Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 5(14), Вопросы алгебры — 18, 2002
2000 Mathematics Subject Classification: 20D10

Группы нечетного порядка с ограниченными индексами максимальных подгрупп

М.А.Грибовская

В 1954 году для группы G нечетного порядка Б.Хупперт установил следующие факты:

— если индексы максимальных подгрупп группы G являются простыми числами или квадратами простых чисел, то второй коммутант группы G нильпотентен ([5], теорема 16);

— если индексы максимальных подгрупп группы G являются простыми числами, квадратами простых чисел или кубами простых чисел, то четвертый коммутант группы G нильпотентен ([5], теорема 17).

В настоящей заметке развиваются эти результаты Хупперта. Доказывается следующая

Теорема. *Пусть G — группа нечетного порядка, в которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, делят четвертые степени простых чисел. Тогда второй коммутант группы G нильпотентен.*

Из этой теоремы вытекает, что если в группе нечетного порядка индексы максимальных подгрупп являются простыми числами, квадратами простых чисел или кубами простых чисел, то уже второй коммутант группы G нильпотентен. Из теоремы для группы нечетного порядка с индексами максимальных подгрупп, являющимся простыми числами или квадратами простых чисел, выводится, что коммутант группы нильпотентен. Таким образом, приведенные результаты Хупперта усиливаются нашей теоремой.

Напомним необходимые определения. Через $n(G)$ и $d(G)$ обозначается нильпотентная и производная длины группы G. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и G — группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, факторгруппы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G, см. [2], [3]. Произведением формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называется класс $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \{G \mid G^{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X}\}$, состоящий из всех групп G, у которых $\mathfrak{Y}$-корадикал принадлежит $\mathfrak{X}$. Формация $\mathfrak{X}$ называется насыщенной, если из условия $G/N \in \mathfrak{X}$, $N \leqslant \Phi(G)$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ обозначаются формации всех нильпотентных и всех абелевых групп, а $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}\mathfrak{A}$.

Лемма 1 ([2], теорема 1.1; [3], теоремы V.8 и VII.4). (1) *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — формации, то $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ — формация.*

(2) *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — формации и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ — насыщенная формация и $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$.*

Через $F(G)$ обозначается подгруппа Фиттинга группы G — произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G.

Лемма 2 ([4], III.4). *Пусть G — разрешимая неединичная группа. Тогда:*

(1) $\Phi(G) \leqslant F(G)$ *и* $\Phi(G) \neq F(G)$;

(2) $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$;

(3) $C_G(F(G)) \leqslant F(G)$;

(4) *факторгруппа* $F(G)/\Phi(G)$ *есть прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы* $G/\Phi(G)$.

Лемма 3 ([4], теорема I.4.6). *Если* Z *— группа простого порядка* p, *то группа всех автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\, Z$ *циклическая порядка* $p-1$.

Лемма 4. *Пусть* H *— неприводимая подгруппа нечетного порядка группы* $GL(n,p)$. *Тогда:*

(1) *если* $n = 2$, *то* H *циклическая и* $|H|$ *делит* $(p^2 - 1)$;

(2) *если* $n = 3$, 4, *то* $H \in \mathfrak{A}^2$;

(3) *если* $n = 3$ *и* $|H|$ *не делится на* 3, *то* H *абелева.*

Доказательство. (1) и (2) следуют из [6], [7]. Докажем (3). Заключим H в максимальную разрешимую подгруппу M группы $GL(3,p)$. Очевидно, M — неприводимая подгруппа. По теореме Д.А.Супруненко ([1], с.234) возможны три случая: группа M импримитивна; группа M примитивна и её максимальная нормальная подгруппа F изоморфна мультипликативной группе поля $GF(p^3)$; группа M примитивна и её максимальная нормальная подгруппа $F = GF(p)^{\#}E_3$. В первом случае группа M мономиальна и, согласно теореме 18.5 [1], сопряжена в $GL(3,p)$ со сплетением $GF(p)^{\#}\wr S_3$, где S_3 — симметрическая группа порядка 6, см. [1], с.234. Так как порядок подгруппы H не делится на 6, то H абелева. Пусть теперь M примитивна и её максимальная абелева нормальная подгруппа F изоморфна мультипликативной группе поля $GF(p^3)$. Группа F — циклическая и $|F| = p^3 - 1$. По теореме 21.1 [1] $|M| = 3(p^3 - 1)$, поэтому H абелева. Пусть M примитивна и её максимальная абелева нормальная подгруппа $F = GF(p)^{\#}E_3$. Подгруппа F состоит из скалярных матриц, поэтому F содержится в центре M. В M существует нормальная подгруппа A такая, что A содержит F и A/F изоморфна элементарной абелевой группе порядка 9, а M/A изоморфна симметрической группе S_4 степени 4, [1], с. 234, формулы (13) и (14). Поэтому H опять абелева. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы. Нильпотентность второго коммутанта группы G равносильна включению $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. Докажем это включение. Так как $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ по лемме 2, то условия теоремы наследуются факторгруппой $G/\Phi(G)$. Если $\Phi(G) \neq 1$, то по индукции $G/\Phi(G) \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$, а поскольку формация $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ является насыщенной по лемме 1, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. В дальнейшем считаем, что $\Phi(G) = 1$. Поэтому $F(G) = N_1 \times \ldots \times N_t$ — прямое произведение минимальных нормальных подгрупп N_i, $i = 1, \ldots, t$, см. лемму 2. Для каждого i в группе G существует максимальная подгруппа M_i, не содержащая N_i. Поэтому $G = [N_i]M_i$, а так как M_i не содержит $F(G)$, то по условию теоремы $|N_i| = |G : M_i|$ делит p_i^4 для некоторого простого p_i. Факторгруппа $G/C_G(N_i)$ является группой автоморфизмов группы N_i, неприводимо действующей на N_i. Если $|N_i| = p_i$, то $\mathrm{Aut}\, N_i$ — циклическая группа порядка $p_i - 1$ по лемме 3 и $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{A}$. Если $|N_i| = p_i^2$, то $\mathrm{Aut}\, N_i = GL(2,p_i)$ и $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{A}$ по лемме 4(1). Если $|N_i| = p_i^3$ или $|N_i| = p_i^4$, то $\mathrm{Aut}\, N_i = GL(3,p_i)$ или $\mathrm{Aut}\, N_i = GL(4,p_i)$ и $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{A}^2$ по лемме 4(2).

Итак для любого i всегда факторгруппа $G/C_G(N_i) \in \mathfrak{A}^2$. Но $\mathfrak{A}^2$ является формацией, поэтому $G/\cap_{i=1}^{t} C_G(N_i) \in \mathfrak{A}^2$. Поскольку $\cap_{i=1}^{t} C_G(N_i) \subseteq C_G(F(G)) = F(G)$ по лемме 2, то $G/F(G)) \in \mathfrak{A}^2$ и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть G — группа нечетного порядка, в которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, делят четвертые степени простых чисел. Тогда нильпотентная длина группы G не выше 3, производная длина группы $G/\Phi(G)$ тоже не выше 3, а p-длина группы G не выше 2 для любого простого p.*

Доказательство. Из включения $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ следует, что $n(G) \leqslant 3$. По лемме 2 в любой разрешимой группе X факторгруппа $F(X)/\Phi(X)$ абелева, поэтому $d(G/\Phi(G)) \leqslant 3$. Из включения $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ следует также, что группа G обладает нормальным рядом $1 \lhd K \lhd G$ с нильпотентным фактором K и метанильпотентным фактором G/K. Но метанильпотентные группы имеют единичную p-длину для любого простого p, поэтому $l_p(G) \leqslant 2$ для каждого p. □

Ясно, что теорема и следствие 1 распространяются на группы нечетного порядка, в которых индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, делят кубы простых чисел.

Следствие 2. *Пусть G — группа нечетного порядка, в которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, делят квадраты простых чисел. Тогда коммутант группы G нильпотентен. В частности, нильпотентная длина группы G не выше 2, производная длина группы $G/\Phi(G)$ тоже не выше 2, а p-длина группы G не выше 1 для любого простого p.*

Доказательство. Повторяя часть доказательства теоремы, касающуюся случаев, когда $|N_i| = p_i$ и $|N_i| = p_i^2$, получаем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Из этого включения следует, что $n(G) \leqslant 2$. По лемме 2 в любой разрешимой группе X факторгруппа $F(X)/\Phi(X)$ абелева, поэтому $d(G/\Phi(G)) \leqslant 2$. Метанильпотентные группы имеют единичную p-длину для любого простого p, поэтому $l_p(G) \leqslant 1$ для каждого p. □

Ясно, что следствие 2 распространяется на группы нечетного порядка, в которых индексы максимальных подгрупп являются простыми числами или квадратами простых чисел.

Следствие 3. *Пусть G — группа нечетного порядка, в которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, делят квадраты простых чисел. Тогда индексы максимальных подгрупп, содержащих подгруппу Фиттинга, являются простыми числами.*

Доказательство. По следствию 2 факторгруппа $G/F(G)$ абелева, поэтому индексы максимальных подгрупп, содержащих подгруппу Фиттинга, являются простыми числами. □

Следствие 4. *Пусть G — группа нечетного порядка, в которой индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, делят квадраты простых чисел. Пусть H — подгруппа группы G и K — её максимальная подгруппа. Тогда:*

1) *если $F(H) \leqslant K$, то $|H : K|$ — простое число;*

2) *если $F(H) \nleq K$, то $|H : K|$ делит квадрат простого числа.*

Доказательство. По теореме 3.4 [6] в каждой подгруппе группы G индексы максимальных подгрупп являются простыми числами или квадратами простых чисел. Теперь по следствию 3 получаем наше утверждение. □

Отметим, что в [6] построена группа R порядка $2^a p^b$, где p — нечетное простое число, в которой индексы всех максимальных подгрупп принадлежат множеству $\{2, p, p^2\}$, но в группе R существует подгруппа H, обладающая максимальной подгруппой индекса $p^{2^t} > p^2$. Таким образом, в группах четного порядка условие "индексы максимальных подгрупп делят квадраты простых чисел" не наследуется подгруппами.

Отметим, что, согласно [4], VI.8.7, существует группа порядка $3^a 7^b 43^c$, у которой $\bar{r}(G/\Phi(G)) = 3$, но $\bar{r}(G) \equiv 0 \pmod{3^{42}}$. Здесь $\bar{r}(G)$ — арифметический ранг разрешимой группы G, см. [4], с. 712. По теореме 1 [5] в этой группе индексы максимальных подгрупп делят кубы простых чисел, но существует подгруппа, обладающая максимальной подгруппой индекса 3^{42}. Таким образом, в группах нечетного порядка условие "индексы максимальных подгрупп делят кубы простых чисел" не наследуется подгруппами.

Следствие 5. *Пусть G — группа нечетного порядка, в которой индексы максимальных подгрупп делят кубы простых чисел. Если порядок группы G не делится на 3, то коммутант группы G нильпотентен.*

Доказательство. Повторяя доказательство теоремы и используя утверждение о неприводимой подгруппе, порядка взаимно простого с 6 из леммы 4, получаем, что коммутант группы G нильпотентен. □

Следствие 6. *Пусть G — группа нечетного порядка, в которой индексы максимальных подгрупп делят кубы простых чисел. Предположим, что порядок группы G не делится на 3. Тогда индексы максимальных подгрупп, содержащих подгруппу Фиттинга, являются простыми числами.*

Доказательство. По следствию 5 группа $G \in \mathfrak{NA}$, поэтому максимальные подгруппы группы G, содержащие подгруппу Фиттинга, имеют простые индексы. □

Abstract. Let G be a group of odd order. Suppose that the indexes of all maximal subgroups which are not inclusive a subgroup Fitting divide the fourth degrees of prime numbers. It was proved that the second derived subgroup is nilpotent.

Литература

[1] Д.А.Супруненко, Группы матриц, М.: Наука, 1972.

[2] Л.А.Шеметков, Формации конечных групп, М.: Наука, 1978.

[3] W.Gaschütz, Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups, (Notes on pure mathematics; № 11), Canberra, Australian National University, 1979, 100 p.

[4] B.Huppert, Endliche Gruppen I, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[5] B.Huppert, Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, Math. Zeitschr, 1954, **60**, S. 409–434.

[6] J.Kohler, Finite groups with all maximal subgroups of prime or prime square index, Canad. J. Math., 1964, **16**, № 3, P. 435–442.

[7] P.P.Palfy, Bounds for linear groups of odd order, Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2, 1990, **39**, Suppl., № 23, P. 253–263.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 17.02.2002