Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины, 5(14), Вопросы алгебры — 18, 2002
2000 Mathematics Subject Classification: 20N15

О максимальных τ-подклассах Шунка n-арных групп

М.И.Ефремова

Напомним [1], что система $\langle X, (\ )\rangle$ с одной n-арной операцией $(\ )$ называется n-арной группой, если эта операция ассоциативна и в X разрешимо каждой из уравнений

$$(a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n) = a,$$

где i пробегает $1, 2, \dots, n$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый непустой класс n-арных групп. Сопоставим с каждой n-арной группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему ее подгрупп $\tau(G)$. Мы говорим, следуя [2, 3], что τ — подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор, если выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой n-арной группы $G \in \mathfrak{X}$;

2) для любых двух n-арных групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$, где $A, B \in \mathfrak{X}$ и для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$, $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Следуя [3], мы говорим, что класс n-арных групп $\mathfrak{F}$ является τ-классом Шунка в $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F}$ — гомоморф n-арных групп, (т.е. всякий гомоморфный образ любой группы из $\mathfrak{F}$ снова принадлежит $\mathfrak{F}$), $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и классу $\mathfrak{F}$ принадлежит всякая такая n-арная группа $G \in \mathfrak{X}$, что $G/M_G \in \mathfrak{F}$ верно для всех $M \in \tau(G) \setminus \{G\}$. Если $\mathfrak{F}$ — τ-класс Шунка в $\mathfrak{X}$, то по определению $G \in \mathfrak{F}$ для любой n-арной $\mathfrak{X}$-группы G с $\tau(G) = \{G\}$.

Нетрудно видеть, что если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольное множество τ-классов Шунка в $\mathfrak{X}$, то $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ также является τ-классом Шунка в $\mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{L}_n^\tau$ — множество всех τ-классов Шунка n-арных групп в $\mathfrak{X}$. На этом множестве введем частичный порядок $\leqslant$, полагая $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Относительно этого порядка множество $\mathfrak{L}_n^\tau$ является полной решеткой и класс $\mathfrak{X}$ является в нем наибольшим элементом.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — τ-классы Шунка в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Мы будем говорить, что $\mathfrak{M}$ — максимальный τ-подкласс Шунка в $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ и в $\mathfrak{H}$ нет такого τ-подкласса Шунка в $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$. Пусть $\Phi_\tau(\mathfrak{H})$ пересечение всех максимальных τ-подклассов Шунка в $\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{H}$ ($\Phi_\tau(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$, если в $\mathfrak{H}$ нет таких подклассов).

Целью данной работы является описание пересечений максимальных τ-подклассов Шунка в $\mathfrak{X}$. В дальнейшем все рассматриваемые классы n-арных групп предполагаются входящими в класс всех конечных n-арных групп.

Лемма 1. *Пусть $\Sigma = \{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — некоторая цепь τ-классов Шунка в $\mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{F} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ — τ-класс Шунка в $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть n-арная $\mathfrak{X}$-группа $A \in \mathfrak{F}$. Значит, существует $i \in I$ такое, что $A \in \mathfrak{F}_i$. Поскольку $\mathfrak{F}_i$ — τ-класс Шунка в $\mathfrak{X}$, то $A/\pi \in \mathfrak{F}_i$ для каждой конгруэнции π на A. Следовательно, $A/\pi \in \bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i$. Значит, $\mathfrak{F}$ — гомоморф.

Пусть $\{M_1, M_2, \dots, M_t\}$ — набор всех подгрупп n-арной группы $A \in \mathfrak{X}$ таких, что $M_i \in \tau(A) \setminus \{A\}$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$. И пусть $A/(M_i)_A \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $A \in \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}_{i_1}, \mathfrak{F}_{i_2}, \dots, \mathfrak{F}_{i_t}$ — такие τ-классы Шунка в $\mathfrak{X}$ во множестве Σ, что $A/(M_1)_A \in \mathfrak{F}_{i_1}, A/(M_2)_A \in \mathfrak{F}_{i_2}, \dots, A/(M_t)_A \in \mathfrak{F}_{i_t}$. Так как Σ — цепь, то существует такой τ-класс Шунка в $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}_{i_r}$ ($r \in \{1, 2, \dots, t\}$), который включает в себя τ-классы Шунка в $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}_{i_1}, \mathfrak{F}_{i_2}, \dots, \mathfrak{F}_{i_t}$. Значит,

$$A/(M_1)_A \in \mathfrak{F}_{i_r}, A/(M_2)_A \in \mathfrak{F}_{i_r}, \dots, A/(M_t)_A \in \mathfrak{F}_{i_r}.$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Но поскольку $\mathfrak{F}_{i_r}$ — τ-класс Шунка в $\mathfrak{X}$, то из последнего вытекает, что $A \in \mathfrak{F}_{i_r} \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}$ — τ-класс Шунка в $\mathfrak{X}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$ — n-арная группа, принадлежащая τ-классу Шунка в $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ — его τ-подкласс Шунка в $\mathfrak{X}$, не содержащий G. Тогда в $\mathfrak{F}$ существует τ-подкласс Шунка в $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{M}$, содержащий $\mathfrak{H}$, и максимальный среди всех τ-подклассов Шунка в $\mathfrak{X}$, принадлежащих $\mathfrak{F}$ и не содержащих G.*

Доказательство. Пусть Ω — множество всех тех τ-подклассов Шунка в $\mathfrak{X}$ из $\mathfrak{F}$, которые содержат $\mathfrak{H}$, но не содержат группу $G \in \mathfrak{X}$. Пусть $\Sigma = \{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — некоторая цепь в Ω и $\mathfrak{M} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$.

Покажем, что $\mathfrak{M} \in \Omega$. По лемме 1 $\mathfrak{M}$ — τ-класс Шунка в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$. Заметим, что если G принадлежит $\mathfrak{M}$, тогда существует $i \in I$ такое, что G принадлежит $\mathfrak{F}_i$. Это противоречит определению класса $\mathfrak{F}_i$. Следовательно, G не принадлежит $\mathfrak{M}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

Итак, $\mathfrak{M} \in \Omega$. Следовательно, ввиду леммы Цорна мы можем заключить, что $\mathfrak{H}$ входит в некоторый максимальный τ-подкласс τ-класса Шунка $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{X}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ такие τ-классы Шунка в $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда символом $\mathfrak{M}/\mathfrak{H}$ обозначается решетка всех τ-классов Шунка в $\mathfrak{X}$, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$.

Легко видеть, что пересечение любого семейства τ-классов Шунка в $\mathfrak{X}$ снова является τ-классом в $\mathfrak{X}$. Таким образом, если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$, то пересечение всех τ-классов Шунка в $\mathfrak{X}$, содержащих совокупность групп $\mathfrak{M}$, является τ-классом Шунка в $\mathfrak{X}$. Такой класс мы обозначаем, следуя [3], через $\mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{M})$ и называем τ-классом Шунка, порожденным $\mathfrak{M}$. В частности, мы пишем $\mathrm{Schunck}_\tau(G)$ для обозначения τ-класса Шунка в $\mathfrak{X}$, порожденного группой $G \in \mathfrak{X}$. Классы вида $\mathrm{Schunck}_\tau(G)$ мы называем однопорожденными τ-классами Шунка в $\mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — τ-класс Шунка в $\mathfrak{X}$ и $G \in \mathfrak{H}$. Следуя [3], мы называем G τ-необразующей n-арной группой в $\mathfrak{H}$, если всегда из того, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ следует, что $\mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{M} \cup \{G\}) \neq \neq \mathfrak{H}$. $\square$

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} \neq (1)$ — непустой τ-класс Шунка в $\mathfrak{X}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *$\Phi_\tau(\mathfrak{F})$ состоит из всех τ-необразующих в $\mathfrak{F}$ n-арных групп;*

2) *если $\mathfrak{M}$ — τ-класс Шунка в $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \subseteq \Phi_\tau(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $G \in \mathfrak{X}$ — произвольная τ-необразующая n-арная группа для τ-класса Шунка в $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$. Тогда если $\mathfrak{F}_1$ — некоторый максимальный τ-подкласс Шунка τ-класса Шунка в $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}_1$, то

$$\mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{F}_1 \cup \{G\}) = \mathrm{Schunck}_\tau \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ для любого максимального τ-класса Шунка в $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$. Значит, $G \in \Phi_\tau(\mathfrak{F})$.

Обратно, пусть $G \in \Phi_\tau(\mathfrak{F})$. Докажем, что G является τ-необразующей группой для τ-класса Шунка в $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$. Предположим, что

$$\mathfrak{F} = \mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{F}_1 \cup \{G\}),$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины

где $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$, а $\mathrm{Schunck}_\tau \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$. По лемме 2 существует τ-подкласс Шунка в $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$, содержащий $\mathfrak{H}$ и максимальный среди τ-подклассов Шунка в $\mathfrak{X}$ из $\mathfrak{F}$, не содержащих группу G. Докажем, что этот τ-подкласс Шунка в $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{M}$ просто максимален от противного. Допустим, что $\mathfrak{M}$ — не максимальный τ-подкласс Шунка в $\mathfrak{X}$ из $\mathfrak{F}$, тогда существует $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}$ — τ-подкласс Шунка в $\mathfrak{X}$ из $\mathfrak{F}$. В силу нашего выбора τ-подкласса Шунка в $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{M}$ любой τ-подкласс Шунка в $\mathfrak{X}$, строго содержащий $\mathfrak{M}$, должен содержать и G. Итак, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{M}_1$.

Следовательно,

$$\mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{M}_1 \cup \{G\}) \supseteq \mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{F}_1 \cup \{G\}) = \mathfrak{F}.$$

А

$$\mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{M}_1 \cup \{G\}) = \mathrm{Schunck}_\tau \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1.$$

Значит, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M}$ — максимальный τ-подкласс Шунка в $\mathfrak{X}$, не содержащий группу G, что противоречит условию $G \in \Phi_\tau(\mathfrak{F})$. Итак, $\mathrm{Schunck}_\tau \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$. Значит, любая n-арная группа $G \in \Phi_\tau(\mathfrak{F})$ является τ-необразующей для τ-класса Шунка в $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$.

Докажем утверждение 2). Предположим, что $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \nsubseteq \Phi(\mathfrak{F})$. Тогда в τ-классе Шунка в $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$ найдется такой максимальный τ-подкласс Шунка в $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}_1$, что $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \nsubseteq \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{F}_1$. Поскольку решетка всех τ-классов Шунка в $\mathfrak{X}$ дистрибутивна [5], то имеет место решеточный изоморфизм

$$\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{M}/\mathfrak{F}_1 \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_1.$$

Так как $\mathfrak{F}_1$ — максимальный τ-подкласс Шунка τ-класса Шунка $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{M} \nsubseteq \mathfrak{F}_1$, то

$$\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{M} = \mathrm{Schunck}_\tau(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{M}) = \mathfrak{F},$$

поэтому решетка $\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{M}/\mathfrak{F}_1$ содержит лишь два элемента. Значит, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_1$ — максимальный τ-подкласс Шунка в $\mathfrak{M}$. Следовательно, $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_1$ и поэтому $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{F}_1$. Противоречие. Итак, $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \subseteq \Phi_\tau(\mathfrak{F})$. Теорема доказана. □

Abstract. In the work the infimum for the set of all coatoms of the lattice of all τ-Schunck class in $\mathfrak{X}$ of an arbitrary τ-Schunck class in $\mathfrak{X}$ of the finite n-ary groups is described.

Литература

[1] С.А.Русаков, Алгебраические n-арные системы, Мн.: Навука і тэхніка, 1992.

[2] А.Н.Скиба, Алгебра формаций, Мн.: Беларуская навука, 1997.

[3] М.В.Селькин, А.Н.Скиба, О решетках τ-классов Шунка, Доклады национальной академии наук Беларуси, 45:3 (2001), С. 51–53.

[4] Г.Биркгоф, Теория решеток. М.: Наука, 1984.

[5] М.И.Ефремова, О дистрибутивности решетки τ-классов Шунка конечных n-арных групп, Известия Гомельского госуниверситета им.Ф.Скорины, 3(6) Вопросы алгебры — 17 (2001), С. 182–186.

Гомельский государственный
университет им.Ф.Скорины

Поступило 17.04.2002

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф.Скорины