Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 5(14), Вопросы алгебры — 18, 2002
2000 Mathematics Subject Classification: 20D10

Алгебраичность решетки τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций

И.П.Шабалина

1. Введение

Все рассматриваемые нами группы конечны. Используется стандартная терминология [1, 2]. Класс групп называется формацией, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений.

Напомним, что подгрупповой функтор Скибы τ [3] сопоставляет каждой группе G такую систему её подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

В дальнейшем τ обозначает некоторый фиксированный подгрупповой функтор Скибы. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$.

Напомним теперь некоторые определения и обозначения работы [4].

Всякую функцию вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}$$

называют ω-локальным спутником.

Символ $G_{\omega d}$ служит для обозначения наибольшей нормальной подгруппы в G, у которой каждый композиционный фактор H/K — ωd-группа (т.е. порядок группы H/K делится хотя бы на одно число из ω). Полагают $G_{\omega d} = 1$, если G не имеет факторов с таким свойством.

Пусть f — произвольный ω-локальный спутник. Тогда символом $\mathrm{LF}_{\omega}(f)$ обозначают класс групп

$$(G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_{\omega}(f)$ для некоторого ω-локального спутника f, то говорят, что она ω-локальна, а f — ω-локальный спутник этой формации. Спутник f называется τ-значным, если каждое его значение является τ-замкнутой формацией.

Дадим теперь индуктивное определение n-кратно ω-локальной формации. Всякую формацию считают 0-кратно ω-локальной. При $n \geqslant 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно ω-локальной , если $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_{\omega}(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-локальными формациями.

Можно показать, что множество всех τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций является полной решеткой.

В монографии А.Н. Скибы [3] доказана алгебраичность решетки всех τ-замкнутых n-кратно локальных формаций (см. раздел 4.4 книги [3]). Развивая этот результат, мы докажем, что для любого непустого множества простых чисел ω решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций является алгебраической.

2. Некоторые предварительные результаты

Для доказательства основного результата нам необходимо исследовать некоторые свойства τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций, используя подход к определению ω-локальных формаций, предложенный профессором А. В. Ведерниковым.

Пусть f — произвольный ω-локальный спутник. Символом $\mathrm{LF}_\omega\langle f\rangle$ обозначим класс групп

$$(G \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)).$$

Если теперь для формации $\mathfrak{F}$ мы имеем равенство $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega\langle f\rangle$, то говорим, что f ω-локальный V-спутник формации $\mathfrak{F}$. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то f будем называть внутренним ω-локальным V-спутником формации $\mathfrak{F}$.

Дадим теперь индуктивное определение n-кратно ω_V-локальной формации. Всякую формацию считаем 0-кратно ω_V-локальной. При $n \geqslant 1$ формацию $\mathfrak{F}$ будем называть n-кратно ω_V-локальной , если $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega\langle f\rangle$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω_V-локальными формациями.

Лемма 2.1. *Если $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega\langle f\rangle$, где f — τ-значный ω-локальный спутник, то формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega\langle f\rangle$, где f — ω-локальный спутник, все значения которого τ-замкнуты. Покажем, что $\mathfrak{F}$ τ-замкнута.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $H \in \tau(G)$. Понятно, что $HF_p(G)/F_p(G) \in \tau(G/F_p(G))$. Так как $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$ и все значения f τ-замкнуты, то $HF_p(G)/F_p(G) \in$ $\in f(p)$. Имеем

$$H/F_p(G) \cap H \cong HF_p(G)/F_p(G) \in f(p).$$

Поскольку $F_p(G) \cap H \subseteq F_p(H)$, то

$$H/F_p(H) \cong (H/(F_p(G) \cap H))/(F_p(H)/(F_p(G) \cap H)) \in f(p).$$

Понятно также, что

$$H/O_\omega(G) \cap H \cong HO_\omega(G)/O_\omega(G) \in \tau(G/O_\omega(G)) \in f(\omega'),$$

так как все значения f τ-замкнуты. Поскольку $O_\omega(G) \cap H \subseteq O_\omega(H)$, то

$$H/O_\omega(H) \cong (H/(O_\omega(G) \cap H))/(O_\omega(H)/(O_\omega(G) \cap H)) \in f(\omega').$$

Получили, что $H/F_p(H) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(H)$ и $H/O_\omega(H) \in f(\omega')$. Из сказанного заключаем, что $H \in \mathfrak{F}$. Значит, формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута. Лемма доказана. $\square$

Пересечение всех τ-замкнутых n-кратно ω_V-локальных формаций, содержащих данную группу G, снова является τ-замкнутой n-кратно ω_V-локальной формацией. Такую формацию будем обозначать через $l_\tau^{\omega_V^n}\,\mathrm{form}(G)$ и называть однопорождённой $l_\tau^{\omega_V^n}$-формацией, или однопорождённой τ-замкнутой n-кратно ω_V-локальной формацией.

Пусть $\mathfrak{F}$ —произвольная совокупность групп, p — простое число. Полагают

$$\mathfrak{F}(F_p) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{F}), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}); \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Минимальным τ-значным n-кратно ω_V-локальным V-спутником формации $\mathfrak{F}$ будем называть её ω-локальный V-спутник f со следующими значениями:

$$f(a) = \begin{cases} l_\tau^{\omega_V^n} \operatorname{form}(\mathfrak{F}(F_p)), & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F}), \\ \varnothing, & \text{если } a = p \notin \omega \cap \pi(\mathfrak{F}), \\ l_\tau^{\omega_V^n} \operatorname{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}), & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Лемма 2.2. *Если $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega\langle f\rangle$ и $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p)$ для некоторого $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Прежде заметим, что поскольку $O_p(G) \subseteq F_p(G)$, то

$$G/F_p(G) \cong (G/O_p(G))/(F_p(G)/O_p(G)) \in f(p).$$

А поскольку $O_\omega(G/O_p(G)) = O_\omega(G)/O_p(G)$ и для всех $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$ имеет место

$$G/F_q(G) \cong (G/O_p(G))/(F_q(G)/O_p(G)) = (G/O_p(G))/F_q(G/O_p(G)) \in f(q)$$

и

$$G/O_\omega(G) \cong (G/O_p(G))/(O_\omega(G)/O_p(G)) \cong (G/O_p(G))/(O_\omega(G/O_p(G)) \in f(\omega'),$$

то $G \in \mathrm{LF}_\omega\langle f\rangle$. Лемма доказана. □

Лемма 2.3. *Если $\mathfrak{F} = l_\tau^{\omega_V^{n+1}} \operatorname{form}(\mathfrak{X})$, где $n \geqslant 0$ и f — минимальный $l_\tau^{\omega_V^n}$-значный V-спутник формации $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:*

1) *$f(\omega') = l_\tau^{\omega_V^n} \operatorname{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;*

2) *$f(p) = l_\tau^{\omega_V^n} \operatorname{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ для всех $p \in \omega$;*

3) *$\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega\langle g\rangle$, где $g(\omega') = \mathfrak{F}$ и $g(p) = f(p)$ при всех $p \in \omega$.*

Доказательство. Докажем утверждения 1) и 2). Пусть t — такой спутник, что

$$t(a) = \begin{cases} l_\tau^{\omega_V^n} \operatorname{form}(\mathfrak{X}(F_p)), & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X}), \\ \varnothing, & \text{если } a = p \notin \omega \cap \pi(\mathfrak{X}), \\ l_\tau^{\omega_V^n} \operatorname{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Покажем, что $t = f$. Пусть $\mathfrak{M} = \mathrm{LF}_\omega\langle t\rangle$. Покажем, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и $p \in \omega \cap \cap\, \pi(\mathfrak{X})$. По определению класса $\mathfrak{X}(F_p)$ мы имеем

$$G/F_p(G) \in \mathfrak{X}(F_p).$$

Значит, тем более

$$G/F_p(G) \in l_\tau^{\omega_V^n} \operatorname{form}(\mathfrak{X}(F_p)) = t(p).$$

Аналогично видим, что

$$G/O_\omega(G) \in t(\omega').$$

Значит, $G \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$. Понятно, что $t(a) \in l_\tau^{\omega_V^n}$ для любого $a \in \omega \cup \cup\, \{\omega'\}$. Тогда согласно определению формация $\mathfrak{M}$ $(n+1)$-кратно ω_V-локальна и ввиду леммы 1 τ-замкнута. Получили, что $\mathfrak{M} = \mathrm{LF}_\omega\langle t\rangle \in l_\tau^{\omega_V^{n+1}}$. Тогда $l_\tau^{\omega_V^{n+1}} \operatorname{form}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

Пусть f_1 — произвольный $l_\tau^{\omega_V^n}$-значный V-спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда поскольку $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то для любого $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$ имеет место

$$\mathfrak{X}(F_p) \subseteq f_1(p) \text{ и } (G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\omega').$$

Значит, $t(a) \subseteq f_1(a)$ для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ и $t = f$.

Докажем 3). Пусть g — ω-локальный спутник из условия леммы и пусть $\mathfrak{M} = \mathrm{LF}_\omega\langle g\rangle$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F} = g(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p) = g(p)$ для всех $p \in \omega$. Значит, $G \in \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Предположим, что обратное включение неверно и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}}$. Тогда если R — ω'-группа, то $O_\omega(G) = 1$. Значит,

$$G \cong G/O_\omega(G) \in g(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, $\pi(R) \cap \omega \neq \varnothing$. Пусть $p \in \pi(R) \cap \omega$. Если R — неабелева группа, то $F_p(G) = 1$. Поэтому

$$G \simeq G/F_p(G) \in g(p) = f(p) = \mathfrak{N}_p l_\tau^{\omega_V^n} \mathrm{form}(\mathfrak{X}(F_p)) \subseteq \mathfrak{F},$$

что противоречит выбору группы G. Значит, R — p-группа. Поэтому $R = F_p(G) = O_p(G)$. Следовательно,

$$G/O_p(G) \in g(p') = \mathfrak{F}$$

и

$$G/O_p(G) = G/F_p(G) \in g(p) = f(p).$$

Значит, ввиду леммы 2 $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Итак, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Лемма доказана. □

Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный непустой класс групп и пусть F — некоторый ω-локальный спутник. Тогда мы будем говорить, что F — канонический ω-локальный $\mathfrak{F}$-спутник, если $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ для всех $p \in \omega$. Такой спутник называется каноническим ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega(F)$, и мы будем называть его каноническим ω-локальным V-спутником формации $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega\langle f\rangle$.

Лемма 2.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация и F — канонический ω-локальный $\mathfrak{F}$-спутник. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega(F)$;

2) $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega\langle f\rangle$.

Доказательство. Пусть имеет место 1) и пусть $\mathfrak{M} = \mathrm{LF}_\omega\langle f\rangle$. Если $G \in \mathfrak{F}$, тогда $G/O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$. Понятно, что $G/F_p(G) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Из сказанного выше следует, что $G \in \mathfrak{M}$. Итак, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Покажем, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{M}$. Понятно, что

$$G/G_{\omega d} \simeq (G/O_\omega(G))/(G_{\omega d}/O_\omega(G)) = (G/O_\omega(G))/(G/O_\omega(G))_{\omega d} \in \mathfrak{F}.$$

Получили, что $G/G_{\omega d} \in \mathfrak{F}$ и $G/F_p(G) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$. Итак, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Лемма доказана. □

Лемма 2.5 ([2]). *Пусть $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega(F)$ — n-кратно ω-локальная формация, $n \geqslant 1$. Тогда спутник F l^{ω}_{n-1}-значен.*

Лемма 2.6. *Пусть формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H} = \mathrm{LF}_\omega\langle h\rangle$, $\mathfrak{M} = \mathrm{LF}_\omega\langle m\rangle$ и спутники h и m являются внутренними ω-локальными V-спутниками формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega\langle f\rangle$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и*

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega, \\ h(p), & \text{если } p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Лемма 2.7. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega\langle f\rangle$ — n-кратно ω_V-локальная формация, $n \geqslant 1$, где F — канонический ω-локальный $\mathfrak{F}$-спутник. Тогда спутник F $l^{\omega_V}_{n-1}$-значен.*

Доказательство. Проверим сначала, что для любого $p \in \mathbb{P}$ и всякой n-кратно ω_V-локальной формации $\mathfrak{H}$ ($n \geqslant 0$) формация $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ также n-кратно ω_V-локальна. Утверждение очевидно, если $n = 0$. Пусть $n > 0$ и при $n-1$ утверждение верно. Пусть $\mathfrak{H} = \mathrm{LF}_\omega\langle h\rangle$, где h — внутренний $l^{\omega_V}_{n-1}$-значный V-спутник формации $\mathfrak{H}$. Формация $\mathfrak{N}_p$ имеет такой внутренний ω-локальный V-спутник m, что $m(p) = (1)$ и $m(\omega') = (1)$, $m(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$. Нетрудно показать (см. лемму 6), что формация $\mathfrak{M}$ имеет такой V-спутник f, что $f(p) = \mathfrak{H}$, $f(\omega') = \mathfrak{M}$, $f(q) = h(q)$ для всех $q \in \pi(\mathfrak{H}) \setminus \{p\}$ и $f(q) = \varnothing$ для всех $q \notin \{p\} \cup \pi(\mathfrak{H})$. Но согласно нашему предположению $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ — $(n-1)$-кратно ω_V-локальная формация. Значит, $\mathfrak{M}$ — n-кратно ω_V-локальная формация.

Пусть t — такой $l^{\omega_V}_n$-значный V-спутник формации $\mathfrak{F}$, что $t(\omega') = \mathfrak{F}$ и $t(p) = l^{\omega_V}_n \operatorname{form}(\mathfrak{F}(F_p))$ для всех $p \in \omega$. Тогда ввиду леммы 3 $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega\langle t\rangle$. А так как $l^{\omega_V}_{n+1} \subseteq l^{\omega_V}_n$, то t — внутренний $l^{\omega_V}_n$-значный V-спутник формации $\mathfrak{F}$. Применяя теперь лемму 3 в случае, когда τ — тривиальный подгрупповой функтор (т.е. $\tau(G) = \{G\}$ для любой группы G), видим, что $t(p) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ при всех $p \in \omega$. Значит, если $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega\langle f\rangle$, то

$$F(p) = \mathfrak{N}_p l^{\omega_V}_n \operatorname{form}(\mathfrak{F}(F_p)) \in l^{\omega_V}_n.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.8. *Формация $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-локальна тогда и только тогда, когда она n-кратно ω_V-локальна.*

Доказательство. Если $n = 0$, то утверждение верно согласно определению.

Рассмотрим случай $n > 0$ и предположим, что утверждение верно для $n-1$.

Необходимость. Пусть формация $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-локальна и F — канонический спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega(F)$ и согласно леммы 4 $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega\langle f\rangle$. Ввиду леммы 5 спутник F является l^{ω}_{n-1}-значным. Значит, ввиду предположения F — $l^{\omega_V}_{n-1}$-значный V-спутник формации $\mathfrak{F}$. Из сказанного выше заключаем, что формация $\mathfrak{F}$ n-кратно ω_V-локальна.

Достаточность. Пусть формация $\mathfrak{F}$ n-кратно ω_V-локальна и F — канонический V-спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega\langle f\rangle$ и согласно лемме 4 $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega(F)$. Ввиду леммы 7 V-спутник F является $l^{\omega_V}_{n-1}$-значным. Значит, ввиду предположения F — l^{ω}_{n-1} - значный спутник. Принимая во внимание отмеченное выше, приходим к тому, что формация $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-локальна. Лемма доказана. □

Так как класс всех τ-замкнутых n-кратно ω_V-локальных формаций и класс всех τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций совпадают, то можно ввести следующие определения. Пересечение всех τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций, содержащих данную группу G, снова является τ-замкнутой n-кратно ω-локальной формацией. Такую формацию будем обозначать через $l_\tau^{\omega_n}\operatorname{form}(G)$ и называть однопорождённой $l_\tau^{\omega_n}$-формацией, или однопорождённой τ-замкнутой n-кратно ω-локальной формацией. Тогда минимальным τ-значным n-кратно ω-локальным V-спутником формации $\mathfrak{F}$ будем называть её ω-локальный V-спутник f со следующими значениями:

$$f(a)=\begin{cases} l_\tau^{\omega_n}\operatorname{form}(\mathfrak{F}(F_p)), & \text{если } a=p\in\omega\cap\pi(\mathfrak{F}),\\ \varnothing, & \text{если } a=p\notin\omega\cap\pi(\mathfrak{F}),\\ l_\tau^{\omega_n}\operatorname{form}(G/O_\omega(G)\mid G\in\mathfrak{F}), & \text{если } a=\omega'. \end{cases}$$

Таким образом из леммы 3 следует

Лемма 2.9. *Если* $\mathfrak{F}=l_\tau^{\omega_{n+1}}\operatorname{form}(\mathfrak{X})$, *где* $n\geqslant 0$ *и* f *— минимальный* $l_\tau^{\omega_n}$*-значный* V*-спутник формации* $\mathfrak{F}$*, то справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega')=l_\tau^{\omega_n}\operatorname{form}(G/O_\omega(G)\mid G\in\mathfrak{X})$;

2) $f(p)=l_\tau^{\omega_n}\operatorname{form}(\mathfrak{X}(F_p))$ *для всех* $p\in\omega$;

3) $\mathfrak{F}=\mathrm{LF}_\omega\langle g\rangle$, *где* $g(\omega')=\mathfrak{F}$ *и* $g(p)=f(p)$ *при всех* $p\in\omega$.

Лемма 2.10 ([3], с.24). *Для любой совокупности* τ*-замкнутых формаций* $\{\mathfrak{M}_i\mid i\in\in I\}$ *имеет место*

$$\tau\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i)=\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i).$$

Из леммы 9 вытекает

Лемма 2.11. *Пусть* f_i *— минимальный* $l_\tau^{\omega_n}$*-значный* V*-спутник формации* $\mathfrak{F}_i$, $i==1,2$. *Тогда включение* $\mathfrak{F}_1\subseteq\mathfrak{F}_2$ *имеет место в том и только том случае, когда* $f_1\leqslant f_2$.

Для произвольной совокупности $l_\tau^{\omega_n}$-формаций $\{\mathfrak{F}_i\mid i\in I\}$ положим

$$\vee_\tau^{\omega_n}(\mathfrak{F}_i\mid i\in I)=l_\tau^{\omega_n}\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i),$$

в частности,

$$\mathfrak{M}\vee_\tau^{\omega_n}\mathfrak{H}=l_\tau^{\omega_n}\operatorname{form}(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{H}).$$

Пусть $\{f_i\mid i\in I\}$ — некоторая система $l_\tau^{\omega_n}$-значных спутников. Тогда через $\vee_\tau^{\omega_n}(f_i\mid i\in\in I)$ мы обозначим такой спутник f, что

$$f(a)=\begin{cases} l_\tau^{\omega_n}\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}f_i(p)), & \text{если } a=p\in\omega\cap\pi(\mathfrak{F}),\\ \varnothing, & \text{если } a=p\notin\omega\cap\pi(\mathfrak{F}),\\ l_\tau^{\omega_n}\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}f_i(\omega')), & \text{если } a=\omega'. \end{cases}$$

в частности,

$$(f_1\vee_\tau^{\omega_n}f_2)(a)=\begin{cases} l_\tau^{\omega_n}\operatorname{form}(f_1(p)\cup f_2(p)), & \text{если } a=p\in\omega\cap\pi(\mathfrak{F}),\\ \varnothing, & \text{если } a=p\notin\omega\cap\pi(\mathfrak{F}),\\ l_\tau^{\omega_n}\operatorname{form}(f_1(\omega')\cup f_2(\omega')), & \text{если } a=\omega' \end{cases}$$

Лемма 2.12. *Пусть f_i — минимальный $l_\tau^{\omega_{n-1}}$-значный V-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Тогда $\vee_\tau^{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)$ — минимальный $l_\tau^{\omega_{n-1}}$-значный V-спутник формации $\mathfrak{F} = \vee_\tau^{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

Доказательство. Пусть

$$\pi = \pi(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i) = \bigcup_{i \in I} \pi(\mathfrak{F}_i) = \pi(\mathfrak{F}).$$

И пусть $f = \vee_\tau^{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I)$, а h — минимальный $l_\tau^{\omega_{n-1}}$-значный V-спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi \cap \omega$, то для любого $i \in I$ имеет место $f_i(p) = \varnothing$. Значит, $f(p) = \varnothing$. Понятно также, что $h(p) = \varnothing$.

Пусть $p \in \pi \cap \omega$. Тогда найдется такое $i \in I$, что $f_i(p) \neq \varnothing$. Значит, согласно определению минимального τ-значного n-кратно ω-локального V-спутника формации имеет место

$$h(p) = l_\tau^{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(G/F_p(G) \mid G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i) =$$

$$l_\tau^{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\bigcup_{i \in I} l_\tau^{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)) =$$

$$l_\tau^{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\bigcup_{i \in I} f_i(p)) = (\vee_\tau^{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I))(p) = f(p).$$

Пусть $p = \omega'$. Тогда ввиду определения минимального τ-значного n-кратно ω-локального V-спутника формации

$$h(\omega') = l_\tau^{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i) =$$

$$l_\tau^{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\bigcup_{i \in I} l_\tau^{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)) =$$

$$l_\tau^{\omega_{n-1}} \operatorname{form}(\bigcup_{i \in I} f_i(\omega')) = (\vee_\tau^{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I))(\omega') = f(\omega').$$

Лемма доказана. □

Напомним определение алгебраической решетки. Пусть L — полная решетка и $a \in L$. Элемент a называется компактным в L, если для любого подмножества $X \subseteq L$ из $a \leqslant \vee X$ следует $a \leqslant \vee X_1$ для некоторого конечного подмножества $X_1 \subseteq X$. Полная решетка называется алгебраической, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов.

3. Основной результат

Используя доказанные в предыдущем разделе результаты о τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формациях, в данном разделе мы доказываем следующий основной результат.

Теорема 3.1. *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций является алгебраической.*

Доказательство. Понятно, что любая τ-замкнутая n-кратно ω-локальная формация $\mathfrak{M}$ есть объединение (в решетке $l_\tau^{\omega_n}$) своих однопорожденных τ-замкнутых n-кратно ω-локальных подформаций. Индукцией по n покажем, что каждая однопорожденная τ-замкнутая n-кратно ω-локальная формация $\mathfrak{F}$ является компактным элементом в $l_\tau^{\omega_n}$. Пусть

$$\mathfrak{F} = l_\tau^{\omega_n}\operatorname{form}(G) \subseteq \mathfrak{M} = l_\tau^{\omega_n}\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i),$$

где $\mathfrak{F}_i$ — τ-замкнутая n-кратно ω-локальная формация. Предположим, что $n=0$. Тогда по лемме 10

$$G \in \tau\operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) = \operatorname{form}(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i) = \mathrm{HR}_0(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i).$$

Следовательно, $G \cong T/N$ для некоторой группы $T \in \mathrm{R}_0(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i)$. Значит, найдутся такие $i_1,\ldots,i_a \in I$, что

$$T \in \mathrm{R}_0(\mathfrak{F}_{i_1}\cup\ldots\cup\mathfrak{F}_{i_a}).$$

Поэтому

$$G \in \operatorname{form}(\mathfrak{F}_{i_1}\cup\ldots\cup\mathfrak{F}_{i_a}).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{F} \subseteq \operatorname{form}(\mathfrak{F}_{i_1}\cup\ldots\cup\mathfrak{F}_{i_a}) = \tau\operatorname{form}(\mathfrak{F}_{i_1}\cup\ldots\cup\mathfrak{F}_{i_a}).$$

Пусть $n>0$ и пусть все однопорожденные τ-замкнутые $(n-1)$-кратно ω-локальные формации являются компактными элементами в решетке τ-замкнутых $(n-1)$-кратно ω-локальных формаций. Пусть f_i — минимальный $l_\tau^{\omega_{n-1}}$-значный V-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, f — минимальный $l_\tau^{\omega_{n-1}}$-значный V-спутник формации $\mathfrak{F}$, m — минимальный $l_\tau^{\omega_{n-1}}$-значный V-спутник формации $\mathfrak{M}$. Согласно определению минимального τ-значного ω-локального V-спутника формации

$$f(p) = l_\tau^{\omega_{n-1}}\operatorname{form}(G/F_p(G))$$

для всех $p \in \omega\cap\pi(\mathfrak{F})$ и

$$f(\omega') = l_\tau^{\omega_{n-1}}\operatorname{form}(G/O_\omega(G)).$$

Ввиду леммы 11 $f \leqslant m$. Согласно лемме 12

$$m = \vee_\tau^{\omega_{n-1}}(f_i \mid i \in I).$$

Значит, найдутся такие индексы $i_1,\ldots,i_t \in I$, что

$$G/F_p(G) \in f_{i_1}(p)\vee_\tau^{\omega_{n-1}}\ldots\vee_\tau^{\omega_{n-1}} f_{i_t}(p)$$

для всех $p\in\omega\cap\pi(\mathfrak{F})$ и индексы $j_1,\ldots,j_k \in I$, что

$$G/O_\omega(G) \in f_{j_1}(\omega')\vee_\tau^{\omega_{n-1}}\ldots\vee_\tau^{\omega_{n-1}} f_{j_k}(\omega').$$

Тогда

$$G \in \mathfrak{F}_{i_1}\vee_\tau^{\omega_n}\ldots\vee_\tau^{\omega_n}\mathfrak{F}_{i_t}\vee_\tau^{\omega_n}\mathfrak{F}_{j_1}\vee_\tau^{\omega_n}\ldots\vee_\tau^{\omega_n}\mathfrak{F}_{j_k}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{i_1}\vee_\tau^{\omega_n}\ldots\vee_\tau^{\omega_n}\mathfrak{F}_{i_t}\vee_\tau^{\omega_n}\mathfrak{F}_{j_1}\vee_\tau^{\omega_n}\ldots\vee_\tau^{\omega_n}\mathfrak{F}_{j_k}.$$

Итак, решетка всех τ-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций $l_\tau^{\omega_n}$ алгебраична и ее компактными элементами являются однопорожденные $l_\tau^{\omega_n}$-формации. Теорема доказана. $\square$

В случае, когда τ — тривиальный подгрупповой функтор (т.е. $\tau(G) = \{G\}$ для любой группы G), символ τ опускают.

Следствие 3.1. *Решетка всех n-кратно ω-локальных формаций является алгебраической.*

Если $\omega = \mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, то получаем следующий результат.

Следствие 3.2 ([3]). *Решетка всех τ-замкнутых n-кратно локальных формаций является алгебраической.*

Следствие 3.3. *Решетка всех n-кратно локальных формаций является алгебраической.*

Следуя [3], мы обозначаем через s и s_n соответственно такие подгрупповые функторы, что для любой группы G $s(G)$ — множество всех подгрупп в G, а $s_n(G)$ — множество всех нормальных подгрупп в G.

Следствие 3.4. *Решетка всех s-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций является алгебраической.*

Следствие 3.5. *Решетка всех s_n-замкнутых n-кратно ω-локальных формаций является алгебраической.*

При $n = 1$ получаем следующие результаты.

Следствие 3.6. *Решетка всех τ-замкнутых ω-локальных формаций является алгебраической.*

Следствие 3.7. *Решетка всех ω-локальных формаций является алгебраической.*

Если $\omega = \mathbb{P}$, то получаем следующий результат.

Следствие 3.8. *Решетка всех локальных формаций является алгебраической.*

Следствие 3.9. *Решетка всех τ-замкнутых локальных формаций является алгебраической.*

Следствие 3.10. *Решетка всех s-замкнутых ω-локальных формаций является алгебраической.*

Следствие 3.11. *Решетка всех s_n-замкнутых ω-локальных формаций является алгебраической.*

Abstract. In this paper we prove that the lattice of τ-closed n-multiply ω-local formations is algebraic.

Литература

[1] Л.А.Шеметков, Формации конечных групп, М.: Наука, 1978.

[2] Л.А.Шеметков, А.Н.Скиба, Формации алгебраических систем, М.: Наука, 1989.

[3] А.Н.Скиба, Алгебра формаций, Мн.: Беларуская навука, 1997.

[4] L.AShemetkov, A.NSkiba, Multiply ω-local formations and Fitting classes of finite groups, Sibirian Advances in Mathematics, 2000, **10:2**, P. 1-30. (Russian).

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 14.03.2002