

**О ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ
n-КРАТНО ω -НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ**

Н.Н. Воробьев¹, А.П. Мехович²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель
²Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск

**ON DIRECT DECOMPOSITIONS
OF n-MULTIPLY ω -SATURATED FORMATIONS**

N.N. Vorob'ev¹, A.P. Mekhovich²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel
²P.M. Masherov Vitebsk State University, Vitebsk

Все рассматриваемые группы конечны. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — некоторая система непустых подклассов класса групп \mathfrak{F} . Будем писать $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, если для любых различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ и, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_1 \times \dots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$. Доказана следующая

Теорема. Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} n-кратно ($n \geq 1$) ω -насыщена в том и только в том случае, когда n-кратно ω -насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

Ключевые слова: формация конечных групп, дополняемая подформация, прямое разложение класса групп, ω -локальный спутник, n-кратно ω -насыщенная формация.

All groups considered are finite. Let $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ be a set of non-empty subclasses of a class of groups \mathfrak{F} such that $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ for all distinct $i, j \in I$. We write $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ to denote the collection of all groups of the form $A_1 \times \dots \times A_t$, where $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ for some $i_1, \dots, i_t \in I$. We proved the following theorem.

Theorem. Let $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, where \mathfrak{F}_i is a formation. Then \mathfrak{F} is n-multiply ($n \geq 1$) ω -saturated formation if and only if \mathfrak{F}_i is n-multiply ω -saturated for all $i \in I$.

Keywords: formation of finite groups, complemented subformation, direct decomposition of a class of groups, ω -local satellite, n-multiply ω -saturated formation.

Введение

Напомним, что подформация \mathfrak{M} формации \mathfrak{F} называется дополняемой в \mathfrak{F} [1], если в \mathfrak{F} имеется такая подформация \mathfrak{H} (дополнение к \mathfrak{M} в \mathfrak{F}), что $\mathfrak{F} = \text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. Изучение дополняемых подформаций было начато в [1]. В дальнейшем это понятие анализировалось и применялось в работах многих других авторов (см., в частности, [2]–[22]). В рамках теории дополняемых подформаций возникла следующая полезная конструкция. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – некоторая система непустых подклассов класса конечных групп \mathfrak{F} . Будем писать

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i,$$

если для любых различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ и, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид

$$G = A_1 \times \dots \times A_t, \text{ где } A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}.$$

Всякое представление класса конечных групп \mathfrak{F} в виде $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ называется прямым разложением этого класса [3].

В монографии [3, теорема 4.3.8] доказано, что всякая формация, представимая в виде прямого разложения некоторых формаций, n-кратно насыщена тогда и только тогда, когда n-кратно насыщена каждая из компонент этого разложения. Аналог этого результата для n-кратно локальных классов Фиттинга получен в работе [14]. Однако, как показывает пример работы [13], аналогичный результат для n-кратно композиционных формаций и n-кратно ω -композиционных формаций (см. [21]) неверен.

В данной работе мы показываем, что справедлива следующая

Теорема. Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} n-кратно ($n \geq 1$) ω -насыщена в том и только в том случае, когда n-кратно ω -насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

Все рассматриваемые группы конечны. Используется стандартная терминология [2], [3], [23], [24] и определения и обозначения, введенные в работе [25].

1 Предварительные сведения

Напомним, что формацией называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В дальнейшем символ ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Через $\pi(G)$ обозначено множество всех различных простых делителей порядка группы G . Напомним, что для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N , что $G/N \in \mathfrak{F}$. Неединичная группа называется монолитической, если она имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Символы G_{od} , $F_p(G)$, $O_p(G)$, $O_\omega(G)$ обозначают соответственно наибольшую нормальную подгруппу N группы G со свойством $\omega \cap \pi(H/K) \neq \emptyset$ для каждого композиционного фактора H/K из N , наибольшую нормальную p -нильпотентную подгруппу группы G , наибольшую нормальную p -подгруппу группы G и наибольшую нормальную ω -подгруппу группы G . Пусть f – произвольная функция вида

$$f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}. \quad (1.1)$$

Следуя [25], сопоставим функции f класс групп $LF_\omega(f) = (G \mid G/G_{od} \in f(\omega'))$

и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$.

Если формация \mathfrak{F} такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (1.1), то \mathfrak{F} называется ω -насыщенной формацией с ω -локальным спутником f [25].

Если $\omega = \{p\}$, то ω -насыщенную формацию называют p -насыщенной. Если $\omega = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, то символ ω опускают.

Всякая формация считается 0-кратно ω -насыщенной, а при $n \geq 1$ формация \mathfrak{F} называется n -кратно ω -насыщенной [25], если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все непустые значения ω -локального спутника f являются $(n-1)$ -кратно ω -насыщенными формациями. Если формация \mathfrak{F} n -кратно ω -насыщена для всех натуральных n , то \mathfrak{F} называется totally ω -насыщенной.

Напомним несколько известных утверждений, которые потребуются для доказательства основного результата.

Лемма 1.1 [25, лемма 4]. *Если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ и $G/O_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 1.2 [25, лемма 9]. *Пусть формация $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда либо $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq G_{od}$, либо найдется такое $p \in \omega \cap \pi(G^{\mathfrak{F}})$, что $G/F_p(G) \notin f(p)$.*

2 Основной результат

Доказательство теоремы. *Достаточность.* Пусть каждая из формаций \mathfrak{F}_i n -кратно ω -насыщена, и f_i – ее минимальный l_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник. Пусть $\pi_i = \omega \cap \pi(\mathfrak{F}_i)$. Тогда если $i \neq j$, то по условию $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$. Значит, $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$. Построим ω -локальный спутник f таким образом, что

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } a = \omega', \\ f_i(a), & \text{если } a = p \in \pi_i \text{ для некоторого } i \in I, \\ \emptyset, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \bigcup_{i \in I} \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$.

Пусть $LF_\omega(f) \not\subseteq \mathfrak{F}$, и G – группа минимального порядка из $LF_\omega(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G – монолитическая группа и ее монолит $R = G^{\mathfrak{F}}$. Поскольку $G \in LF_\omega(f)$, то $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, если $p \in \omega \cap \pi(G)$, то $G/F_p(G) \in f(p) \neq \emptyset$. Значит, найдется такое $i \in I$, что $p \in \pi_i$. Отсюда $\omega \cap \pi(G) \subseteq \bigcup_{i \in I} \pi_i$. Если

R – ω' -группа, т. е. $\omega \cap \pi(R) = \emptyset$, то $G_{od} = 1$. Значит,

$$G = G/G_{od} \in f(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Значит, R – pd -группа, т. е. $\omega \cap \pi(R) \neq \emptyset$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(R)$. Тогда $p \in \pi_i$ для некоторого $i \in I$. Если R – неабелева группа, то $F_p(G) = 1$. Поэтому

$$G \simeq G/F_p(G) \in f(p) = f_i(p) \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Пусть R – p -группа. Значит, $R = C_G(R) = F_p(G) = O_p(G)$. Но тогда

$$G/F_p(G) = G/R = G/O_p(G) \in f(p) = f_i(p).$$

Значит, по лемме 1.1 $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие.

Таким образом, $LF_\omega(f) \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что обратное включение неверно, и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus LF_\omega(f)$. Тогда G – монолитическая группа. Поэтому найдется такое $i \in I$, что

$$G \in \mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i).$$

Значит,

$$G/F_p(G) \in f_i(p) = f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)$$

и из того, что $G \in \mathfrak{F}$, получаем

$$G/G_{od} \in \mathfrak{F} = f(\omega').$$

Следовательно,

$$G \in LF_\omega(f).$$

Противоречие. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq LF_\omega(f)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где f – l_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник. Поэтому \mathfrak{F} – n -кратно ω -насыщенная формация.

Необходимость. Пусть теперь формация \mathfrak{F} n -кратно ω -насыщена, и f – ее минимальный I_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник. Пусть $i \in I$ и f_i – такой ω -локальный спутник, что

$$f_i(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}_i, & \text{если } a = \omega', \\ f(a), & \text{если } a = p \in \pi_i, \\ \emptyset, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i)$.

Предположим, что $\mathfrak{F}_i \not\subseteq LF_\omega(f_i)$, и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_i \setminus LF_\omega(f_i)$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $R = G^{LF_\omega(f_i)}$. Поскольку $G \notin LF_\omega(f_i)$, то, согласно лемме 1.2, либо $G^{LF_\omega(f_i)} \not\subseteq G_{\text{од}}$, либо найдется такое $p \in \omega \cap \pi(G^{LF_\omega(f_i)})$, что $G/F_p(G) \notin f_i(p)$. С другой стороны, так как $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$, то $G/G_{\text{од}} \in \mathfrak{F}_i = f_i(\omega')$ и для всех $q \in \omega \cap \pi(G)$ имеет место

$$G/F_q(G) \in f(q) = f_i(q).$$

Противоречие. Итак, $\mathfrak{F}_i \subseteq LF_\omega(f_i)$.

Допустим, что обратное включение неверно, и G – группа минимального порядка из $LF_\omega(f_i) \setminus \mathfrak{F}_i$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}_i}$.

Пусть $p \in \omega \cap \pi(R) \subseteq \omega \cap \pi(G)$. Тогда из $G \in LF_\omega(f_i)$ следует, что $G/F_p(G) \in f_i(p)$. Значит, $f_i(p) \neq \emptyset$ и по построению ω -локального спутника f_i имеем $p \in \pi_i$. Итак, $\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_i$.

Кроме того, по построению ω -локального спутника f_i справедливо $f_i \leq f$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому, ввиду монолитичности группы G , найдется такое $j \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_j$. Тогда $\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_j$. Поэтому

$$\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_i \cap \pi_j = \emptyset.$$

Значит, $i = j$, т.е. $G \in \mathfrak{F}_i$. Противоречие. Следовательно, $LF_\omega(f_i) \subseteq \mathfrak{F}_i$. Таким образом, $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i)$, где f_i – I_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник. Поэтому \mathfrak{F}_i – n -кратно ω -насыщенная формация.

Теорема доказана.

3 Некоторые приложения

Отметим некоторые следствия, получаемые из основного результата.

Следствие 3.1. Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} тотально ω -насыщена в том и только в том случае, когда тотально ω -насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

Если в следствии 3.1 положить $\omega = \mathbb{P}$, то получим

Следствие 3.2 [3]. Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} тотально насыщена в том и только в том случае, когда тотально насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

При $n = 1$ из теоремы вытекает

Следствие 3.3 [11, теорема 1].

Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} ω -насыщена в том и только в том случае, когда ω -насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

В случае $\omega = \mathbb{P}$ получим

Следствие 3.4 [3, теорема 4.3.8; 9, теорема].

Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} n -кратно насыщена в том и только в том случае, когда n -кратно насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

При $\omega = \{p\}$ справедливо

Следствие 3.5. Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} n -кратно p -насыщена в том и только в том случае, когда n -кратно p -насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

Если $n = 1$ и $\omega = \{p\}$, то справедливо

Следствие 3.6. Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} p -насыщена в том и только в том случае, когда p -насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. О формациях с заданными системами подформаций / А.Н. Скиба // Подгрупповое строение конечных групп : Труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН БССР ; под ред. В.С. Монахова. – Минск, 1981. – С. 155–180.
2. Doerk, K. Finite soluble groups, de Gruyter Exp. Math., 4 / К. Doerk, Т. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
4. Каморников, С.Ф. Подгрупповые факторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 2003. – 254 с.
5. Каморников, С.Ф. Пронормальные проекторы конечных ω -разрешимых групп / С.Ф. Каморников // Вопросы алгебры. – 1986. – Вып. 2. – С. 80–86.
6. Ведерников, В.А. Вполне факторизуемые формации конечных групп / В.А. Ведерников // Вопросы алгебры. – 1990. – Вып. 5. – С. 28–34.
7. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников,

- В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры : сб. ст. / Ин-т математики АН Украины ; отв. ред. Н.С. Черников. – Киев, 1993. – С. 27–54.
8. Скиба, А.Н. О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 10. – С. 75–80.
9. Скиба, А.Н. О дополняемых подформациях / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 55–62.
10. Сафонов, В.Г. О кратных локальных формациях с ограниченным нильпотентным дефектом / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 112–127.
11. Воробьев, Н.Н. О прямых разложениях ω -локальных формаций и классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 1997. – № 3. – С. 55–58.
12. Жевнова, Н.Г. p -насыщенные формации с дополняемыми p -насыщенными подформациями / Н.Г. Жевнова, А.Н. Скиба // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 23–29.
13. Близнец, И.В. О прямых разложениях композиционных формаций / И.В. Близнец, Н.Н. Воробьев // Вопросы алгебры. – 1998. – Вып. 12. – С. 106–112.
14. Воробьев, Н.Н. О булевых решетках n -кратно локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 1999. – Т. 40, № 3. – С. 523–530.
15. Воробьев, Н.Н. О булевых решетках n -кратно ω -локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–18. – 2002. – № 5 (14). – С. 43–46.
16. Васильев, А.Ф. К проблеме Кегеля-Шеметкова о решетках обобщенно субнормальных подгрупп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников // Алгебра и логика. – 2002. – Т. 41, № 4. – С. 411–428.
17. Скачкова, Ю.А. Булевы решетки кратко Ω -расслоенных формаций / Ю.А. Скачкова // Дискретная математика. – 2002. – Т. 14, вып. 3. – С. 42–46.
18. Камозина, О.В. Булевы решетки n -кратно Ω -биканонических классов Фиттинга / О.В. Камозина // Дискретная математика. – 2002. – Т. 14, вып. 3. – С. 47–53.
19. Воробьев, Н.Н. О булевых решетках частично насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, В.О. Побойнев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 37–42.
20. Aniskov, V.V. On local formations with complemented local subformations / V.V. Aniskov, A.N. Skiba. – Gomel, 1993. – 10 p. – (Preprint / Gomel State University ; № 5).
21. Близнец, И.В. Разложимые ω -композиционные формации / И.В. Близнец, А.Н. Скиба. – Гомель, 2002. – 15 с. – (Препринт / Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины ; № 33).
22. Эйдинов, М.И. О формациях с дополняемыми подформациями / М.И. Эйдинов // Тезисы докл. IX Всесоюзн. симпозиума по теории групп. – М., 1984. – С. 101.
23. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
24. Скиба, А.Н. Формации алгебраических систем / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1989. – 256 с.
25. Скиба, А.Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
- Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант БРФФИ–РФФИ Ф10Р-231).*

Поступила в редакцию 31.01.11.