МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

С.Н. Шевчук, В.Н. Семенчук

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

FINITE GROUPS WITH GENERALIZED SUBNORMAL SUBGROUPS

S.N. Schevchuk, V.N. Semenchuk

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Изучено строение конечных разрешимых групп, у которых силовские подгруппы обобщенно субнормальны.

Ключевые слова: *насыщенная формация, наследственная формация, разрешимая группа, субнормальная подгруппа, обощенно субнормальная подгруппа.*

The paper describes the structure of soluble finite groups in which Silov subgroups are generalized subnormal subgroups.

Keywords: *saturated formation, hereditary formation, soluble group, subnormal subgroup, generalized subnormal subgroup.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Важную роль при изучении строения конечных групп играют силовские подгруппы. Например, группа, у которой все силовские подгруппы субнормальны, нильпотентна.

В теории классов конечных групп обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-достижимости, введенное Кегелем в работе [1].

Определение. *Назовем подгруппу H $\mathfrak{F}$-достижимой в группе G, если существует цепь подгрупп*

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

В настоящей работе рассматривается задача изучения строения конечных групп, у которых силовские подгруппы и бипримарные подгруппы $\mathfrak{F}$-достижимы.

Начало такого исследования строения конечных групп восходит к работам [2], [3].

1 Используемые обозначения и леммы

Необходимые обозначения и определения можно найти в монографии [4]. Напомним некоторые из них. Формация – класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы, то есть пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Минимальная не $\mathfrak{F}$-группа – группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G, через $|\pi(G)|$ – число простых делителей порядка группы G, через $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядков групп, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Через $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}^2$, $\mathfrak{N}_\pi$ обозначаются класс всех нильпотентных групп, класс всех метанильпотентных групп, класс всех нильпотентных π-групп соответственно.

В дальнейшем нам понадобятся следующие известные свойства $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G;*

2) *если H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то $H \cap K$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа K для любой подгруппы K группы G;*

3) *если H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа K и K – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G;*

4) *если H_1 и H_2 – $\mathfrak{F}$-достижимые подгруппы группы G, то $H_1 \cap H_2$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G;*

5) *если H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G, то H^x $\mathfrak{F}$-достижима в G для любых $x \in G$.*

Доказательство. 1) Пусть H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$. Так как $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то подгруппа $H/G^{\mathfrak{F}}$

является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой группы $G/G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда, согласно определению $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы, существует максимальная цепь

$$G/G^{\mathfrak{F}} = H_0/G^{\mathfrak{F}} \supset H_1/G^{\mathfrak{F}} \supset \ldots \supset H_n/G^{\mathfrak{F}} = H/G^{\mathfrak{F}}$$

такая, что $(H_{i-1}/G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i/G^{\mathfrak{F}}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда получаем, что в группе G существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

А это значит, что H – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Поскольку любая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$-достижимой в G, то H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G.

2) Пусть H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. Тогда, по определению, существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Пусть K – некоторая подгруппа из G. Рассмотрим цепь подгрупп:

$$K = H_0 \cap K \supseteq H_1 \cap K \supseteq \ldots \supseteq H_m \cap K = H \cap K.$$

Если подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, то подгруппа $H_i \cap K$ нормальна в $H_{i-1} \cap K$. Пусть $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то из $H_{i-1}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ следует, что

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}.$$

Теперь ввиду изоморфизма

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \simeq$$
$$\simeq H_{i-1} \cap K/H_{i-1} \cap K \cap (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}$$

имеем

$$H_{i-1} \cap K/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \cap K \in \mathfrak{F}.$$

Значит,

$$(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \cap K.$$

Так как $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, то

$$(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i \cap K.$$

Итак, для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа $H_i \cap K$ нормальна в $H_{i-1} \cap K$, либо $(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i \cap K$. Отсюда, по определению, $H \cap K$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы K.

Утверждение 3) следует непосредственно из определения $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы.

Утверждение 4) следует теперь из утверждений 2) и 3).

Утверждение 5) следует непосредственно из определения $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы. Лемма доказана.

***Лемма* 1.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Если G – разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $G^{\mathfrak{F}}$ – примарная подгруппа.*

Доказательство. Пусть G – разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Тогда $\Phi(G) \subset F(G)$. Отсюда следует, что в группе G найдется нормальная примарная подгруппа K, не содержащаяся в $\Phi(G)$. Но тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = KM$. Так как $M \in \mathfrak{F}$, то $G/K = MK/K \cong M/M \cap K \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K$. Лемма доказана.

***Лемма* 1.3.** *Пусть $\mathfrak{N}^2$ – формация всех метанильпотентных групп. Если G – разрешимая минимальная не $\mathfrak{N}^2$-группа, то она одного из следующих типов:*

1) $|\pi(G)| = 3$, $G = G_p \rtimes H$, *где* $G_p = G^{\mathfrak{F}}$;

2) $|\pi(G)| = 2$, $G^{\mathfrak{F}}$ *– примарная p-подгруппа, причем* $G^{\mathfrak{F}} \subset G_p$.

Доказательство. Пусть G – разрешимая минимальная не $\mathfrak{N}^2$-группа. Согласно теореме 1.5 из [5] $G/\Phi(G) = G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G) \rtimes M/\Phi(G)$, где $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G) = F(G)/\Phi(G)$ – примарная p-группа. По теореме 1 из [6] $G/F(G)$ – группа Шмидта. Следовательно, $|\pi(G/F(G))| = 2$. Так как $|\pi(G)| = |\pi(G/\Phi(G))|$, то $|\pi(G)| \le 3$.

Если $|\pi(G)| = 3$, то, как показано выше, $G^{\mathfrak{F}}$ – силовская p-подгруппа группы G. Следовательно, G – группа из пункта 1).

Пусть $|\pi(G)| = 2$. Если $G^{\mathfrak{F}} = G_p$, то $G \in \mathfrak{N}^2$, что невозможно. Итак, $G^{\mathfrak{F}}$ – собственная подгруппа из G_p и G – группа из пункта 2). Лемма доказана.

***Лемма* 1.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех разрешимых групп с p-длиной ≤ 1. Если G – разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $|\pi(G)| = 2$ и $G^{\mathfrak{F}}$ – собственная подгруппа G_p, где $p \in \pi(G)$.*

Доказательство. Предположим, что $|\pi(G)| > 2$, где G – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Отсюда следует, что любая бипримарная подгруппа группы G имеет p-длину ≤ 1. Но тогда хорошо известно, что p-длина группы G не превосходит 1, что невозможно. Итак, $|\pi(G)| \le 2$. Согласно лемме 1.2 $G^{\mathfrak{F}}$ – примарная p-подгруппа. Если $G^{\mathfrak{F}} = G_p$, то G – p-замкнутая группа. А это значит, что p-длина группы G не превосходит 1, что невозможно. Итак, $G^{\mathfrak{F}}$ – собственная подгруппа G_p. Лемма доказана.

2 Основные результаты

***Теорема* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация и $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ содержит любую разрешимую группу G, у которой $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$-достижима в G;*

2) *любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа G либо $G = G_p \rtimes G_q$, где $G_p = G^{\mathfrak{F}}$, либо $|G| = p$, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть G – произвольная разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Пусть $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Согласно лемме 1.2 $G^{\mathfrak{F}}$ – примарная p-группа, где $p \in \pi(G)$.

Пусть $|\pi(G)| > 2$. Покажем, что любая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$-достижима в G. Действительно, пусть G_q – произвольная силовская подгруппа группы G. Рассмотрим подгруппу $G^{\mathfrak{F}}G_p$. Очевидно, что $G^{\mathfrak{F}}G_p$ – собственная подгруппа группы G. Тогда $G^{\mathfrak{F}}G_p \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то G_p – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}G_p$. Согласно лемме 1.1 $G^{\mathfrak{F}}G_p$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. По лемме 1.1 G_p – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. Но тогда согласно условию $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Итак, $|\pi(G)| \le 2$. Рассмотрим следующие два случая.

Пусть $|\pi(G)| = 1$. Так как $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно.

Пусть $|\pi(G)| = 2$. Покажем, что $G = G_p \rtimes G_q$, где $G_p = G^{\mathfrak{F}}$. Предположим противное, то есть $G^{\mathfrak{F}}$ – собственная подгруппа G_p. Согласно лемме 1.1 G_p – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. Рассмотрим подгруппу $G^{\mathfrak{F}}G_q$. Так как $G^{\mathfrak{F}}G_q$ – собственная подгруппа группы G, то $G^{\mathfrak{F}}G_q \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то G_q $\mathfrak{F}$-достижима в $G^{\mathfrak{F}}G_q$. По лемме 1.1 $G^{\mathfrak{F}}G_q$ $\mathfrak{F}$-достижима в G. По лемме 1.1 G_q $\mathfrak{F}$-достижима в G. Следовательно, все силовские подгруппы группы G $\mathfrak{F}$-достижимы в G. Согласно условию $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $G^{\mathfrak{F}} = G_p$.

Пусть теперь $\pi(G) \not\subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Отсюда нетрудно показать, что G – группа простого порядка p, причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Покажем, что из 2) следует 1). Доказательство проведем от противного. Пусть в G все силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-достижимы, но $G \notin \mathfrak{F}$. Пусть H – произвольная собственная подгруппа группы G. Покажем, что все силовские подгруппы из H $\mathfrak{F}$-достижимы в H. Действительно, пусть H_p – произвольная силовская подгруппа из H. По теореме Силова $H_p \subseteq G_p$. Так как $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$, то $G_p \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то H_p – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа G_p. Так как G_p $\mathfrak{F}$-достижима в G, то по лемме 1.1 H_p – $\mathfrak{F}$-достижима в G. Но тогда по лемме 1.1 H_p $\mathfrak{F}$-достижима в G. По индукции $H \in \mathfrak{F}$.

Итак, G – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Так как $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то $G = G_p \rtimes G_q$, где $G_p = G^{\mathfrak{F}}$. По условию G_q – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. Тогда G_q содержится в максимальной подгруппе M группы G, причем M либо $\mathfrak{F}$-нормальна в G, либо нормальна в G. Если M $\mathfrak{F}$-нормальна в G, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$. Отсюда следует, что $G \subseteq M$, что невозможно. Пусть M – нормальная подгруппа G. Тогда $G = G^{\mathfrak{F}}M$. Очевидно, что $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $G/M \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то $G/G^{\mathfrak{F}} \cap M \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}} \cap M$. А это значит, что $G \subseteq M$, что невозможно. Получили противоречие. Итак, $G \in \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

***Теорема* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}$ содержит любую разрешимую группу G, у которой $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая бипримарная подгруппа из G $\mathfrak{F}$-достижима в G;*

2) *любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа G – группа одного из следующих типов:*

a) $G = G_p \rtimes H$, $|\pi(G)| = 3$ *и* $G_p = G^{\mathfrak{F}}$;

b) $|\pi(G)| = 2$ *и* $G^{\mathfrak{F}}$ *– примарная p-подгруппа, причем* $G^{\mathfrak{F}} \subset G_p$;

c) *G – группа простого порядка p, где* $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть G – произвольная разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа.

Пусть $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Отсюда нетрудно показать, что G – группа простого порядка p, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$. Итак, G – группа из пункта c).

Пусть $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Согласно лемме 1.2 $G^{\mathfrak{F}}$ – примарная p-группа, где $p \in \pi(G)$.

Покажем, что $|\pi(G)| \le 3$. Пусть $|\pi(G)| > 3$ и H – произвольная бипримарная подгруппа. Покажем, что H $\mathfrak{F}$-достижима в G. Рассмотрим подгруппу $G^{\mathfrak{F}}H$. Очевидно, что $G^{\mathfrak{F}}H$ – собственная подгруппа группы G. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}}H \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа в $G^{\mathfrak{F}}H$ – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. По лемме 1.1 H $\mathfrak{F}$-достижима в G. Согласно условию теоремы $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $|\pi(G)| \le 3$.

Пусть $|\pi(G)| = 3$. Покажем, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Предположим противное, то есть $G^{\mathfrak{F}} \subset G_p$. Пусть H – произвольная бипримарная подгруппа группы G. Рассмотрим подгруппу $HG^{\mathfrak{F}}$. Очевидно, что $HG^{\mathfrak{F}}$ – собственная подгруппа группы G. Отсюда следует, что $HG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа из $HG^{\mathfrak{F}}$. Согласно лемме 1.1 $HG^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-достижима в G. Теперь по лемме 1.1 H $\mathfrak{F}$-достижима в G. Согласно условию теоремы $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $G_p = G^{\mathfrak{F}}$ и G – группа из пункта 2).

Пусть $|\pi(G)| = 2$. Покажем, что $G^{\mathfrak{F}}$ – собственная подгруппа из G_p. Предположим противное. Тогда $G = G_p \rtimes G_q$, где $G_p = G^{\mathfrak{F}}$. Рассмотрим факторгруппу $G/\Phi(G)$. Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то $G/\Phi(G)$ – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Так как $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа, то в $G/\Phi(G)$ нет собственных бипримарных подгрупп, не содержащих $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)$. Согласно лемме 1.1 любая бипримарная подгруппа $G/\Phi(G)$, содержащая $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)$, $\mathfrak{F}$-достижима в $G/\Phi(G)$. Итак, в $G/\Phi(G)$ любая бипримарная подгруппа $\mathfrak{F}$-достижима в $G/\Phi(G)$. Согласно условию теоремы $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Покажем, что из 2) следует 1).

Пусть $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и в G любая бипримарная подгруппа $\mathfrak{F}$-достижима в G, но $G \notin \mathfrak{F}$. Пусть H – собственная подгруппа группы G. Очевидно, что любая бипримарная подгруппа из H $\mathfrak{F}$-достижима в G. Согласно лемме 1.1 каждая такая подгруппа $\mathfrak{F}$-достижима в H. По индукции $H \in \mathfrak{F}$. Итак, G – минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Пусть G – группа из пункта а), тогда $G = G_p \rtimes H$, где $G_p = G^{\mathfrak{F}}$ и $|\pi(G)| = 3$. Согласно условию теоремы бипримарная подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в G. Следовательно, H содержится в максимальной подгруппе M группы G, причем M либо $\mathfrak{F}$-нормальна, либо M нормальна в G. Если M $\mathfrak{F}$-нормальна, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$. Отсюда $G \subseteq M$, что невозможно. Если M нормальна в G, то $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $G/M \in \mathfrak{F}$ и, значит, $G/G^{\mathfrak{F}} \cap M \in \mathfrak{F}$. Отсюда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$, что невозможно.

Пусть G – группа из пункта 2). Тогда $G = G^{\mathfrak{F}}K$, где K – бипримарная подгруппа группы G. Согласно условию K – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа группы G. Как и выше, нетрудно показать, что такое невозможно. Теорема доказана.

***Следствие* 2.2.1.** *Пусть $\mathfrak{N}^2$ – формация всех метанильпотентных групп. Разрешимая группа G метанильпотентна тогда и только тогда, когда любая ее бипримарная подгруппа $\mathfrak{N}^2$-достижима в G.*

Доказательство следует из леммы 1.3 и теоремы 2.2.

***Следствие* 2.2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех разрешимых групп с p-длиной ≤ 1. Разрешимая группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая ее бипримарная подгруппа $\mathfrak{F}$-достижима в G.*

Доказательство следует из теоремы 2.2 и леммы 1.4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kegel, O.H.* Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die Subnormalteilorverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – V. 30. – P. 225–228.

2. *Васильев, А.Ф.* О влиянии примарных X-субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры: межведомств. сб. / Мин-во обр. и науки Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол. : Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.

3. *Васильева, Т.И.* О конечных группах с $\mathfrak{F}$-достижимыми силовскими подгруппами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко – Гомель, 2006. – 18 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины ; № 4).

4. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука.– 1978. – 267 с.

5. *Семенчук, В.Н.* Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы / В.Н. Семенчук // Алгебра и логика. – 1979. – Т. 18, № 3. – С. 348–382.

6. *Семенчук, В.Н.* Описание разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для произвольной тотально локальной формации / В.Н. Семенчук // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 4. – С. 251–260.

Поступила в редакцию 27.10.10.