Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 5(14), Вопросы алгебры — 18, 2002
2000 Mathematics Subject Classification: 20D10

Некоторые критерии сверхразрешимости конечных групп

Н.С.Косенок, В.Н.Рыжик

Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Используется стандартная терминология [1, 2].

Как известно, максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение группы. Так, например, согласно знаменитой теореме Хупперта [3] группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы имеют простые индексы. Этот результат получил развитие во многих направлениях (см. Л.А.Шеметков и С.А.Чунихин [4]). Заметим, что если мы попытаемся заменить условие простоты индексов на более слабое: индекс каждой максимальной подгруппы есть степень простого числа, то как показывает пример группы A_7, группа при таких ограничениях не является даже разрешимой. Однако, как показано в работе [5], если мы накладываем такое ограничение на более широкий класс примитивных подгрупп [5], то группа G снова будет сверхразрешимой. Напомним, что собственная подгруппа H группы G называется примитивной подгруппой в G, если пересечение всех тех подгрупп из G, которые содержат H собственным образом, снова отлично от H. В данной работе, развивая идеи работы [5], мы даем новые критерии сверхразрешимости конечной группы, на основе понятий примитивной подгруппы и ее обобщений [7].

1. Некоторые предварительные сведения

Напомним, что подгрупповой функтор (в смысле Скибы [6]) сопоставляет каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $\varphi(H) \in \tau(B)$ и $\varphi^{-1}(B) \in \tau(A)$.

Мы будем говорить, следуя [7], что τ — решеточный подгрупповой функтор, если в любой группе G пересечение любой системы ее τ-подгрупп (т.е. подгрупп из $\tau(G)$) снова является τ-подгруппой.

Подгруппа H группы G называется τ-примитивной [7], если H — собственная τ-подгруппа в G и пересечение всех тех τ-подгрупп из G, которые содержат H собственным образом, снова отлично от H.

В частности, мы говорим, что H — субнормально примитивная подгруппа в G, если H — собственная субнормальная подгруппа в G и пересечение всех тех подгрупп из G, которые содержат H собственным образом, отлично от H.

Лемма 1.1. *Пусть $K \leqslant H \leqslant G$, где $K \lhd G$. Подгруппа H является τ-примитивной подгруппой в G тогда и только тогда, когда H/K является τ-примитивной подгруппой в G/K.*

Доказательство. Пусть H является τ-примитивной подгруппой в G. Тогда $H \neq G$, и поэтому, конечно, $H/K \neq G/K$. Пусть $X_1/K, \ldots, X_t/K$ — набор всех τ-подгрупп из G/K, которые содержат H/K собственным образом. Допустим, что

$$(X_1/K) \cap \ldots \cap (X_t/K) = (X_1 \cap \ldots \cap X_t)/K = H/K.$$

Тогда $H = X_1 \cap \ldots \cap X_t$. Понятно также, что $H \subset X_i$ для всех $i = 1, \ldots, t$. При каноническом эпиморфизме $\varphi : G \to G/K$ имеет место $\varphi(X_i) = X_i/K$ и $(X_i/K)^{\varphi^{-1}} = X_i$. Значит, $X_1, \ldots, X_t$ — τ-подгруппы в G. Следовательно, пересечение всех тех τ-подгрупп из G, которые содержат H собственным образом, совпадает с H. Полученное противоречие показывает, что H/K — τ-примитивная подгруппа в G/K. Аналогично проверяется, что если H/K — τ-примитивная в G/K подгруппа, то H — τ-примитивная подгруппа в G. Лемма доказана. □

Лемма 1.2. *Пусть H — собственная τ-подгруппа группы G. Тогда H является пересечением некоторого числа Θ-примитивных подгрупп из G.*

Лемма 1.3. *Если H является τ-примитивной подгруппой в G, то все ясно. В противном случае, $H = H_1 \cap \ldots \cap H_t$, где $\{H_1 \cap \ldots \cap H_t\}$ — набор всех тех Θ-подгрупп из G, которые содержат H собственным образом. Поскольку $H \subset H_i \subset G$, используя индукцию по $|G : H|$ видим, что $H_i = T_{i_1} \cap \ldots \cap T_{t_{(i)}}$, где T_{ij} — τ-примитивная в G подгруппа. Лемма доказана.*

Лемма 1.4. *Пусть $H \subseteq T \subseteq G$, где H, T — τ-подгруппы в G, причем H является τ-примитивной в T. Тогда найдется такая τ-примитивная в G подгруппа X, что $H = T \cap X$.*

Доказательство. Если H — τ-примитивная в G подгруппа, то все ясно. В противном случае, пусть $X_1, \ldots, X_t$ — набор таких τ-примитивных подгрупп из G, что $H = X_1 \cap \cap \ldots \cap X_t$. Понятно, что

$$H = X_1 \cap \ldots \cap X_t = (X_1 \cap \ldots \cap X_t) \cap T = (X_1 \cap T) \cap \ldots \cap (X_t \cap T).$$

Значит, поскольку по условию H — τ-примитивная подгруппа в T, то для некоторого $i \in \{1, \ldots, t\}$ имеет место $H = T \cap X_i$. Лемма доказана. □

Напомним, что подгруппа H группы G называется c-нормальной в G [8], если в G имеется такая нормальная подгруппа T, что $HT = G$ и $T \cap H \subseteq H_G$. Мы будем использовать следующий факт о c-нормальных подгруппах.

Лемма 1.5 ([8]). *Пусть H — подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $K \lhd G$ и H c-нормальна в G, то KH/K c-нормальна в G/K;*

2) *если $K \trianglelefteq G$, $K \leqslant H$ и H/K c-нормальна в G, то H c-нормальна в G;*

3) *если $H \leqslant K \leqslant G$ и H c-нормальна в G, то H c-нормальна в K.*

2. Основные результаты

В работе [8] было доказано, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая ее максимальная подгруппа c-нормальна. Следующая теорема показывает, что если в группе c-нормальными являются все ее примитивные подгруппы, то эта группа сверхразрешима.

Теорема 2.1. *Если в группе G каждая ее примитивная подгруппа либо c-нормальна, либо имеет примарный индекс в G, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда, конечно, $G \neq 1$. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа группы G. Покажем, что условие теоремы переносится на факторгруппу G/R. Пусть H/R — примитивная подгруппа в G/R, не содержащая NR/R. Тогда согласно лемме 1.4, H — примитивная подгруппа в G. Значит, по условию теоремы H либо c-нормальна в G, либо ее индекс $|G : H| = p^{\alpha}$ в G является степенью некоторого простого числа p. Если имеет место первое, то согласно лемме 1.4, H/R c-нормальна в G/R. Если же имеет место второе, то поскольку $|G : H| = |G/R : H/R|$, то $|G/R : H/R| = p^{\alpha}$. Итак, условие теоремы верно для G/R. Но $|G/R| < |G|$, и поэтому согласно выбору группы G утверждение данной теоремы выполняется в G/R. Значит, G/R — сверхразрешимая группа. Допустим, что наряду с R в G имеется еще одна минимальная нормальная подгруппа, скажем L. Тогда G/L также сверхразрешимая группа, и поэтому в силу того факта, что класс всех сверхразрешимых групп является формацией, заключаем, что G — сверхразрешимая группа. Это противоречит выбору группы G. Значит, действительно, R — единственная минимальная нормальная подгруппа в G.

Покажем, что R — абелева группа. Пусть p — наименьший простой делитель порядка R группы R. Пусть R_p — силовская p-подгруппа в R и S — некоторая максимальная подгруппа в R_p. Обозначим через N нормализатор подгруппы S в R. В группе N/S подгруппа R_p/S имеет простой порядок p. Значит, R_p/S имеет нормальное дополнение H/S в N/S. Поскольку $p = |N/S : H/S| = |N : H|$, то H — максимальная в N подгруппа. Значит, H — примитивная подгруппа в N. Допустим, что H является примитивной подгруппой в G. Тогда по условию либо H c-нормальна в G, либо ее индекс $|G : H|$ в G — степень простого числа. Пусть H c-нормальна в G. Тогда в G имеется такая нормальная подгруппа T, что $G = TH$ и $T \cap H \subseteq H_G$. Поскольку $H \subset N \subseteq R$, то $R \nsubseteq H$, и поэтому $H_G = 1$. Значит, $G = [T]H$. Значит, $R \subseteq T$. Но тогда $H \subseteq T \cap$ $\cap H = 1$, что влечет $H = 1$. Это значит, что $N = R_p$ — группа порядка p, и поэтому в R имеется нормальное дополнение T к R_p. В этом случае мы видим, что $R/T \simeq R_p$ — абелева группа, т.е. коммутант R' группы R отличен от R. Поскольку R' является характеристической подгруппой в R, то $R' \lhd G$. Значит, $R' = 1$ и поэтому R — абелева группа.

Предположим, что $|G : H| = q^{\alpha}$, где $\alpha \geqslant 1$. Тогда поскольку $|N : H| = p$ и $|G : H =$ $= |N : H||G : N|$, то $q = p$ и $|G : N|$ делит p^{α}. Поскольку при этом $N \subseteq R$ и $R_p \subseteq$ $\subseteq N$, то последнее означает, что $N = R$. Итак, $R_p \lhd R$. Тогда R_p — характеристическая подгруппа в R, и поэтому $R_p \lhd G$. Так как R — минимальная нормальная в G подгруппа, то последнее влечет $R_p = R$. Итак, мы снова видим, что R — абелева группа.

Пусть теперь H не является примитивной в G подгруппой. Тогда согласно лемме 1.3 $H = N \cap X$ для некоторой примитивной подгруппы X из G. Предположим, что X c-нормальна в G. И пусть T — такая нормальная в G подгруппа, что $TX = G$ и $T \cap X \subseteq$ $\subseteq X_G$. Допустим, что $X_G \neq 1$. Тогда $R \subseteq X_G$, и поэтому $N \subseteq X$. Значит, $X \cap N = N \neq H$.

Полученное противоречие показывает, что $X_G = 1$. Поэтому $T \cap X = 1$. Но $H \subseteq X \cap$ $\cap R \subseteq X \cap T$. Значит, $H = 1$, и поэтому, как и выше, видим, что R — абелева группа. Предположим теперь, что $|G : H| = q^{\alpha}$ для некоторого $\alpha \geqslant 1$. Допустим, что $q \neq p$. Тогда поскольку $|G : X| = |G : RX||RX : X|$, то $p \nmid |R : R \cap X|$. Последнее означает, что силовская p-подгруппа X_p из X является и силовской p-подгруппой в R. Поскольку $S \subseteq H \subseteq X$, то по тереме Силова $S \subseteq X_p^x$ для некоторого $x \in X$. Поскольку $|R_p| = |X_p^x|$ и S — максимальная подгруппа в R_p, то S — максимальная в X_p^x подгруппа. Значит $S \lhd X_p^x$. Поэтому $X_p^x \subseteq N_R(S) = N$. Следовательно, $X_p^x \subseteq N \cap X = S$. Полученное противоречие завершает доказательство того, что для некоторого простого числа p R — абелева группа p-группа.

Покажем, что $|R| = p$. Предположим, что это не так и пусть M — максимальная в R подгруппа. Тогда $|M| \neq 1$. Прежде предположим, что что M — примитивная в G подгруппа. Тогда по условию подгруппа M либо c-нормальна, либо имеет примарный индекс в G. Пусть имеет место первое. Тогда поскольку, очевидно, $M_G = 1$, то в G имеется такая нормальна подгруппа T, что $G = TH$ и $T \cap M = 1$. Но поскольку $M \neq G$, то $T \neq 1$, и поэтому $M \subseteq R \subseteq T$. Но тогда $M = 1$ и поэтому $|R| = p$. Если же M имеет примарный индекс в G, то, очевидно G — p-группа, что противоречит выбору. Следовательно, такой случай не возможен.

Предположим теперь, что любая максимальная в R подгруппа M не является примитивной в G. Тогда $M = R \cap X$ для некоторой примитивной в G подгруппы X. Как и выше, ясно, что X не является c-нормальной в G подгруппой. Значит $|G : X| = q^{\alpha}$, где $\alpha \geqslant 1$. Если $q \neq p$, то $R \subseteq X$. Но тогда $X \cap R = R \neq M$, противоречие. Поскольку $R \cap X \lhd X$, то $X \subseteq N_G(M)$. Итак, для любой максимальной в R подгруппы M число сопряженных с M подгрупп делится на p. Поэтому число всех максимальных в R подгрупп делится на p. Но по лемме III.8.5. из [1] это число сравнимо с 1 по модулю p. Вновь полученное противоречие показывает, что $|R| = p$. Поскольку при этом G/R — сверхразрешимая группа, то G сверхразрешима, противоречие. Теорема доказана. □

Следствие 2.1 ([5]). *Если в группе G каждая ее примитивная подгруппа имеет примарный индекс в G, то G сверхразрешима*

Следствие 2.2. *Если в группе G каждая ее примитивная подгруппа с-нормальна, то G сверхразрешима*

Теорема 2.2. *Если каждая субнормально примитивная подгруппа группы G либо имеет примарный индекс в G, либо обладает холловским нильпотентным добавлением в G, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда $G \neq 1$.

Пусть R — минимальна нормальная подгруппа в G. Рассмотрим факторгруппу G/R. Пусть H/R — субнормально примитивная подгруппа в G/R. Тогда по лемме 1.1. H — субнормально примитивная подгруппа в G. Значит, согласно условию H либо имеет примарный индекс в G, либо в G имеется такая холловская нильпотентная подгруппа T, что $HT = G$. В первом случае, поскольку $|G/R : H/R| = |G : H|$, подгруппа H/R имеет примарный индекс в G. Пусть имеет место второе. Тогда ввиду изоморфизма $TR/R \simeq$ $\simeq T/T \cap R$ подгруппа TR/R нильпотентна и, согласно [2;I,3,2], TR/R — холловская в G/R подгруппа. Понятно также, что $(H/R)(TR/R) = G/R$. Таким образом, условие теоремы переносится на G/R. А поскольку $|G/R| < |G|$, то в силу выбора группы G мы видим, что G/R — сверхразрешимая группа. Если в группе G кроме R имеется еще одна минимальная нормальная подгруппа L, то как и выше $G/L \simeq N/L \cap N$ — сверхразрешимая группа и поэтому $G \simeq G/1 = G/L \cap R$ — сверхразрешимая группа. Это противоречит выбору группы G. Значит, R — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Покажем, что R — абелева группа. Пусть $R = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \simeq A_2 \simeq \simeq \ldots \simeq A_t$ — простая группа. Предположим, что $t = 1$, т.е. $R = A_1$ — простая группа. Тогда если единичная подгруппа E является, очевидно, субнормально примитивной в R. Если E — субнормально примитивная подгруппа в G, то ввиду условия теоремы группа G разрешима. Значит R — абелева группа. Пусть E не является субнормально примитивной в G. Тогда по лемме 2.3. $E = R \cap X$, где X — субнормально примитивная подгруппа в G. Пусть $|G : X| = p^\alpha$, где $\alpha \geqslant 1$. Тогда поскольку $X \subseteq RX$ и $|G : X| = = |G : RX||RX : X| = |G : RX||R : R \cap X| = |G : RX||R : E|$, то R — p-группа. Значит, R — абелева группа. Пусть $G = TX$, где X — холловская нильпотентная подгруппа в G. Пусть $\pi = \pi(T)$. Поскольку $|G : X| = |T : T \cap X|$, то $|R| = |G : X|$ — π-число. Допустим, что $R \not\subseteq T$. Тогда $T \subset RT$. Но $|RT| = \frac{|R||T|}{|T \cap R|}$ — π-число, что противоречит холловости подгруппы T. Значит, $R \subseteq T$, и поэтому R — абелева группа.

Пусть теперь $T > 1$ и пусть $M = A_1 \times \ldots \times A_{t-1}$. Тогда поскольку $MA_t = R$, то $R/M \simeq A_t/M \cap A_t = A_t/E \simeq A_t$. Значит, R/M — простая группа, и поэтому M — субнормально примитивная в R подгруппа. Допустим, что M — субнормально примитивная в G подгруппа. Понятно, что $N \not\subseteq M$, и поэтому согласно условию теоремы либо $G = TM$, где T — нильпотентная холловская в G подгруппа. Если имеет место первое, то поскольку $|G : M| = |G : R||R : M| = |G : R||A_t|$, мы видим, что A_t — p-группа. Значит, R — абелева p-группа. Пусть имеет место второе. Тогда $|G : M|$ — π-число, где $\pi = \pi(T)$. Значит, поскольку $|R| = |A_1||A_2| \ldots |A_t| = |A_t|^t$, то R — π-группа и поэтому как и выше мы видим, что $R \subseteq T$, и поэтому R — абелева группа.

Предположим теперь, что M не является субнормально примитивной подгруппой в G. Тогда по лемме 2.3. в группе G имеется такая субнормально примитивная подгруппа X, что $X \cap R = M$. Ясно, что $R \not\subseteq X$, и поэтому либо $|G : X| = p^\alpha$ для некоторого простого числа p и натурального $\alpha \geqslant 1$, либо $G = TX$, где T — холловская нильпотентная подгруппа в G. Пусть имеет место первое. Тогда поскольку $|G : X| = |G : RX| = = |G : RX||A_t|$, то R — p-группа. Значит R — абелева группа. Если же имеет место второе, то как и выше видим, что $R \subseteq T$. Значит R — абелева группа. Итак, в любом из случаев мы видим, что R — абелева p-группа для некоторого простого числа p.

Покажем, что $|R| = p$. Допустим, что это не так и пусть M — максимальная в R подгруппа. Предположим, что M является субнормально примитивной в G подгруппой. Тогда если индекс M в G примарен, то, очевидно, G — p-группа, что противоречит выбору группы G. Пусть $G = TM$, где T — нильпотентная холловская в G подгруппа. Тогда $|G : M|$ — π-число, где $\pi = \pi(T)$. Но тогда $R \subseteq T$, и поэтому $G = T$ — нильпотентная группа, что противоречит выбору группы G. Пусть M не является субнормально примитивной в G подгруппой. Тогда поскольку, очевидно, M — субнормально примитивная в R подгруппа, то $M = X \cap R$, где X — субнормально примитивная в G подгруппа. Понятно, что $N \not\subseteq X$, и поэтому либо X имеет нильпотентное холловское добавление T в G, либо индекс X в G примарен. Пусть имеет место первое. Тогда $|G : X|$ — π-число, где $\pi = \pi(T)$. А поскольку $|G : X| = |G : RX||RX : X| = |G : RX||R : R \cap X||G : RX|p$, то $p \in \pi$ и поэтому $R \subseteq T$. Поскольку класс всех сверхразрешимых групп является локальной формацией и N/R — сверхразрешимая группа, то ввиду следствия 4.2.3, $R \not\subseteq \Phi(G)$. Пусть M — такая максимальная в G подгруппа, что $RM = G$. Тогда если $C = C_G(R)$, то $C \cap M \triangleleft G$. Но R — единственная минимальная нормальная в G подгруппа. Значит $C \cap M = 1$, и поскольку $C = C \cap RM = R(C \cap M) = R$. Поскольку $R \subseteq T$ и T — нильпотентная группа, то холловская p'-подгруппа $T_{p'}$ содержится в C. Значит T — силовская p-подгруппа в G. Последнее означает, что $|G : X| = p^a$, где $a \geqslant 1$. Если же индекс X в G примарен, то, как и выше, видим, что снова $|G : X|$ — степень числа p. Но в такой ситуации мы приходим к противоречию, как это было сделано в доказательстве теоремы 3.1. Вновь полученное противоречие показывает, что $|R| = p$. Значит, R — циклическая группа. А поскольку N/R сверхразрешимая, то это означает, что N является сверхразрешимой группой, что противоречит выбору группы G. Теорема доказана. $\square$

Abstract. We say that a subgroup H of a group G is a subnormally primitive if $H \neq G$ and the intersection $\cap K$ where K runs all subnormal subgroups K of G with the property $H \subset K$ is different from H.

The following result is proved

Theorem. *A group G is supersoluble if every its subnormally primitive subgroup either has a primary index or it has a Hall nilpotent supplement in G.*

Литература

[1] B.Huppert, Endliche Gruppen I. Berlin–Heidelberg–New York, 1967.

[2] K.Doerk, T.Hawkes, Finite soluble groups, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1992.

[3] B.Huppert, Normalteiler and maximale Untergruppen endlicher Gruppen, Math.Z. 60(1954), 409–434.

[4] С.А.Чунихин, Л.А.Шеметков, Конечные группы, В кн.: Алгебра. Топология. Геометрия. 1969 (Итоги науки ВИНИТИ АН СССР). М., 1971.

[5] D.L.Johnson, A note on supersoluble groups. Canad. J. Math. 23 (1971), № 3, C. 562–564.

[6] А.Н.Скиба, Алгебра формаций, Мн.: Беларуская навука, 1997.

[7] А.Н.Скиба, О некоторых свойствах решетки подгрупп конечной группы,

[8] Y.Wang, c-Normality of groups and its properties, J. Algebra 180 (1996), 954–965.

Гомельский государственный
университет им.Ф.Скорины

Брянский государственный
университет

Поступило 20.04.2002