}(f)\sim|A_{n+1}|,\ \ n\to\infty.\qquad(0.2)$$

Доказательство этого утверждения в [1] опирается лишь на равенства

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{R_{n,0}(f)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|A_n|}=0$$

и, в силу этого, не является конструктивным: для произвольной целой функции f ничего определенного нельзя сказать о последовательности $n=n_k$, удовлетворяющей (0.2). Однако Бернштейном было замечено, что «для наиболее обычных функций убывание коэффициентов настолько регулярно, что формула (0.2) пригодна для всех n или, по крайней мере, для значений n одинаковой четности» [1, глава 2, §2]. Условия регулярности сформулированы им в следующем виде [2, глава 5, §54]:

***Теорема* 0.1.** *Если f представима рядом (0.1) и* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|A_{n+1}|+|A_{n+2}|+\ldots}{|A_n|}=0,$ *то при $n\to\infty$*

$$R_{n,0}(f)\sim\|f-S_n(\cdot;f)\|\sim|A_{n+1}|,\qquad(0.3)$$

где

$$S_n(x;f)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}A_k\,T_k(x)$$

– частная сумма ряда (0.1).

Теорема 0.1 позволяет установить [2] асимптотику убывания $R_{n,0}(f)$ для многих элементарных функций f: $\exp x$, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ и др. В случае, когда $m \ge 1$, описание асимптотического поведения величин $R_{n,m}(f)$ является значительно более трудной задачей. Примеры ее решения хорошо известны:

$$R_{n,m}(e^x;[-1,1]) \sim \frac{n!m!}{2^{n+m}(n+m)!(n+m+1)!}, n+m \to \infty,$$

(Браесс [3]);

$$R_{n,n}(|x|;[-1,1]) \sim 8e^{-\pi\sqrt{n}}, n \to \infty, \text{ (Шталь [4])};$$

$$R_{n,n}(x^\alpha;[0,1]) \sim 4^{1+\alpha}\left|\sin \pi\alpha\right| e^{-2\pi\sqrt{\alpha n}},\ n \to \infty,$$

(Шталь [5]);

$$R_{n,n}(e^{-x};[0,+\infty]) \sim 2v^{n+\frac{1}{2}}, n \to \infty, \text{ (Аптекарев [6])},$$

где $v = 1/9{,}289...$ – постоянная Альфена. Определение постоянной Альфена см. в [6], [7]. Отметим также, что в [6] аналогичные асимптотические равенства получены и для некоторых других аналитических функций.

Не останавливаясь подробно на анализе методов работ [3]–[6], отметим лишь, что они являются результатом продолжительного коллективного поиска. Например, Г. Шталь в [4], [5] существенно опирается на глубокие исследования Д. Ньюмена [8], А.А. Гончара [9], [10], А.П. Буланова [11], Н.С. Вячеславова [12], [13] рациональной аппроксимации функций $|x|$, x^α, а основные принципы комплексного метода работы [6] заложены еще в 80-е годы А.А. Гончаром и его учениками (см., например, [7], [14], [15]).

Аппроксимацией Паде-Чебышева порядка (n,m) функции f, представимой рядом (0.1), назовем (см., например, [16]) рациональную дробь

$$\pi_{n,m}^{ch}(x;f) = \frac{p_n^{ch}(x)}{q_m^{ch}(x)}$$

из класса $\mathcal{R}_{n,m}$, у которой многочлены p_n^{ch} и q_m^{ch} удовлетворяют условию

$$q_m^{ch}(x)f(x) - p_n^{ch}(x) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} c_k T_k(x),$$

где c_k – вещественные числа.

Ясно, что $\pi_{n,0}^{ch}(x;f) = S_n(x;f)$. При $m \ge 1$ дроби $\pi_{n,m}^{ch}(x;f)$ являются рациональными аналогами частных сумм ряда Фурье по многочленам Чебышева (0.1). В этой связи представляет интерес задача нахождения таких функций f, для которых теорему Бернштейна можно обобщить с целью нахождения асимптотики убывания $R_{n,m}(f;[-1,1])$ посредством аппроксимации Паде-Чебышева $\pi_{n,m}^{ch}(\cdot;f)$. Исследования в этом направлении были инициированы В.Н. Русаком [17], [18].

Рассмотрим класс

$$\mathcal{F} = \{f_\gamma\}, \quad \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,...\},$$

состоящий из непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций, представимых в виде

$$f_\gamma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k(x)}{(\gamma)_k}, \tag{0.4}$$

где $(\gamma)_0 = 1, (\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)$, если $k \ge 1$. Одним из основных результатов данной статьи является следующая

***Теорема* 0.2.** *Пусть $f_\gamma \in \mathcal{F}$. Тогда, если*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(m(n))^{3/2}}{n} = 0,$$

то равномерно по всем m, $0 \le m \le m(n)$, при $n \to \infty$

$$R_{n,m}(f_\gamma;[-1,1]) \sim \left\| f_\gamma - \pi_{n,m}^{ch}(\cdot;f_\gamma) \right\| \sim$$

$$\sim \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}. \tag{0.5}$$

В частности, для функции [19]

$$f_1(x) = e^x \cos(\sqrt{1-x^2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k(x)}{k!},\ x \in [-1, 1],$$

из (0.5) получаем, что

$$R_{n,m}(f_1;[-1,1]) \sim \left\| f_1 - \pi_{n,m}^{ch}(\cdot;f_1) \right\| \sim$$

$$\sim \frac{m!n!}{(n+m)!(n+m+1)!}.$$

Если $m = 0$ и $f = f_\gamma$, то асимптотические равенства (0.3) и (0.5) совпадают. Для фиксированного $m = 0,1,2,...$ соотношения (0.5) ранее установлены в [17]. В случае, когда $\gamma \in \mathbb{N}$, при более ограничительном условии на $m(n)$: $m(n) = o\left(n^{1/4}\right)$, равенства (0.5) имеются в [18]. В этой работе при указанных ограничениях на γ и $m(n)$ подробного доказательства соотношения (0.5) не приведено. Подробное доказательство имеется в [20]. Весьма вероятно [21], что утверждение теоремы 0.2 остается в силе, когда $m(n) = o(n)$, причем это последнее условие на $m(n)$ не улучшаемо.

Метод доказательства теоремы 0.2 отличен от метода Бернштейна. Он основан на связи между аппроксимациями Паде-Чебышева функции f и классическими тригонометрическими аппроксимациями Паде индуцированной функции $f(\cos x)$. Изучению свойств классических тригонометрических аппроксимаций Паде функций $f_\gamma(\cos x)$ посвящен п. 1. Результаты этого пункта имеют самостоятельный интерес. В п. 2 приводится доказательство теоремы 0.2.

1 Тригонометрические аппроксимации Паде

Пусть $f \in C_{2\pi}$, т. е. является вещественной непрерывной 2π-периодической функцией, и, кроме этого, представима рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad (1.1)$$

где коэффициенты Фурье a_k и b_k – действительные числа. Для удобства ряд Фурье (1.1) запишем в комплексной форме

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \qquad (1.2)$$

полагая

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2},$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$c_{-k} = \bar{c}_k.$$

Обозначим через $\mathcal{R}^t_{n,m}$ класс всех рациональных тригонометрических функций

$$r^t(x) = \frac{p^t_n(x)}{q^t_m(x)},$$

у которых числитель $p^t_n(x)$ и знаменатель $q^t_m(x)$ являются тригонометрическими многочленами с действительными коэффициентами и $\deg p^t_n \le n$, $\deg q^t_m \le m$. Определим наилучшие равномерные рациональные тригонометрические приближения f в классе $\mathcal{R}^t_{n,m}$ (или порядка (n,m)), полагая

$$R^t_{n,m}(f) := \inf\left\{\| f - r^t \| : r^t \in \mathcal{R}^t_{n,m}\right\},$$

а $\| g \| = \max_{x\in\mathbb{R}} | g(x) |$.

Тригонометрической аппроксимацией Паде функции (1.1) назовем такую рациональную функцию

$$\pi^t_{n,m}(x) = \pi^t_{n,m}(x; f) = \frac{p^t_n(x)}{q^t_m(x)}$$

из класса $\mathcal{R}^t_{n,m}$, числитель и знаменатель которой удовлетворяют условию

$$q^t_m(x) f(x) - p^t_n(x) = \\ = \sum_{k=n+m+1}^{\infty}(\tilde{a}_k \cos kx + \tilde{b}_k \sin kx), \qquad (1.3)$$

где $\tilde{a}_k$ и $\tilde{b}_k$ – действительные числа.

Введем в рассмотрение некоторые матрицы и определители, элементами которых служат коэффициенты Фурье функции f. Для этого каждому $k \in \mathbb{Z}$ и действительному x поставим в соответствие матрицы-строки

$$C_k = \left\| c_{k-j} \right\|, \; E(x) = \left\| e^{ijx} \right\|,$$

$$j = \overline{-m,m}, \; i = \sqrt{-1}.$$

Далее, полагаем

$$d_{n,m}(x) = \det \begin{bmatrix} C_{n+m} \\ \cdots \\ C_{n+2} \\ C_{n+1} \\ E(x) \\ C_{-n-1} \\ C_{-n-2} \\ \cdots \\ C_{-n-m} \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $d_{n,m,k}$ – определитель, полученный из $d_{n,m}(x)$ заменой строки $E(x)$ на C_k, а через $\Delta_{n,m}$ – определитель $2m$-го порядка, полученный из $d_{n,m}(x)$ после вычеркивания $(m+1)$-ой строки и $(m+1)$-го столбца. Справедлива следующая теорема [22], [23], [20].

Теорема 1.1. *Пусть функция* f *задана рядом* (1.2). *Тогда для любых целых неотрицательных n и m существует тригонометрическая аппроксимация Паде* $\pi^t_{n,m}(\cdot; f)$. *Если* $\Delta_{n,m} \ne 0$, *то* $\pi^t_{n,m}(x; f) = \dfrac{p^t_n(x; f)}{q^t_m(x; f)}$ *единственна, а ее числитель и знаменатель определяются равенствами*

$$p^t_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} d_{n,m,k} e^{ikx}, \\ q^t_m(x) = d_{n,m}(x). \qquad (1.4)$$

Тригонометрические полиномы $p^t_n(x)$ и $q^t_m(x)$ равенством (1.3) определяются неоднозначно, вместе с тем, дробь $\pi^t_{n,m}(\cdot; f)$, являющаяся их отношением, задается единственным образом. В дальнейшем будем считать, что p^t_n и q^t_m определяются равенствами (1.4). В этом случае (см. [17], [20])

$$L^t_{n,m}(x; f) := q^t_m(x) f(x) - p^t_n(x) = \\ = \sum_{k=n+m+1}^{\infty}(\tilde{c}_k e^{ikx} + \tilde{c}_{-k} e^{-ikx}), \qquad (1.5)$$

где $\tilde{c}_k = d_{n,m,k}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку f – вещественная функция, то $\overline{c_k} = c_{-k}$. Поэтому $\overline{d_{n,m}(x)} = d_{n,m}(x)$ и $\overline{d_{n,m,k}} = d_{n,m,-k}$. Это означает, что тригонометрические полиномы p^t_n и q^t_m также вещественны.

При прежних значениях параметра γ рассмотрим однопараметрическое семейство функций $\mathcal{F}^t = \left\{F_\gamma\right\}$, представимых в виде

$$F_\gamma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{(\gamma)_k}. \qquad (1.6)$$

Нашей ближайшей целью является доказательство следующей теоремы.

***Теорема* 1.2.** *Пусть* $F_\gamma \in \mathcal{F}^t$. *Тогда при условии, что* $m(n) = o\left(n^{2/3}\right)$, *для любого* $x \in \mathbb{R}$ *равномерно по всем* m, $0 \le m \le m(n)$, *при* $n \to \infty$

$$F_\gamma(x) - \pi^t_{n,m}(x; F_\gamma) =$$
$$= \frac{(-1)^m\, m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}\,(\gamma)_{n+m+1}} Re\left\{e^{i(n+m+1)x}\left(1 + o(1)\right)\right\}.$$

Введем в рассмотрение две квадратные матрицы $(m+1)$-го порядка:

$$\widetilde{A}(k) = \begin{bmatrix} 2c_{n+m+k} & c_{n+m+k-1}+c_{n+m+k+1} & \dots & c_{n+k} + c_{n+2m+k} \\ 2c_{n+1} & c_n + c_{n+2} & \dots & c_{n-m+1} + c_{n+m+1} \\ 2c_{n+2} & c_{n+1}+c_{n+3} & \dots & c_{n-m+2} + c_{n+m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2c_{n+m} & c_{n+m-1}+c_{n+m+1} & \dots & c_n + c_{n+2m} \end{bmatrix},$$

$$A(y) = \begin{bmatrix} 2 & y^{-1} + y & \dots & y^{-m} + y^m \\ 2c_{n+1} & c_n + c_{n+2} & \dots & c_{n-m+1} + c_{n+m+1} \\ 2c_{n+2} & c_{n+1}+c_{n+3} & \dots & c_{n-m+2} + c_{n+m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2c_{n+m} & c_{n+m-1}+c_{n+m+1} & \dots & c_n + c_{n+2m} \end{bmatrix},$$

и две квадратные матрицы m-го порядка:

$$A_0 = \begin{bmatrix} c_{n+2} + c_n & c_{n+3}+c_{n-1} & \dots & c_{n+m+1} + c_{n-m+1} \\ c_{n+3}+c_{n+1} & c_{n+4}+c_n & \dots & c_{n+m+2} + c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} + c_{n+m-1} & c_{n+m+2}+c_{n+m-2} & \dots & c_{n+2m} + c_n \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} c_{n+2} - c_n & c_{n+3}-c_{n-1} & \dots & c_{n+m+1} - c_{n-m+1} \\ c_{n+3}-c_{n+1} & c_{n+4}-c_n & \dots & c_{n+m+2} - c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} - c_{n+m-1} & c_{n+m+2}-c_{n+m-2} & \dots & c_{n+2m} - c_n \end{bmatrix},$$

где c_k – коэффициенты ряда Фурье (1.2).

***Лемма* 1.1.** *Пусть функция* f *представима рядом* (1.6). *Тогда*

$$\Delta_{n,m} = \det A_0 \cdot \det B, \qquad (1.7)$$

$$\tilde{c}_{n+m+k} = \frac{1}{2}\det \widetilde{A}(k) \cdot \det B, \qquad (1.8)$$

$$q^t_m(x) = \frac{1}{2}\det A(y) \cdot \det B, \quad y = e^{ix}. \qquad (1.9)$$

Доказательство. Так как $c_j = c_{-j} = \dfrac{1}{2(\gamma)_j}$, заменим c_{-j} на c_j в строках определителя $\Delta_{n,m}$, начиная с $(m+1)$-ой. Тогда

$$\Delta_{n,m} = \begin{vmatrix} P & P_1 \\ P_2 & P_3 \end{vmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} c_{n+2m} & c_{n+2m-1} & \cdots & c_{n+m+1} \\ c_{n+2m-1} & c_{n+2m-2} & \cdots & c_{n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n+m+1} & c_{n+m} & \cdots & c_{n+2} \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} c_{n+m-1} & \cdots & c_{n+1} & c_n \\ c_{n+m-2} & \cdots & c_n & c_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & \cdots & c_{n-m+2} & c_{n-m+1} \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} c_{n+2} & \cdots & c_{n+m} & c_{n+m+1} \\ c_{n+3} & \cdots & c_{n+m+1} & c_{n+m+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n+m+1} & \cdots & c_{n+2m-1} & c_{n+2m} \end{bmatrix},$$

Поменяем в определителе $\Delta_{n,m}$ $(m+1)$-ую строку с последней, $(m+2)$-ую – с предпоследней и так далее, а затем в полученном определителе поменяем местами $(m+1)$-ый столбец с последним, $(m+2)$-ой – с предпоследним и так далее. После таких преобразований получим

$$\Delta_{n,m} = \begin{vmatrix} P & Q \\ Q & P \end{vmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{n+m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_n \end{bmatrix},$$

где P и Q – матрицы m-го порядка, расположенные соответственно в первых m столбцах и строках и последних m столбцах и первых m строках. Преобразуем последний определитель, прибавив к первому столбцу $(m+1)$-ый, ко второму – $(m+2)$-ой и так далее, наконец, к m-му – $2m$-ый. После этого в полученном определителе вычтем из $(m+1)$-ой строки первую, из $(m+2)$-ой – вторую и так далее, наконец, из последней вычтем m-ую. Тогда из свойств определителей следует, что

$$\Delta_{n,m} = \begin{vmatrix} P+Q & Q \\ 0 & P-Q \end{vmatrix} = \det(P+Q)\cdot\det(P-Q),$$

где $\det(P+Q) = \det A_0$, $\det(P-Q) = \det B$. Равенство (1.7) установлено. Аналогично [20] доказываются равенства (1.8) и (1.9).

***Лемма* 1.2.** *Если* $F_\gamma \in \mathcal{F}^t$, *то* (c_k *– коэффициенты Фурье комплексной формы ряда* (1.6))

$$A^0 := \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_n & \dots & c_{n-m+1} \\ c_{n+2} & c_{n+1} & \dots & c_{n-m+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n+m+1} & c_{n+m} & \dots & c_{n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \prod_{j=1}^{m} j! \prod_{j=1}^{m+1} \frac{1}{(\gamma)_{n+j}}. \qquad (1.10)$$

Доказательство. Учитывая, что $c_k = \dfrac{1}{2(\gamma)_k}$, и применяя элементарные преобразования определителя, получим, что

$$A^0 = \frac{1}{2^{m+1}}\begin{vmatrix} \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} & \frac{1}{(\gamma)_n} & \dots & \frac{1}{(\gamma)_{n-m+1}} \\ \frac{1}{(\gamma)_{n+2}} & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} & \dots & \frac{1}{(\gamma)_{n-m+2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(\gamma)_{n+m+1}} & \frac{1}{(\gamma)_{n+m}} & \dots & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}}\prod_{j=1}^{m+1}\frac{1}{(\gamma)_{n+j}}\begin{vmatrix} 1 & (\gamma+n)_1 & \dots & (\gamma+n-m+1)_m \\ 1 & (\gamma+n+1)_1 & \dots & (\gamma+n-m+2)_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (\gamma+n+m)_1 & \dots & (\gamma+n+1)_m \end{vmatrix}.$$

Обозначим через $K(n,m)$ определитель в правой части последнего равенства. Вычтем из $(m+1)$-ой строки m-ю и так далее, из третьей – вторую, наконец, из второй – первую строку. Тогда, учитывая равенства $(\gamma+j+1)_i-(\gamma+j)_i = i(\gamma+j+1)_{i-1}$, будем иметь:

$$K(n,m) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & (\gamma+n)_1 & \cdots & (\gamma+n-m+1)_m \\ 0 & (\gamma+n+1)_0 & \cdots & m(\gamma+n-m+2)_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (\gamma+n+m)_0 & \cdots & m(\gamma+n+1)_{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= m!\begin{vmatrix} 1 & (\gamma+n)_1 & \dots & (\gamma+n-m+2)_{m-1} \\ 1 & (\gamma+n+1)_1 & \dots & (\gamma+n-m+3)_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (\gamma+n+m-1)_1 & \dots & (\gamma+n+1)_{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= m!K(n,m-1).$$

Поскольку $K(n,1) = \begin{vmatrix} 1 & (\gamma+n)_1 \\ 1 & (\gamma+n+1)_1 \end{vmatrix} = 1,$

то из предыдущих рекуррентных соотношений

$$K(n,m) = \prod_{j=1}^{m} j!. \qquad (1.11)$$

Лемма 1.2 доказана.

***Лемма* 1.3.** *Справедливо равенство*

$$B(\nu_j;1) :=$$

$$:= \begin{vmatrix} \frac{1}{(\gamma+n+1)_{2\nu_j}} & (\gamma+n)_1 & \dots & (\gamma+n-m+1+\nu_j)_{m-\nu_j} \\ \frac{1}{(\gamma+n+2)_{2\nu_j}} & (\gamma+n+1)_1 & \dots & (\gamma+n-m+2+\nu_j)_{m-\nu_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(\gamma+n+m+1-\nu_j)_{2\nu_j}} & (\gamma+n+m-\nu_j)_1 & \dots & (\gamma+n+1)_{m-\nu_j} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(m+\nu_j)!\prod\limits_{k=1}^{m-\nu_j-1} k!}{(2\nu_j)!\,(\gamma+n+m+1-\nu_j)_{2\nu_j}}, \qquad (1.12)$$

где $1 \le \nu_j \le m,\ \ j=\overline{1,m},$ *и при* $m-1 \le \nu_j$ *считаем, что* $\prod\limits_{k=1}^{m-\nu_j-1} k! = 1.$

Доказательство. Вынесем за знак определителя $B(\nu_j;1)$ элементы первого столбца:

$$B(\nu_j;1) = \prod_{k=1}^{m-\nu_j+1}\frac{1}{(\gamma+n+k)_{2\nu_j}}\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix} 1 & (\gamma+n)_{2\nu_j+1} & \dots & (\gamma+n-m+1+\nu_j)_{m+\nu_j} \\ 1 & (\gamma+n+1)_{2\nu_j+1} & \dots & (\gamma+n-m+2+\nu_j)_{m+\nu_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (\gamma+n+m-\nu_j)_{2\nu_j+1} & \dots & (\gamma+n+1)_{m+\nu_j} \end{vmatrix}.$$

Вычтем из последней строки определителя в правой части равенства предпоследнюю строку и так далее, из третьей – вторую, из второй – первую и, раскладывая полученный определитель по элементам первого столбца, будем иметь

$$B(\nu_j;1) = \prod_{k=1}^{m-\nu_j+1}\frac{1}{(\gamma+n+k)_{2\nu_j}}\cdot\frac{(m+\nu_j)!}{(2\nu_j)!}\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix} (\gamma+n+1)_{2\nu_j} & \cdots & (\gamma+n-m+2+\nu_j)_{m+\nu_j-1} \\ (\gamma+n+2)_{2\nu_j} & \cdots & (\gamma+n-m+3+\nu_j)_{m+\nu_j-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ (\gamma+n+m-\nu_j)_{2\nu_j} & \cdots & (\gamma+n+1)_{m+\nu_j-1} \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя элементы его первого столбца. В итоге получим

$$B(\nu_j;1) = \prod_{k=1}^{m-\nu_j+1}\frac{1}{(\gamma+n+k)_{2\nu_j}}\cdot$$

$$\cdot\prod_{k=1}^{m-\nu_j}(\gamma+n+k)_{2\nu_j}\cdot\frac{(m+\nu_j)!}{(2\nu_j)!}\cdot K(n,m-\nu_j-1) =$$

$$= \frac{1}{(\gamma+n+m+1-\nu_j)_{2\nu_j}}\cdot\frac{(m+\nu_j)!}{(2\nu_j)!}\cdot K(n,m-\nu_j-1).$$

Учитывая явное выражение для определителя $K(n,m-\nu_j-1)$ (см. равенство (1.11)), получим равенство (1.12). Лемма 1.3 доказана.

***Лемма* 1.4.** *Если* $F_\gamma \in \mathcal{F}^t$, c_k *– коэффициенты Фурье* F_γ, *а* $A^j_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_j}$ *– определитель вида*

$$\begin{vmatrix} c_{n+1} & c_{n_1} & \dots & c_{n_m} \\ c_{n+2} & c_{n_1+1} & \dots & c_{n_m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} & c_{n_1+m} & \dots & c_{n_m+m} \end{vmatrix},$$

у которого $n_{\nu_1}=n+1+\nu_1$, $n_{\nu_2}=n+1+\nu_2$, ..., $n_{\nu_j}=n+1+\nu_j$, *а остальные* $n_i=n+1-i$, $i=\overline{1,m}$, $i\ne\nu_1,\nu_2,...,\nu_j$, $1\le\nu_1<\nu_2<...<\nu_j\le m$, $j=\overline{1,m}$, *то*

$$
\begin{aligned}
A^j_{\nu_1,\nu_2,...,\nu_j}&=\frac{(-1)^q m!}{2^{m+1}\prod\limits_{i=1}^{j}(\gamma+n+m+1-\nu_i)_{2\nu_i}}\cdot\\
&\cdot\prod_{k=1}^{m+1}\frac{1}{(\gamma)_{n+k}}\cdot\prod_{\substack{k=1\\k\ne\nu_1,\nu_2,...,\nu_j}}^{m-1}(m-k)!\cdot\\
&\cdot\prod_{i=1}^{j}\frac{(m+\nu_i)!(\nu_i+1)_{\nu_1-1}}{(2\nu_i)!(\nu_i-1)!}\cdot\\
&\cdot\prod_{i=1}^{j-1}\prod_{k=i+1}^{j}\frac{(\nu_k-\nu_i)^2(\nu_k+\nu_i+1)_{\nu_{i+1}-\nu_i-1}}{(\nu_k+\nu_i)},
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

где $q=j\nu_1+\sum\limits_{i=1}^{j-1}(\nu_{i+1}-\nu_i)(j-i)$.

Доказательство. Согласно условию леммы, $A^j_{\nu_1,\nu_2,...,\nu_j}=2^{-m-1}\cdot A$, где определитель A имеет следующий вид (далее полагаем $\lambda_i^+:=\dfrac{1}{(\gamma)_{n+1+i}}$, $\lambda_i^-:=\dfrac{1}{(\gamma)_{n+1-i}}$):

$$
A=\begin{vmatrix}
\lambda_0^+ & \lambda_1^- & \cdots & \lambda^-_{\nu_j-1} & \lambda^+_{\nu_j} & \lambda^-_{\nu_j+1} & \cdots & \lambda^-_m\\
\lambda_1^+ & \lambda_0^- & \cdots & \lambda^-_{\nu_j-2} & \lambda^+_{\nu_j+1} & \lambda^-_{\nu_j} & \cdots & \lambda^-_{m-1}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\lambda_m^+ & \lambda^-_{-(m-1)} & \cdots & \lambda^-_{\nu_j-(m+1)} & \lambda^+_{\nu_j+m} & \lambda^-_{\nu_j-(m-1)} & \cdots & \lambda_0^-
\end{vmatrix}.
$$

Для явного выражения A вынесем за знак определителя элементы первого столбца. В результате получим

$$
A=\prod_{k=1}^{m+1}\frac{1}{(\gamma)_{n+k}}A', \tag{1.14}
$$

где A' – определитель следующего вида (полагаем $b_i^+(l):=\dfrac{1}{(\gamma+n+l)_i}$, $b_i^-(l):=(\gamma+n+l-i)_i$):

$$
A'=\begin{vmatrix}
1 & \cdots & b^-_{\nu_j-1}(1) & b^+_{\nu_j}(1) & b^-_{\nu_j+1}(1) & \cdots & b^-_m(1)\\
1 & \cdots & b^-_{\nu_j-1}(2) & b^+_{\nu_j}(2) & b^-_{\nu_j+1}(2) & \cdots & b^-_m(2)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
1 & \cdots & b^-_{\nu_j-1}(m+1) & b^+_{\nu_j}(m+1) & b^-_{\nu_j+1}(m+1) & \cdots & b^-_m(m+1)
\end{vmatrix}.
$$

Вычтем из $(m+1)$-ой строки последнего определителя m-ую строку и так далее, из третьей – вторую, из второй – первую, учитывая при этом равенства

$$
(\gamma+j+1)_i-(\gamma+j)_i=i(\gamma+j+1)_{i-1},
$$

$$
\frac{1}{(\gamma+j+1)_i}-\frac{1}{(\gamma+j)_i}=-\frac{i}{(\gamma+j)_{i+1}},
$$

затем разложим полученный определитель по элементам первого столбца. Тогда будем иметь:

$$
A'=(-1)^j m!\cdot
$$

$$
\cdot\begin{vmatrix}
1 & b_1^-(1) & \cdots & b^-_{\nu_j-2}(1) & b^+_{\nu_j+1}(1) & b^-_{\nu_j}(1) & \cdots & b^-_{m-1}(1)\\
1 & b_1^-(2) & \cdots & b^-_{\nu_j-2}(2) & b^+_{\nu_j+1}(2) & b^-_{\nu_j}(2) & \cdots & b^-_{m-1}(2)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
1 & b_1^-(m) & \cdots & b^-_{\nu_j-2}(m) & b^+_{\nu_j+1}(m) & b^-_{\nu_j}(m) & \cdots & b^-_{m-1}(m)
\end{vmatrix}.
$$

Повторяя эту редукцию еще ν_1-1 раз, придем к следующему равенству (в последней строке определителя $m^-_{\nu_1}:=m+1-\nu_1$)

$$
A'=(-1)^{j\nu_1}m!(m-1)!...(m-\nu_1+1)!\prod_{k=1}^{j}\prod_{l=1}^{\nu_1-1}\frac{\nu_k+l}{\nu_k-l}\cdot
$$

$$
\cdot\begin{vmatrix}
b^+_{2\nu_1}(1) & b_1^-(1) & \cdots & b^+_{\nu_j+\nu_1}(1) & \cdots & b^-_{m-\nu_1}(1)\\
b^+_{2\nu_1}(2) & b_1^-(2) & \cdots & b^+_{\nu_j+\nu_1}(2) & \cdots & b^-_{m-\nu_1}(2)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
b^+_{2\nu_1}(m^-_{\nu_1}) & b_1^-(m^-_{\nu_1}) & \cdots & b^+_{\nu_j+\nu_1}(m^-_{\nu_1}) & \cdots & b^-_{m-\nu_1}(m^-_{\nu_1})
\end{vmatrix}.
$$

Обозначим через $B(\nu_1,p)$, $p=j$ определитель в правой части последнего равенства. Вынесем за знак определителя $B(\nu_1,p)$ элементы первого столбца. Тогда (в последней строке определителя $m^+_{\nu_1}:=m+\nu_1+1$)

$$
B(\nu_1,p)=\prod_{k=1}^{m-\nu_1+1}\frac{1}{(\gamma+n+k)_{2\nu_1}}\cdot
$$

$$
\cdot\begin{vmatrix}
1 & b^-_{2\nu_1+1}(2\nu_1+1) & \cdots & b^+_{\nu_j-\nu_1}(2\nu_1+1) & \cdots & b^-_{m+\nu_1}(2\nu_1+1)\\
1 & b^-_{2\nu_1+1}(2\nu_1+2) & \cdots & b^+_{\nu_j-\nu_1}(2\nu_1+2) & \cdots & b^-_{m+\nu_1}(2\nu_1+2)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
1 & b^-_{2\nu_1+1}(m^+_{\nu_1}) & \cdots & b^+_{\nu_j-\nu_1}(m^+_{\nu_1}) & \cdots & b^-_{m+\nu_1}(m^+_{\nu_1})
\end{vmatrix}.
$$

Применим к последнему определителю стандартную процедуру: вычтем из $(m-\nu_1+1)$-ой строки $(m-\nu_1)$-ую и так далее, из третьей – вторую, из второй – первую, разложим полученный определитель по элементам первого столбца. За знак определителя, полученного таким образом, вынесем элементы первого столбца. Тогда

$$
B(\nu_1,p)=(-1)^{p-1}\frac{(m+\nu_1)!}{(2\nu_1)!}\cdot\prod_{k=2}^{j}\frac{\nu_k-\nu_1}{\nu_k+\nu_1}\cdot
$$

$$
\cdot\prod_{k=1}^{m-\nu_1+1}\frac{1}{(\gamma+n+k)_{2\nu_1}}\cdot\prod_{k=1}^{m-\nu_1}(\gamma+n+k)_{2\nu_1}\cdot
$$

$$
\cdot\begin{vmatrix}
1 & b_1^-(1) & \cdots & b^+_{\nu_j+\nu_1+1}(1) & \cdots & b^-_{m-\nu_1-1}(1)\\
1 & b_1^-(2) & \cdots & b^+_{\nu_j+\nu_1+1}(2) & \cdots & b^-_{m-\nu_1-1}(2)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
1 & b_1^-(m-\nu_1) & \cdots & b^+_{\nu_j+\nu_1+1}(m-\nu_1) & \cdots & b^-_{m-\nu_1-1}(m-\nu_1)
\end{vmatrix}.
$$

Применим к определителю в правой части последнего равенства стандартную процедуру $\nu_2-\nu_1-1$ раз. В результате получим

$$B(v_1,p)=\frac{(-1)^{(v_2-v_1)(p-1)}}{(\gamma+n+m-v_1+1)_{2v_1}}\cdot\frac{(m+v_1)!}{(2v_1)!}\cdot$$
$$\cdot\prod_{k=1}^{v_2-v_1-1}(m-v_1-k)!\cdot$$
$$\cdot\prod_{k=2}^{j}\frac{v_k-v_1}{v_k+v_1}\cdot\prod_{l=1}^{v_2-v_1-1}\prod_{k=2}^{j}\frac{v_k+v_1+l}{v_k-v_1-l}\cdot B(v_2,p-1),$$

где

$$B(v_2,p-1)=$$
$$=\begin{vmatrix} b^+_{2v_2}(1) & b^-_1(1) & \cdots & b^+_{v_j+v_2}(1) & \cdots & b^-_{m-v_2}(1)\\ b^+_{2v_2}(2) & b^-_1(2) & \cdots & b^+_{v_j+v_2}(2) & \cdots & b^-_{m-v_2}(2)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b^+_{2v_2}(m^-_{v_2}) & b^-_1(m^-_{v_2}) & \cdots & b^+_{v_j+v_2}(m^-_{v_2}) & \cdots & b^-_{m-v_2}(m^-_{v_2})\end{vmatrix}.$$

Теперь, учитывая лемму 1.3, (1.14) и предыдущие рекуррентные соотношения, окончательно получим, что

$$A^j_{v_1,v_2,\dots,v_j}=\frac{(-1)^q\,m!}{2^{m+1}\prod_{i=1}^{j}(\gamma+n+m+1-v_j)_{2v_i}}\cdot$$
$$\cdot\prod_{k=1}^{m+1}\frac{1}{(\gamma)_{n+k}}\cdot\prod_{k=1}^{v_1-1}(m-k)!\cdot\prod_{l=1}^{v_1-1}\prod_{k=1}^{j}\frac{v_k+l}{v_k-l}\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{j-1}\prod_{k=i+1}^{j}\frac{v_k-v_i}{v_k+v_i}\cdot\prod_{i=1}^{j-1}\prod_{k=1}^{v_{i+1}-v_i-1}(m-v_i-k)!\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{j-1}\prod_{k=i+1}^{j}\prod_{l=1}^{v_{i+1}-v_i-1}\frac{v_k+v_i+l}{v_k-v_i-l}\cdot\prod_{i=1}^{j}\frac{(m+v_i)!}{(2v_i)!}\cdot\prod_{k=1}^{m-v_j-1}k!.$$

Произведя элементарные преобразования в правой части последнего равенства, получим (1.13). Лемма 1.4 доказана.

Пусть

$$A_1=2(-1)^m\widetilde{A}(1)=$$
$$=\begin{vmatrix} c_{n+1} & c_n+c_{n+2} & \dots & c_{n-m+1}+c_{n+m+1}\\ c_{n+2} & c_{n+1}+c_{n+3} & \dots & c_{n-m+2}+c_{n+m+2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{n+m} & c_{n+m-1}+c_{n+m+1} & \dots & c_n+c_{n+2m}\\ c_{n+m+1} & c_{n+m}+c_{n+m+2} & \dots & c_{n+1}+c_{n+2m+1}\end{vmatrix}.$$

***Лемма* 1.5.** *Если* $F_\gamma\in\mathcal{F}^t$ *и* $m(n)=o\left(n^{2/3}\right)$, *то равномерно по всем* m, $0\le m\le m(n)$, *при* $n\to\infty$

$$A_1\sim A^0.$$

Доказательство. Представим A_1 в виде суммы 2^m определителей, полученных в результате разбиения его столбцов

$$A_1=\sum_{n_1,n_2,\dots,n_m}\begin{vmatrix} c_{n+1} & c_{n_1} & \dots & c_{n_m}\\ c_{n+2} & c_{n_1+1} & \dots & c_{n_m+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_{n+m+1} & c_{n_1+m} & \dots & c_{n_m+m}\end{vmatrix}, \quad (1.15)$$

где n_i принимает либо значение $n+1-i$, либо значение $n+1+i$, $i=\overline{1,m}$. Учитывая определение $A^j_{v_1,v_2,\dots,v_j}$, (1.15) можно записать в виде

$$A_1=A^0+\sum_{v_1}A^1_{v_1}+\sum_{v_1<v_2}A^2_{v_1,v_2}+\dots$$
$$+\sum_{v_1<v_2<\dots<v_j}A^j_{v_1,v_2,\dots,v_j}+A^m_{v_1,v_2,\dots,v_m}=$$
$$=A^0+S^1+S^2+\dots+S^j+\dots+S^m=A^0\left(1+\sum_{j=1}^{m}\frac{S^j}{A^0}\right),$$

где S^j состоит ровно из $C^j_m=\dfrac{m!}{j!(m-j)!}$ слагаемых. Учитывая явное выражение (1.10) и (1.13) для определителей A^0, $A^j_{v_1,v_2,\dots,v_j}$ и легко проверяемые неравенства

$$\prod_{i=1}^{j}\frac{(v_i+1)_{v_1-1}}{(2v_i)!}\cdot\prod_{i=1}^{j-1}\prod_{k=i+1}^{j}(v_k+v_i+1)_{v_{i+1}-v_i-1}\le 1,$$
$$\prod_{i=1}^{j-1}\prod_{k=i+1}^{j}\frac{v_k-v_i}{v_k+v_i}\le 1,\quad \frac{\prod_{i=1}^{j-1}\prod_{k=i+1}^{j}(v_k-v_i)}{\prod_{i=1}^{j}(v_i-1)!}\le 1,$$

получаем, что при $n\ge n_0$

$$\left|\frac{A^j_{v_1,v_2,\dots,v_j}}{A^0}\right|\le\frac{\prod_{k=1}^{m-v_j-1}k!\prod_{k=1}^{v_j}(m-k)!\prod_{k=1}^{j}(m+v_k)!}{\prod_{k=1}^{m-1}j!\prod_{k=1}^{j}(m-v_k)!(\gamma+n+m+1-v_k)_{2v_k}}=$$
$$=\prod_{k=1}^{j}\frac{(m+v_k)!}{(m-v_k)!(\gamma+n+m+1-v_k)_{2v_k}}=$$
$$=\prod_{k=1}^{j}\frac{(m+1-v_k)_{2v_k}}{(\gamma+n+m+1-v_k)_{2v_k}}\le$$
$$\le\prod_{k=1}^{j}\frac{(2m)^{2v_k}}{n^{2v_k}}=\left(\frac{2m}{n}\right)^{2(v_1+v_2+\dots+v_j)}\le\left(\frac{2m}{n}\right)^{2j}.$$

Так как число слагаемых в сумме S^j равно $C^j_m\le m^j$, то

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{S^j}{A^0}\le\sum_{j=1}^{m}m^j\left(\frac{2m}{n}\right)^{2j}=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{2m^{3/2}}{n}\right)^{2j}.$$

Поэтому окончательно будем иметь, что

$$A_1=A^0\left(1+\sum_{j=1}^{m}\frac{S^j}{A^0}\right)=A^0\left(1+O\left(\frac{m^3}{n^2}\right)\right).$$

Лемма 1.5 доказана.

***Следствие* 1.1.** *Если* $F_\gamma\in\mathcal{F}^t$, $m(n)=o\left(n^{2/3}\right)$, *то при* $0\le m\le m(n)$ *и* $n\ge n_0$

$$\det A_0\ne 0,\ \det B\ne 0,\ \Delta_{n,m}\ne 0.$$

***Лемма* 1.6.** *Пусть* $F_\gamma\in\mathcal{F}^t$. *Тогда если* $m(n)=o\left(n^{2/3}\right)$, *то для каждого* $k=1,2,\dots$ *равномерно по всем* m, $0\le m\le m(n)$, *при* $n\to\infty$

$$\det\widetilde{A}(1)\sim\frac{(-1)^m}{2^m}\prod_{j=1}^{m}j!\prod_{j=0}^{m}\frac{1}{(\gamma)_{n+1+j}},\qquad(1.16)$$

$$\det\widetilde{A}(k)\sim\frac{(-1)^m}{2^m}\prod_{j=1}^{m-1}j!\cdot$$
$$\cdot\prod_{j=1}^{m}(j+k-1)(\gamma+n+j)_{k-1}\prod_{j=0}^{m}\frac{1}{(\gamma)_{n+k+j}},\qquad(1.17)$$

$$A(y)\sim\frac{1}{2^{m-1}}\prod_{j=1}^{m-1}j!\prod_{j=0}^{m-1}\frac{1}{(\gamma)_{n+j}},\quad y=e^{ix}.\qquad(1.18)$$

Доказательство. Аналогично, как и при доказательстве леммы 1.5, устанавливается, что при $n\to\infty$

$$\det\widetilde{A}(k)\sim 2(-1)^m\begin{vmatrix}c_{n+1}&c_n&\dots&c_{n-m+1}\\ c_{n+2}&c_{n+1}&\dots&c_{n-m+2}\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\ c_{n+m}&c_{n+m-1}&\dots&c_n\\ c_{n+m+k}&c_{n+m+k-1}&\dots&c_{n+k}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{(-1)^{m(m+3)/2}}{2^m}\begin{vmatrix}\frac{1}{(\gamma)_{n-m+1}}&\frac{1}{(\gamma)_{n-m+2}}&\dots&\frac{1}{(\gamma)_{n+1}}\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\ \frac{1}{(\gamma)_{n}}&\frac{1}{(\gamma)_{n+1}}&\dots&\frac{1}{(\gamma)_{n+m}}\\ \frac{1}{(\gamma)_{n+k}}&\frac{1}{(\gamma)_{n+k+1}}&\dots&\frac{1}{(\gamma)_{n+m+k}}\end{vmatrix}.$$

Здесь мы учли, что $c_k=\dfrac{1}{2(\gamma)_k}$. Последний определитель совпадает с определителем $D_{n,m,k}$ из работы [21]. Учитывая его явное выражение (см. равенство (17) из [21]), окончательно получим (1.17).

Перейдем к доказательству эквивалентности (1.18). Раскладывая $\det A(y)$ по элементам первой строки, аналогично, как и при доказательстве леммы 1.5, устанавливаем, что при $n\to\infty$

$$\det A(y)\sim 2\begin{vmatrix}c_n&c_{n-1}&\dots&c_{n-m+1}\\ c_{n+1}&c_n&\dots&c_{n-m+2}\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\ c_{n+m-1}&c_{n+m-2}&\dots&c_n\end{vmatrix}.$$

Отсюда и из леммы 1.2 окончательно получим (1.18). Лемма 1.6 доказана.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.2. Из (1.5) следует, что при любом $x\in\mathbb{R}$

$$F_\gamma(x)-\pi^t_{n,m}(x;F_\gamma)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{q^t_m(x)}\left(e^{i(n+m+k)x}+e^{-i(n+m+k)x}\right)=$$
$$=2Re\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{q^t_m(x)}e^{i(n+m+k)x}=$$
$$=2Re\left\{\frac{\tilde{c}_{n+m+1}}{q^t_m(x)}e^{i(n+m+1)x}\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{\tilde{c}_{n+m+1}}e^{i(k-1)x}\right)\right\}.$$

Из равенств (1.8), (1.9) следует, что

$$\frac{\tilde{c}_{n+m+1}}{q^t_m(x)}=\frac{\det\widetilde{A}(1)}{\det A(y)},\qquad\frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{\tilde{c}_{n+m+1}}=\frac{\det\widetilde{A}(k)}{\det\widetilde{A}(1)}.$$

Учитывая асимптотические равенства (1.16) –(1.18), получаем, что при $n\to\infty$

$$\frac{\tilde{c}_{n+m+1}}{q^t_m(x)}\sim\frac{(-1)^m\,m!(\gamma)_n}{2(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}},$$

$$\frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{\tilde{c}_{n+m+1}}\sim\frac{\prod_{j=1}^{m}(j+k-1)(\gamma+n+j)_{k-1}}{m!}\prod_{j=0}^{m}\frac{(\gamma)_{n+1+j}}{(\gamma)_{n+k+j}}=$$
$$=\frac{(k)_m}{m!(\gamma+n+m+1)_{k-1}}=\frac{C^{k-1}_{m+k-1}}{(\gamma+n+m+1)_{k-1}}.$$

Следовательно, при $n\ge n_0$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{\tilde{c}_{n+m+1}}\le 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{C^{k-1}_{m+k-1}}{(\gamma+n+m+1)_{k-1}}\le$$
$$\le 2\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{m+1}{\gamma+n+m+1}\right)^{k-1}=O\left(\frac{m}{n}\right).$$

Учитывая последние неравенства, окончательно получим, что

$$F_\gamma(x)-\pi^t_{n,m}(x;F_\gamma)=$$
$$=\frac{(-1)^m\,m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}Re\left\{e^{i(n+m+1)x}\left(1+o(1)\right)\right\}.\qquad(1.19)$$

Покажем, что тригонометрические аппроксимации Паде $\pi^t_{n,m}(\cdot;F_\gamma)$ приближают функцию F_γ относительно равномерной нормы со скоростью, асимптотически равной наилучшей.

***Теорема* 1.3.** *Пусть* $F_\gamma\in\mathcal{F}^t$. *Тогда, если* $m(n)=o\left(n^{2/3}\right)$, *то равномерно по всем* m, $0\le m\le m(n)$, *при* $n\to\infty$

$$R^t_{n,m}(F_\gamma)\sim\left\|F_\gamma-\pi^t_{n,m}(\cdot;F_\gamma)\right\|\sim\frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}.$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi(x)=\frac{(-1)^m\,m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}\,e^{i(n+m+1)x}.$$

Из равенства (1.19) следует, что при достаточно больших n знак разности $F_\gamma(x)-\pi_{n,m}(x;F_\gamma)$ совпадает со знаком $Re\varphi(x)$. Когда x пробегает весь промежуток $[0,2\pi)$, точка $(n+m+1)x$ пробегает весь интервал $[0,2\pi(n+m+1))$. Поэтому существуют $2(n+m+1)$ таких действительных чисел x_j, $j=\overline{1,2(n+m+1)}$, что

$$0\le x_1<x_2<\ldots<x_{2(n+m+1)}<2\pi;$$

$$\varphi(x_j)=\frac{(-1)^{m+j-1}\,m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}.$$

Следовательно, в точках x_j разность $F_\gamma(x)-\pi_{n,m}(x;F_\gamma)$ принимает значения с чередующимися знаками. В таком случае, согласно рациональному аналогу теоремы Валле Пуссена (см., например, [24], [25]),

$$R^t_{n,m}(F_\gamma)\ge \min_{1\le j\le 2(n+m+1)}\left|F_\gamma(x_j)-\pi^t_{n,m}(x_j;F_\gamma)\right|\ge$$

$$\ge \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}\big(1-|o(1)|\big).$$

С другой стороны,

$$R^t_{n,m}(F_\gamma)\le \max_{x\in\mathbb{R}}\left|F_\gamma(x)-\pi^t_{n,m}(x;F_\gamma)\right|\le$$

$$\le \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}\big(1+|o(1)|\big).$$

Теорема 1.3 доказана.

2 Доказательство теоремы 0.2

Каждой функции $f\in C[-1,1]$ поставим в соответствие ее индуцированную функцию $\psi(x)=f(\cos x).$ Точно так же, как и в полиномиальном случае (см. [24], [25]), доказывается, что для целых неотрицательных n и m

$$R_{n,m}(f;[-1,1])=R^t_{n,m}(\psi). \qquad (2.1)$$

Так как

$$F_\gamma(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos kx}{(\gamma)_k},$$

то
$$F_\gamma(\arccos x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{T_k(x)}{(\gamma)_k}.$$

Поскольку $f_\gamma(x)$ и $F_\gamma(\arccos x)$ непрерывны и представляются одним и тем же рядом Фурье-Чебышева, то $f_\gamma(x)=F_\gamma(\arccos x),\ \ x\in[-1,1],$ т. е. F_γ является индуцированной функцией для f_γ. Поэтому из (2.1) следует, что

$$R_{n,m}(f_\gamma;[-1,1])=R^t_{n,m}(F_\gamma).$$

Ряд Фурье F_γ содержит только косинусы кратных дуг. Исходя из (1.4), можно сделать вывод о том, что числитель и знаменатель дроби Паде $\pi^t_{n,m}(\cdot;F_\gamma)$ также содержит только косинусы кратных дуг. Поэтому справедливо тождество

$$\pi^t_{n,m}(\arccos x;F_\gamma)=\pi^{ch}_{n,m}(x;f_\gamma),\ \ x\in[-1,1],$$

из которого следует, что индуцированной функцией для $\pi^{ch}_{n,m}(\cdot;f_\gamma)$ является $\pi^t_{n,m}(\cdot;F_\gamma)$. Таким образом, теорема 0.2 является следствием теоремы 1.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернштейн, С.Н.* Экстремальные свойства полиномов / С.Н. Бернштейн. – М.–Л. : ОНТИ, 1937.

2. *Бернштейн, С.Н.* Собрание сочинений: В 4-х томах. Т. 1 / С.Н. Бернштейн. – М. : Изд-во АН СССР, 1952.

3. *Braess, D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z / D. Braess // J. Approx.Theory. – 1984. – Vol. 40, №4. – P. 375–379.

4. *Шталь, Г.* Наилучшие равномерные рациональные аппроксимации $|x|$ на [–1,1] / Г. Шталь // Матем. сборник. – 1992. – Т. 183, № 8. – С. 85–118.

5. *Stahl, H.* Best uniform rational approximation of x^α on [0,1] /H. Stahl // Acta Math. – 2003. – Vol. 190, №2. – P. 241–306.

6. *Аптекарев, А.И.* Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций / А.И. Аптекарев // Матем. сборник. – 2002. – Т. 193, №1. – С. 3–72.

7. *Гончар, А.А.* Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов // Матем. сборник. – 1987. – Т. 134 (176), №3. – С. 306–352.

8. *Newman, D.J.* Rational approximation to $|x|$ / D.J. Newmam // Mich. Math.– 1964. – Vol. 11, №1. – P. 11–14.

9. *Гончар, А.А.* О задачах Е.И. Золотарева, связанных с рациональными функциями / А.А. Гончар // Матем. сборник. – 1968. – Т. 78, № 3. – С. 640–653.

10. *Гончар, А.А.* О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями / А.А. Гончар // Матем. сборник. – 1967. – Т. 78, №4. – С. 630–638.

11. *Буланов, А.П.* Асимптотика для наилучших уклонений $|x|$ от рациональных функций / А.П. Буланов // Матем. сборник. – 1968. – Т. 76, № 2. – С. 288–303.

12. *Вячеславов, Н.С.* Аппроксимация $|x|$ рациональными функциями / Н.С. Вячеславов // Мат. заметки. – 1971. – Т. 16, №2. – С. 163–171.

13. *Вячеславов, Н.С.* Об аппроксимации x^α рациональными функциями / Н.С. Вячеславов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – Т. 44, № 1. – С. 92–110.

14. *Гончар, А.А.* Рациональные аппроксимации аналитических функций / А.А. Гончар // Труды международного конгресса математиков. Беркли. – 1986. – С. 739–748.

15. *Суетин, С.П.* О равномерной сходимости диагональной аппроксимации Паде для гиперэллиптических функций / С.П. Суетин // Матем. сборник. – 2000. – Т. 191, № 9. – С. 81–114.

16. *Суетин, С.П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1. – С. 45–142.

17. *Березкина, Л.Л.* Тригонометрические аппроксимации Паде и наилучшие рациональные приближения : дис. … канд. физ.–мат. наук : 01.01.01 / Л.Л. Березкина. – Минск, 1988.

18. *Та Хонг Куанг.* Аппроксимации Паде и асимптотики наилучших рациональных приближений : дис. … канд. физ.–мат. наук : 01.01.01 / Та Хонг Куанг. – Минск, 1991.

19. *Люк, Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. – М. : Мир, 1980.

20. *Лабыч, Ю.А.* Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье / Ю.А. Лабыч, А.П. Старовойтов // Матем. сборник. – 2009. – Т. 200, № 7. – С. 107–130.

21. *Старовойтов, А.П.* Аппроксимации Паде функций Миттаг-Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. сборник. – 2007. – Т. 198, №7. – С. 109 – 122.

22. *Семерджиев, Хр.* Аппроксимации Паде для функций, заданных тригонометрическими рядами / Хр. Семерджиев // Научные трудове на Пловд. университет. – 1975. – Т. 13, №1. – С. 409–419.

23. *Березкина, Л.Л.* О рациональной аппроксимации целых 2π-периодических функций / Л.Л. Березкина ; БГУ. – Минск, 1986. – Деп. в ВИНИТИ 15.10.86., № 7263-В86 // Журн. Изв. АН БССР. Серия физ.-мат. наук. – Минск. – 1986. – С. 21.

24. *Lorentz, G.G.* Constructive Approximation / G.G. Lorentz, M.V. Golitschek, Y. Makavoz // Advanced problems. – Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1996.

25. *Натансон, И.П.* Конструктивная теория функций / И.П. Натансон.– М. – Л. : ГИТТЛ, 1949.

Поступила в редакцию 17.02.11.