Проблемы физики, математики и техники, № 4 (5), 2010

МАТЕМАТИКА

УДК 517.2

СЕТЬ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ, ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК И СИГНАЛОВ

О.В. Якубович[1], **В.Е. Евдокимович**[2]

[1]Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины, Гомель
[2]Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

QUEUEING NETWORK WITH RANDOM STAYING TIME OF DIFFERENT TYPES OF POSITIVE, NEGATIVE CUSTOMERS AND SIGNALS

O.V. Yakubovich[1], **V.E. Evdokimovich**[2]

[1]F. Scorina Gomel State University, Gomel
[2]Belarusian State University of Transport, Gomel

В работе исследуется модель открытой сети с различными типами положительных, отрицательных заявок и сигналов. Время пребывания в каждом узле поступающих требований ограничено случайной величиной, имеющей показательное распределение. Стационарное распределение вероятностей состояний сети найдено в форме произведения множителей, представляющих собой стационарные распределения изолированных узлов.

Ключевые слова: *сеть массового обслуживания, различные типы положительных, отрицательных заявок и сигналов, стационарное распределение.*

This paper considers an open queueing network with different types of positive, negative customers and signals. Staying time of arriving demands in each node is the random value having exponential distribution. Stationary distribution of the network states is found in product form and each multiplier represents stationary distribution of the isolated nodes.

Keywords: *queueing network, different types of positive, negative customers and signals, stationary distribution.*

Введение

Сети массового обслуживания являются адекватными математическими моделями разнообразных случайных процессов в информационно-вычислительных сетях, сетях передачи данных, связи и многих других объектах, имеющих сетевую структуру. В аналитических исследованиях стационарного функционирования сетей массового обслуживания центральным всегда является вопрос нахождения стационарного распределения, которое является отправной точкой большинства исследований в теории массового обслуживания. В последнее время появляется все больше новых интересных моделей, позволяющих учитывать требования современности и возможность применения к сложным реальным объектам, имеющим сетевую структуру. Большой интерес исследователей вызывают модели с отрицательными заявками и сигналами, отличающихся от обычных положительных заявок тем, что они не нуждаются в реальном обслуживании, а оказывают некоторое воздействие на состояние системы, например, отрицательные заявки уменьшают очередь обычных заявок непустой системы на единицу. Отрицательные заявки были введены в рассмотрение Геленбе [1], [2].

В настоящей работе рассматривается модель открытой сети, в которую поступают пуассоновские потоки различных типов положительных, отрицательных заявок и сигналов. Очереди в узлах сети формируются из положительных заявок, отрицательных заявок и сигналов. Обслуживания требуют только положительные заявки. Время пребывания в очереди узла для положительных, отрицательных заявок и сигналов ограничено случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром различным для каждого типа и обратно пропорциональным количеству требований данного типа в очереди узла. Отрицательная заявка, время пребывания в узле которой закончилось, уменьшает количество положительных заявок соответствующего типа в узле на единицу, если такие есть в узле. Сигнал после окончания времени пребывания оказывает одно из следующих воздействий на очередь положительных заявок соответствующего типа, находящихся в узле: уменьшает длину очереди на единицу, если очередь положительных заявок непуста, увеличивает длину очереди на единицу или не производит никакого изменения. Данное предположение может найти применение в моделировании реальных сетей связи, поскольку при передаче запроса (положительной заявки) часто устанавливается так называемый тайм-аут, истечение которого означает, что передача запроса не укладывается в планируемый интервал времени, после чего запрос удаляется из очереди. Отрицательные заявки и сигналы в рассматриваемой модели, например, могут описывать вирусы в системе, которые начинают действовать через случайное время, при этом сигнал либо «исправляется» – становится положительной заявкой, либо «несет разрушение», уничтожает положительную заявку в системе – становится отрицательной заявкой, либо «отражается», «уничтожается» – не оказывает воздействия на узел.

1 Изолированный узел

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает $3M$ независимых пуассоновских потоков требований с параметрами $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \ldots, \lambda_M^+, \lambda_1^-, \lambda_2^-, \ldots, \lambda_M^-, \lambda_1^s, \lambda_2^s, \ldots, \lambda_M^s$, при этом λ_k^+ есть интенсивность поступления положительных заявок k-го типа, λ_k^- есть интенсивность поступления отрицательных заявок k-го типа, λ_k^s есть интенсивность поступления сигналов k-го типа в данную систему. Положительная заявка, поступившая в систему, увеличивает длину очереди положительных заявок соответствующего типа в системе на единицу и требует обслуживания. В системе находится M экспоненциальных приборов, k-ый прибор обслуживает положительные заявки k-го типа. Заявки обслуживаются в порядке поступления. Времена обслуживания заявок в системе независимы, не зависят от процессов поступления и для положительных заявок k-го типа имеют показательное распределение с параметром μ_k $(k = \overline{1,M})$. Каждая положительная заявка k-го типа, находящаяся в системе, имеет время пребывания, ограниченное экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром $\nu_k(n_k) = \dfrac{\nu_k}{n_k}$ для $n_k \geq 1$, где n_k – число положительных заявок k-го типа в системе, ν_k – некоторая положительная постоянная, $\nu_k(0) = 0$. Отрицательная заявка типа k, поступившая в систему, увеличивает длину очереди отрицательных заявок соответствующего типа в системе на единицу. Каждая отрицательная заявка типа k, находящаяся в системе, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром $\tau_k(m_k) = \dfrac{\tau_k}{m_k}$ для $m_k \geq 1$, где m_k – число отрицательных заявок k-го типа в системе, τ_k – некоторая положительная постоянная, $\tau_k(0) = 0$. После окончания времени пребывания в системе отрицательная заявка уменьшает длину соответствующей очереди на одну положительную заявку типа k, если в системе есть положительные заявки соответствующего типа, не производит никаких воздействий на систему, если в системе нет положительных заявок соответствующего типа. Сигнал типа k, поступивший в систему, увеличивает длину очереди сигналов соответствующего типа в системе на единицу. Каждый сигнал типа k, находящийся в системе, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром $\omega_k(l_k) = \dfrac{\omega_k}{l_k}$ для $l_k \geq 1$, где l_k – число сигналов k-го типа в системе, ω_k – некоторая положительная постоянная, $\omega_k(0) = 0$. После окончания времени пребывания в системе сигнал уменьшает длину соответствующей очереди на одну положительную заявку типа k с вероятностью $p(k,-)$, если в системе есть положительные заявки соответствующего типа, не производит никаких воздействий на систему, если в системе нет положительных заявок соответствующего типа, увеличивает длину очереди на одну положительную заявку типа k с вероятностью $p(k,+)$, не производит никаких изменений с вероятностью $p(k,0)$. Очевидно, что

$$p(k,-) + p(k,+) + p(k,0) = 1$$

для всех $k = \overline{1,M}$. Процессы поступления, обслуживания и пребывания в системе независимы.

Состояние рассматриваемой системы массового обслуживания в момент времени t будем характеризовать случайным вектором

$$x(t) = (n(t), m(t), k(t)) =$$
$$= (n_1(t), \ldots, n_M(t), m_1(t), \ldots, m_M(t), l_1(t), \ldots, l_M(t)),$$

где $n_k(t)$ – количество положительных заявок k-го типа в системе в момент t, $m_k(t)$ – количество отрицательных заявок k-го типа в системе в момент t, $l_k(t)$ – количество сигналов k-го типа в системе в момент t. Тогда $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и фазовым пространством состояний

$$X = \{x = (n, m, l) =$$
$$= (n_1, \ldots, n_M, m_1, \ldots, m_M, l_1, \ldots, l_M),$$
$$n_i, m_i, l_i = 0, 1, \ldots; i = \overline{1,M}\}.$$

Предположим, что $\{p(x), x \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$.

Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют вид:

$$p(x)\sum_{k=1}^{M}\Big[\lambda_k^+ + \lambda_k^- + \lambda_k^s + (\mu_k + \nu_k)I_{\{n_k \neq 0\}} +$$
$$+ \tau_k I_{\{m_k \neq 0\}} + \omega_k I_{\{l_k \neq 0\}}\Big] =$$

$$=\sum_{k=1}^{M}\Big(\lambda_k^+ p(n-e_k,m,l)I_{\{n_k\neq 0\}}+$$
$$+\lambda_k^- p(n,m-e_k,l)I_{\{m_k\neq 0\}}+$$
$$+\lambda_k^s p(n,m,l-e_k)I_{\{l_k\neq 0\}}+$$
$$+(\mu_k+\nu_k)p(n+e_k,m,l)+\tau_k p(n+e_k,m+e_k,l)+$$
$$+\omega_k p(k,+)p(n-e_k,m,l+e_k)I_{\{n_k\neq 0\}}+$$
$$+\omega_k p(k,-)p(n+e_k,m,l+e_k)+\omega_k(p(k,-)I_{\{n_k=0\}}+$$
$$+p(k,0))p(n,m,l+e_k)+$$
$$+\tau_k p(n,m+e_k,l)I_{\{n_k=0\}}\Big),\quad x=(n,m,l)\in X.$$

Здесь e_k – единичный вектор размерности M с единицей в k-ой позиции, $I_{\{x\}}$ – характеристическая функция, принимающая значение 1, если x истинно, 0 – в противном случае.

***Теорема* 1.1.** *Пусть для любого $k=\overline{1,M}$ выполнено условие*

$$\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k,+)}{\lambda_k^- + \lambda_k^s p(k,-)+\mu_k+\nu_k}<1,\quad \frac{\lambda_k^-}{\tau_k}<1,\quad \frac{\lambda_k^s}{\omega_k}<1$$

тогда марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид:

$$p(n_1,\ldots,n_M,m_1,\ldots,m_M,l_1,\ldots,l_M)=$$
$$=\prod_{k=1}^{M}\rho_1^{n_k}\rho_2^{m_k}\rho_3^{l_k}p_k(0),$$

где

$$\rho_1=\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k,+)}{\lambda_k^- + \lambda_k^s p(k,-)+\mu_k+\nu_k},\ \rho_2=\frac{\lambda_k^-}{\tau_k},\ \rho_3=\frac{\lambda_k^s}{\omega_k},$$
$$p_k(0)=(1-\rho_1)(1-\rho_2)(1-\rho_3).$$

Доказательство проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности находится из теоремы Фостера.

2 Открытая сеть

Рассмотрим открытую сеть, состоящую из N узлов со структурой, описанной выше. В сеть поступает простейший поток положительных, отрицательных заявок и сигналов интенсивности λ^+, λ^- и λ^s соответственно. Каждая положительная заявка входного потока независимо от других заявок направляется в i-ый узел и становится положительной заявкой k-го типа с вероятностью $p^+_{0(i,k)}$ $(i=\overline{1,N},k=\overline{1,M})$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}p^+_{0(i,k)}=1$. Положительная заявка, поступившая в узел, увеличивает длину очереди положительных заявок соответствующего типа в узле на единицу и требует обслуживания. Каждая отрицательная заявка входного потока независимо от других направляется в i-ый узел, становится отрицательной заявкой k-го типа с вероятностью $p^-_{0(i,k)}$ $(i=\overline{1,N},k=\overline{1,M})$ и увеличивает длину очереди отрицательных заявок соответствующего типа в узле на единицу. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}p^-_{0(i,k)}=1$. Каждая отрицательная заявка типа k, находящаяся в i-ом узле, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром $\tau_{(i,k)}(m_{(i,k)})=\frac{\tau_{(i,k)}}{m_{(i,k)}}$ для $m_{(i,k)}\geq 1$, где $m_{(i,k)}$ – количество отрицательных заявок k-го типа в i-ом узле, $\tau_{(i,k)}$ – некоторая положительная постоянная, $\tau_{(i,k)}(0)=0$ $(i=\overline{1,N},k=\overline{1,M})$. После окончания времени пребывания в узле отрицательная заявка уменьшает длину соответствующей очереди положительных заявок типа k в i-ом узле на единицу, если в узле есть положительные заявки соответствующего типа, не производит никаких воздействий на узел, если в узле нет положительных заявок соответствующего типа. Каждый сигнал входного потока независимо от других направляется в i-ый узел, становится сигналом k-го типа с вероятностью $p^s_{0(i,k)}$ $(i=\overline{1,N},k=\overline{1,M})$ и увеличивает длину очереди сигналов соответствующего типа в узле на единицу. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}p^s_{0(i,k)}=1$. Каждый сигнал типа k, находящийся в i-ом узле, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром $\omega_k(l_{(i,k)})=\frac{\omega_k}{l_{(i,k)}}$ для $l_{(i,k)}\geq 1$, где $l_{(i,k)}$ – число сигналов k-го типа в системе, ω_k – некоторая положительная постоянная, $\omega_k(0)=0$. После окончания времени пребывания в узле сигнал уменьшает длину соответствующей очереди положительных заявок типа k в i-ом узле на единицу с вероятностью $p_i(k,-)$, если в узле есть положительные заявки соответствующего типа, не производит никаких воздействий на состояние узла, если в узле нет положительных заявок соответствующего типа, увеличивает длину соответствующей очереди положительных заявок типа k в i-ом узле на единицу с вероятностью $p_i(k,+)$, не производит никаких изменений с вероятностью $p_i(k,0)$. Очевидно, что $p_i(k,-)+p_i(k,+)+p_i(k,0)=1$ для всех $k=\overline{1,M}$, $i=\overline{1,N}$. В каждом узле находится M экспоненциальных приборов, k-ый прибор обслуживает положительные заявки k-го типа. Заявки обслуживаются в порядке поступления. Времена обслуживания различных заявок независимы, не зависят от процесса поступления и для положительных заявок k-го типа в i-ом узле имеют показательное распределение с параметром $\mu_{(i,k)}$ $(i=\overline{1,N},\ \ k=\overline{1,M})$. Каждая положительная заявка k-го типа, пребывающая в i-ом узле, имеет время пребывания, ограниченное экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром $\nu_{(i,k)}(n_{(i,k)})=\dfrac{\nu_{(i,k)}}{n_{(i,k)}}$ для $n_{(i,k)}\geq 1$, где $n_{(i,k)}$ – количество заявок типа k в i-ом узле, $\nu_{(i,k)}$ – некоторая положительная постоянная, $\nu_{(i,k)}(0)=0$ $\ (i=\overline{1,N},k=\overline{1,M})$. Каждая положительная заявка k-го типа, время пребывания которой в i-ом узле закончилось, продолжает движение по сети и ведет себя так же, как положительные заявки k-го типа, получившие обслуживание в i-ом узле $(i=\overline{1,N},k=\overline{1,M})$. Каждая положительная заявка k-го типа после завершения обслуживания или окончания времени пребывания в i-ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j-ый узел и становится положительной заявкой r-го типа с вероятностью $p^{+}_{(i,k)(j,r)}$ или отрицательной заявкой r-го типа с вероятностью $p^{-}_{(i,k)(j,r)}$, а с вероятностью $p_{(i,k)0}$ покидает сеть.

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}(p^{+}_{(i,k)(j,r)}+p^{-}_{(i,k)(j,r)})+p_{(i,k)0}=1$$

$$(i=\overline{1,N},k=\overline{1,M}).$$

Будем предполагать, что матрица маршрутизации P неприводима. Процессы поступления, обслуживания и пребывания в сети независимы.

Нелинейные уравнения трафика для $i=\overline{1,N},k=\overline{1,M}$ имеют вид:

$$\varepsilon^{+}_{(i,k)}=\lambda^{+}p^{+}_{0(i,k)}+\varepsilon^{s}_{(i,k)}p_i(k,+)+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\frac{\varepsilon^{+}_{(j,r)}(\mu_{(j,r)}+\nu_{(j,r)})}{\mu_{(j,r)}+\nu_{(j,r)}+\varepsilon^{-}_{(j,r)}+\varepsilon^{s}_{(j,r)}p_j(r,-)}p^{+}_{(j,r)(i,k)},$$
$$\varepsilon^{-}_{(i,k)}=\lambda^{-}p^{-}_{0(i,k)}+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\frac{\varepsilon^{+}_{(j,r)}(\mu_{(j,r)}+\nu_{(j,r)})}{\mu_{(j,r)}+\nu_{(j,r)}+\varepsilon^{-}_{(j,r)}+\varepsilon^{s}_{(j,r)}p_j(r,-)}p^{-}_{(j,r)(i,k)},$$
$$\varepsilon^{s}_{(i,k)}=\lambda^{s}p^{s}_{0(i,k)}+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\frac{\varepsilon^{+}_{(j,r)}(\mu_{(j,r)}+\nu_{(j,r)})}{\mu_{(j,r)}+\nu_{(j,r)}+\varepsilon^{-}_{(j,r)}+\varepsilon^{s}_{(j,r)}p_j(r,-)}p^{s}_{(j,r)(i,k)}.$$

Доказательство существования решения нелинейных уравнений трафика проводится с помощью теоремы Брауэра о неподвижной точке [3].

Состояние сети массового обслуживания в момент времени t будем характеризовать случайным вектором $x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_N(t)\right)$, где $x_i(t)=\left(n_{(i,1)}(t),\ldots,n_{(i,M)}(t),\ m_{(i,1)}(t),\ldots,m_{(i,M)}(t),\right.$ $\left.l_{(i,1)}(t),\ldots,l_{(i,M)}(t)\right)$, описывает состояние i-го узла, то есть $n_{(i,k)}(t)$ – число заявок k-го типа, $m_{(i,k)}(t)$ – число отрицательных заявок k-го типа, $l_{(i,k)}(t)$ – число сигналов k-го типа в i-ом узле в момент времени t $\ (i=\overline{1,N},k=\overline{1,M})$, $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и пространством состояний

$$X=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_N),\,x_i=(n_{(i,1)},\ldots,n_{(i,M)},$$
$$m_{(i,1)},\ldots,m_{(i,M)},l_{(i,1)},\ldots,l_{(i,M)}),$$
$$n_{(i,k)},m_{(i,k)},l_{(i,k)}=0,1,2,\ldots;\,i=\overline{1,N},\,k=\overline{1,M}\}.$$

Пусть $\{p(x),x\in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$.

Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют вид:

$$p(x)\Big[\lambda^{+}+\lambda^{-}+\lambda^{s}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}(\mu_{(i,k)}+\nu_{(i,k)})I_{\{n_{(i,k)}\neq 0\}}+$$
$$+\tau_{(i,k)}I_{\{m_{(i,k)}\neq 0\}}+\omega_{(i,k)}I_{\{l_{(i,k)}\neq 0\}}\Big]=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}\Big[p(x-e_{(i,k)})\lambda^{+}p^{+}_{0(i,k)}I_{\{n_{(i,k)}\neq 0\}}+$$
$$+p(x-e_{(i,M+k)})\lambda^{-}p^{-}_{0(i,k)}I_{\{m_{(i,k)}\neq 0\}}+$$
$$+p(x-e_{(i,2M+k)})\lambda^{s}p^{s}_{0(i,k)}I_{\{l_{(i,k)}\neq 0\}}+$$
$$+p(x+e_{(i,k)})(\mu_{(i,k)}+\nu_{(i,k)})p_{(i,k)0}+$$
$$+p(x+e_{(i,k)}+e_{(i,M+k)})\tau_{(i,k)}+$$
$$+p(x+e_{(i,k)}+e_{(i,2M+k)})\omega_{(i,k)}p_i(k,-)+$$
$$+p(x+e_{(i,2M+k)})\omega_{(i,k)}(p_i(k,0)+p_i(k,-)I_{\{n_{(i,k)}=0\}})+$$
$$+p(n+e_{(i,M+k)})\tau_{(i,k)}I_{\{n_{(i,k)}=0\}}+$$
$$+p(n-e_{(i,k)}+e_{(i,2M+k)})\omega_{(i,k)}p_i(k,+)I_{\{n_{(i,k)}\neq 0\}}+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\Big[p(x+e_{(i,k)}-e_{(j,r)})(\mu_{(i,k)}+\nu_{(i,k)})p^{+}_{(i,k)(j,r)}I_{\{n_{(j,r)}\neq 0\}}+$$
$$+p(x+e_{(i,k)}-e_{(j,M+r)})(\mu_{(i,k)}+\nu_{(i,k)})p^{-}_{(i,k)(j,r)}I_{\{m_{(j,r)}\neq 0\}}+$$
$$+p(x+e_{(i,k)}-e_{(j,2M+r)})(\mu_{(i,k)}+\nu_{(i,k)})p^{s}_{(i,k)(j,r)}I_{\{l_{(j,r)}\neq 0\}}\Big]\Big],$$
$$x\in X.$$

Здесь $e_{(i,k)}$ – единичный вектор размерности $(3M\cdot N)$ с единицей в $(3M(i-1)+k)$-ой позиции.

***Теорема* 2.1.** *Пусть для любых* $i=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,M}$ *выполнено условие*

$$\frac{\varepsilon^{+}_{(i,k)}}{\mu_{(i,k)}+\nu_{(i,k)}+\varepsilon^{-}_{(i,k)}+\varepsilon^{s}_{(i,k)}p_i(k,-)}<1,$$

$$\frac{\varepsilon^{-}_{(i,k)}}{\tau_{(i,k)}} < 1, \quad \frac{\varepsilon^{s}_{(i,k)}}{\omega_{(i,k)}} < 1,$$

тогда марковский процесс $x(t)$ *эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний сети имеет следующий вид:*

$$p(x) = p_1(x_1)\,p_2(x_2)\ldots p_N(x_N), \quad x \in X,$$

где

$$p(x_i) = \prod_{k=1}^{M}\left[\rho_{1(i,k)}\right]^{n_{(i,k)}} \cdot \left[\rho_{2(i,k)}\right]^{m_{(i,k)}} \cdot \left[\rho_{3(i,k)}\right]^{l_{(i,k)}} p_{(i,k)}(0),$$

$$\rho_{1(i,k)} = \frac{\varepsilon^{+}_{(i,k)}}{\mu_{(i,k)} + \nu_{(i,k)} + \varepsilon^{-}_{(i,k)} + \varepsilon^{s}_{(i,k)} p_i(k,-)},$$

$$\rho_{2(i,k)} = \frac{\varepsilon^{-}_{(i,k)}}{\tau_{(i,k)}}, \; \rho_{3(i,k)} = \frac{\varepsilon^{s}_{(i,k)}}{\omega_{(i,k)}},$$

$$p_{(i,k)}(0) = (1-\rho_{1(i,k)})(1-\rho_{2(i,k)})(1-\rho_{3(i,k)}),$$

а $(\varepsilon^{+}_{(i,k)}, \varepsilon^{-}_{(i,k)}, \varepsilon^{s}_{(i,k)}, i = \overline{1,N}, k = \overline{1,M})$ *находятся как решение нелинейных уравнений трафика.*

Доказательство теоремы проводится стандартным образом, подстановкой стационарного распределения в уравнения равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe, E.* Stability of product-form G-networks / E. Gelenbe, R. Schassberger // Probab. Eng. and Inf. Sci. – 1992. – Vol. 6. – P. 271–276.

2. *Gelenbe, E.* Product-form networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // J. Appl. Prob. – 1991. – Vol. 28. – P. 656–663.

3. *Данфорд, Н.* Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М. : ИЛ, 1962. – 522 с.

Поступила в редакцию 15.11.10.