МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53

ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОВМЕСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ

А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

DETERMINANT REPRESENTATION OF PADE JOINT APPROXIMATIONS

A.P. Starovoitov, N.V. Rjabchenko

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Установлены детерминантные формулы для числителей и знаменателей совместных аппроксимаций Паде $\pi_j(z), j=1,2,\ldots,r$ совершенной системы функций $\{f_j(z)\}_{j=1}^r$. Доказан аналог теоремы Паде и найден явный вид остатков при приближении $f_j(z)$ рациональной функцией $\pi_j(z)$. Полученные теоремы дополняют и обобщают известные результаты Эрмита, Паде, К. Малера, Е.М. Никишина, А.И. Аптекарева и других авторов.

Ключевые слова: *степенной ряд, аппроксимации Паде, совместные аппроксимации Паде, совершенная система функций, детерминантные представления.*

Determinant formulas for numerators and denominators of joint approximations of Pade $\pi_j(z), j=1,2,\ldots,r$ of perfect system of functions $\{f_j(z)\}_{j=1}^r$ are established. The analogue of the Pade theorem is proved and the obvious kind of the remainders is found at the approach $f_j(z)$ by the rational function $\pi_j(z)$. The received theorems supplement and generalise the known results of Ermite, Pade, K. Mahler, E.M. Nikishin, A.I. Aptekarev and other authors.

Keywords: *sedate a number, approximations of Pade, joint approximations of Pade, perfect system of functions, determinant representation.*

Введение

В данной работе получены детерминальные представления числителей и знаменателей совместных аппроксимаций Паде для совершенной системы функций.

1 Основные определения

Пусть r – натуральное число, $f=(f_1,f_2,...,f_r)$ – набор формальных степенных рядов

$$f_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k^j z^k, \quad j=1,2,\ldots,r, , \qquad (1.1)$$

с комплексными коэффициентами. Зафиксируем произвольные целочисленные неотрицательные числа $n, m_1, m_2, \ldots m_r$ и обозначим $m=\sum_{i=1}^{r} m_i$, $n_i=m+n-m_i$. Будем считать, что система функций $\{f_j(z)\}_{j=1}^r$ является совершенной (определение в [1, с. 150]). Тогда существуют такие многочлены Q_m, $P_{n_i}^i$, что $\deg Q_m \le m$, $\deg P_{n_i}^i \le n_i$ и для $i=1, 2, \ldots, r$

$$R_{m,n}^i(z)=Q_m(z)f_i(z)-P_{n_i}^i(z)=c_i z^{n+m+1}+\cdots. \qquad (1.2)$$

При этом однозначно определяются дроби

$$\pi_i(z)=\frac{P_{n_i}^i(z)}{Q_m(z)}, \quad i=1,2,\ldots,r,$$

которые называют совместными аппроксимациями Паде к набору степенных рядов (1.1).

Для одной функции $(r=1)$ аппроксимации $\pi_1(z)$ были введены Паде [2], который получил также и явные выражения числителя и знаменателя $\pi_1(z)$ в детерминантной форме. Случай $r>1$ для произвольных наборов (1.1) впервые рассмотрен К. Малером [3]. В работах [3]–[5] приведен ряд примеров совершенных систем и изучены их основные свойства. Однако, явный вид числителя и знаменателя Паде функции e^z и, более того, явный вид совместных аппроксимаций Паде $\pi_j(z)$ к набору экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^r$ фактически был известен еще Ш. Эрмиту (без формального определения Ш. Эрмит доказал и совершенность системы экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^r$), который виртуозно использовал свойства $\pi_i(z)$ для доказательства трансцендентности числа e [6]. Представление Ш. Эрмита имеют интегральную форму:

$$Q_m(z)=\frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\infty}[x^n\prod_{k=1}^{r}(x-k)^{m_k}]e^{-zx}dx,$$

$$P_{n_i}^i(z)=\frac{e^{iz}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_i^{\infty}[x^n\prod_{k=1}^{r}(x-k)^{m_k}]e^{-zx}dx,$$

$$R^i_{m,n}(z)=\frac{e^{iz}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^i[x^n\prod_{k=1}^r(x-k)^{m_k}]e^{-zx}dx.$$

Они послужили отправной точкой для многих исследований [3]–[11], в том числе для решения Линдеменом в 1882 году задачи о «квадратуре круга» [6].

Полученные в работе результаты в случае $r=1$ совпадают с известными утверждениями Паде [12, с. 16–17].

2 Основные результаты

Введем в рассмотрение некоторые матрицы и определители, элементами которых служат коэффициенты степенных рядов (1.1). Для этого рассмотрим матрицы-строки

$$\mathbf{F}^r_{m_k}=(\mathbf{f}^r_{n-m_k+1}\ \mathbf{f}^r_{n-m_k+2}\ \cdots\ \mathbf{f}^r_{n+m-m_k+1}),\ \ r=1,2,\ldots,m_r,$$

$$\mathbf{E}(z)=(\mathbf{z}^m\ \mathbf{z}^{m-1}\cdots\mathbf{z}\ \mathbf{1}),$$

$$\mathbf{E}^{m_k}(z)=\left(\sum_{i=0}^{n-m_k}\mathbf{f}^k_i\mathbf{z}^{m+i}\ \ \sum_{i=0}^{n-m_k+1}\mathbf{f}^k_i\mathbf{z}^{m+i-1}\ \cdots\ \sum_{i=0}^{n+m-m_k}\mathbf{f}^k_i\mathbf{z}^i\right),$$

и матрицы порядка $m\times m_k$

$$\mathbf{F}^k=\left[\mathbf{F}^k_{m_k}\ \ \mathbf{F}^k_{m_k+1}\ \cdots\ \mathbf{F}^k_{m_k+m_k}\right]^T,\ \ k=1,2,\ldots,r,$$

где через C^T обозначается транспонированная к C матрица.

***Теорема* 2.1.** *Пусть система функций* $\{f_j(z)\}^r_{j=1}$ (1.1) *является совершенной. Тогда для любого набора неотрицательных целых чисел* $n,m_1,m_2,\ldots m_r$ *и* $n_i=m+n-m_i$, $m=\sum_{i=1}^r m_i$ *существуют совместные аппроксимации Паде*

$$\boldsymbol{\pi}_i(z)=P^i_{n_i}(z)/Q_m(z),\ \ i=1,2,\ldots,r,$$

а их числители и знаменатель определяются равенствами

$$P^i_{n_i}(z)=\det\left[\mathbf{F}^1\ \mathbf{F}^2\cdots\mathbf{F}^r\ \mathbf{E}^{m_k}(z)\right]^T, \tag{2.1}$$

$$Q_m(z)=\det\left[\mathbf{F}^1\ \mathbf{F}^2\cdots\mathbf{F}^r\ \mathbf{E}(z)\right]^T.$$

Введем в рассмотрение определители порядка $m+1$

$$d_{n,m,i}=\det\left[\mathbf{F}^1\ \mathbf{F}^2\ldots\mathbf{F}^r\ \mathbf{F}^k_{m_k+m_k+i}\right]^T,$$

$$k=1,2,\ldots,r,$$

где матрица-строка

$$F^k_{m_k+m_k+i}=\left(\mathbf{f}^k_{n+i}\ \ \mathbf{f}^k_{n+i+1}\ \cdots\ \mathbf{f}^k_{n+m+i}\right)$$

и определители $d_{n,m}$ m-го порядка, полученные из определителя $d_{n,m,i}$ вычеркиванием $(m+1)$-го столбца и $(m+1)$-ой строки.

***Теорема* 2.2.** *Для многочленов, определенных равенствами* (2.1), *справедливы равенства*

$$R^k_{m,n}(z)=Q_m(z)\cdot f_k(z)-P^k_{n_k}(z)=$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}d_{n,m,i}\cdot z^{n+m+i}. \tag{2.2}$$

***Замечание* 2.1.** *Из определения совместных аппроксимаций Паде и того, что* $Q_m(z)$ *и* $P^k_{n_k}(z)$, *определенные равенствами* (2.1), *являются, соответственно, многочленами степени не выше* m *и* n_k, *вытекает, что теорема* 2.1 *является следствием теоремы* 2.2.

***Замечание* 2.2.** *При* $r=1$ *теорема* 2.2 *доказана Паде* [12, теорема 1.1.1]).

***Замечание* 2.3.** *В определении совместных аппроксимаций Паде* $\boldsymbol{\pi}_i(z)$, $i=1,2,\ldots,r$ *многочлены, стоящие в числителе и знаменателе можно брать с точностью до числового множителя, но их отношение задает единственный набор* $\{\boldsymbol{\pi}_i(z)\}^r_{i=1}$ *совместных аппроксимаций Паде. В дальнейшем полагаем, что числители и знаменатель дробей* $\boldsymbol{\pi}_i(z)$, $i=1,2,\ldots,r$ *задаются равенствами* (2.1).

Следуя Паде, будем искать многочлены $Q_m(z)$ и $P^k_{n_k}(z)$ исходя из равенств (1.2). Пусть

$$P^k_{n_k}(z)=a^k_0+a^k_1z+a^k_2z^2+\cdots+a^k_{n_k}z^{n_k},$$

$$k=1,2,\ldots,r;$$

$$Q_m(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m.$$

Домножая числитель и знаменатель дроби $\boldsymbol{\pi}_k(z)$ на числовой множитель, можно добиться, чтобы, например, $b_0=1$. Пусть $(q)_k$ – коэффициенты при z^k ряда q. Для нахождения Q_m рассмотрим систему m линейных однородных уравнений относительно m+1 неизвестных коэффициентов b_k, $k=0,1,\ldots,m$:

$$(Q_mf_k)_j=0, \tag{2.3}$$

$$j=n_k+1,n_k+2,\ldots,m_k+n_k,\ \ k=1,2,\ldots,r.$$

Многочлены $P^k_{n_k}(z)$ определим равенствами

$$P^k_{n_k}(z)=\sum_{j=0}^{n_k}(Q_mf_k)_jz^j,$$

$$k=1,2,\ldots,r.$$

Перепишем равенства (2.3) в развернутом виде, принимая во внимание, что $b_0=1$:

$$\begin{cases}f^1_{m+n-m_1+1}+b_1f^1_{m+n-m_1}+\cdots+b_mf^1_{n-m_1+1}=0,\\ f^1_{m+n-m_1+2}+b_1f^1_{m+n-m_1+1}+\cdots+b_mf^1_{n-m_1+2}=0,\\ \cdots\\ f^1_{m+n}+b_1f^1_{m+n-1}+\cdots+b_mf^1_n=0,\\ \ldots\\ f^r_{m+n-m_r+1}+b_rf^r_{m+n-m_r}+\cdots+b_mf^r_{n-m_r+1}=0,\\ f^r_{m+n-m_r+2}+b_1f^r_{m+n-m_r+1}+\cdots+b_mf^r_{n-m_r+2}=0,\\ \cdots\\ f^r_{m+n}+b_1f^r_{m+n-1}+\cdots+b_mf^r_n=0.\end{cases} \tag{2.4}$$

Перепишем систему (2.4) в матричном виде:

$$
\begin{pmatrix}
f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n+m-m_1} \\
f^1_{n-m_1+2} & f^1_{n-m_1+3} & \cdots & f^1_{n+m-m_1+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^1_{n} & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^r_{n-m_r+1} & f^r_{n-m_r+2} & \cdots & f^r_{n+m-m_r} \\
f^r_{n-m_r+2} & f^r_{n-m_r+3} & \cdots & f^r_{n+m-m_r+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^r_{n} & f^r_{n+1} & \cdots & f^r_{n+m-1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
b_m \\ b_{m-1} \\ \cdots \\ b_{m-m_1+1} \\ \cdots \\ b_{m_r} \\ b_{m_r-1} \\ \cdots \\ b_1
\end{pmatrix}
= -
\begin{pmatrix}
f^1_{n+m-m_1+1} \\ f^1_{n+m-m_1+2} \\ \cdots \\ f^1_{n+m} \\ \cdots \\ f^r_{n+m-m_r+1} \\ f^r_{n+m-m_r+2} \\ \cdots \\ f^r_{n+m}
\end{pmatrix}.
$$

Главный определитель этой системы совпадает с определителем $d_{n,m}$. Предполагаем, что $d_{n,m} \neq 0$. Тогда, решая систему по правилу Крамера, получим явный вид коэффициентов $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и, следовательно, знаменателя $Q_m(z)$. Пренебрегая числовым множителем, результат можно записать в виде (2.1). Заметим, что если знаменатель определяется равенством (2.1), т. е.

$$
Q_m(z) = \det\left[\mathbf{F}^1\ \mathbf{F}^2 \cdots \mathbf{F}^r\ \mathbf{E}(z)\right]^T,
$$

то $b_0 = d_{n,m}$. Следовательно, из предположения, что $d_{n,m} \neq 0$ следует, что $b_0 \neq 0$. Отсюда, с учетом теоремы 2.1, вытекает следующее утверждение.

***Утверждение* 2.1.** *Если для всех наборов* $m_1, m_2, \ldots, m_r$ *определитель* $d_{n,m} \neq 0$, *то система функций* (1.1) *является совершенной и совместные аппроксимации Паде* $\boldsymbol{\pi}_i(z)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ *определяется единственным образом равенствами* (2.1).

Для отыскания явного вида многочлена $P^k_{n_k}(z)$ поступим следующим образом. Рассмотрим выражение:

$$
Q_m(z)\sum_{i=0}^{\infty} f^k_i z^i =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n+m-m_1+1} \\
f^1_{n-m_1+2} & f^1_{n-m_1+3} & \cdots & f^1_{n+m-m_1+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^1_{n} & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^r_{n-m_r+1} & f^r_{n-m_r+2} & \cdots & f^r_{n+m-m_r+1} \\
f^r_{n-m_r+2} & f^r_{n-m_r+3} & \cdots & f^r_{n+m-m_r+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^r_{n} & f^r_{n+1} & \cdots & f^r_{n+m} \\
\sum\limits_{i=0}^{\infty} f^k_i z^{m+i} & \sum\limits_{i=0}^{\infty} f^k_i z^{m+i-1} & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{\infty} f^k_i z^{i}
\end{vmatrix}. \quad (2.5)
$$

Обозначим через A_{m_k} блок в определителе (2.5) вида:

$$
\begin{vmatrix}
f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_r+2} & \cdots & f^k_{n+m-m_k} & f^k_{n+m-m_k+1} \\
f^k_{n-m_k+2} & f^k_{n-m_k+3} & \cdots & f^k_{n+m-m_k+1} & f^k_{n+m-m_k+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^k_{n-1} & f^k_{n} & \cdots & f^k_{n+m-2} & f^k_{n+m-1} \\
f^k_{n} & f^k_{n+1} & \cdots & f^k_{n+m-1} & f^k_{n+m}
\end{vmatrix},
$$

где $k = 1, 2, \ldots, r$. Вычитая из последней строки определителя (2.5) первую строку блока A_{m_k}, умноженную на z^{m+n-m_k+1}, вторую строку блока A_{m_k}, умноженную на z^{m+n-m_k+2}, и так далее вплоть до последней строки блока A_{m_k}, умноженной на z^{m+n}, получим определитель, у которого ряды в последней строке имеют лакуны длины m_k. Сохраняя начальные отрезки этих рядов, приходим к определителю:

$$
P^k_{n_k}(z) =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n+m-m_1} & f^1_{n+m-m_1+1} \\
f^1_{n-m_1+2} & f^1_{n-m_1+3} & \cdots & f^1_{n+m-m_1+1} & f^1_{n+m-m_1+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^1_{n} & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m-1} & f^1_{n+m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^r_{n-m_r+1} & f^r_{n-m_r+2} & \cdots & f^r_{n+m-m_r} & f^r_{n+m-m_r+1} \\
f^r_{n-m_r+2} & f^r_{n-m_r+3} & \cdots & f^r_{n+m-m_r+1} & f^r_{n+m-m_r+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^r_{n} & f^r_{n+1} & \cdots & f^r_{n+m-1} & f^r_{n+m} \\
\sum\limits_{i=0}^{n_k-m} f^k_i z^{i+m} & \sum\limits_{i=0}^{n_k-m+1} f^k_i z^{m+i-1} & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{n_k-1} f^k_i z^{i+1} & \sum\limits_{i=0}^{n_k} f^k_i z^{i}
\end{vmatrix}.
$$

Данный определитель представляет многочлен степени не выше n_k, и в компактном виде представлен первым равенством в (2.1).

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.2. С учетом последнего равенства и равенства (2.5), преобразовав левую часть (2.2), получим

$$
R^k_{n,m}(z) =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n+m-m_1} & f^1_{n+m-m_1+1} \\
f^1_{n-m_1+2} & f^1_{n-m_1+3} & \cdots & f^1_{n+m-m_1+1} & f^1_{n+m-m_1+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^1_{n} & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m-1} & f^1_{n+m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^r_{n-m_r+1} & f^r_{n-m_r+2} & \cdots & f^r_{n+m-m_r} & f^r_{n+m-m_r+1} \\
f^r_{n-m_r+2} & f^r_{n-m_r+3} & \cdots & f^r_{n+m-m_r+1} & f^r_{n+m-m_r+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f^r_{n} & f^r_{n+1} & \cdots & f^r_{n+m-1} & f^r_{n+m} \\
\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} f^k_i z^{i+m} & \sum\limits_{i=n+2}^{\infty} f^k_i z^{m+i-1} & \cdots & \sum\limits_{i=n+m}^{\infty} f^k_i z^{i+1} & \sum\limits_{i=n+m+1}^{\infty} f^k_i z^{i}
\end{vmatrix} =
$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} z^{n+m+i} \begin{vmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n+m-m_1} & f^1_{n+m-m_1+1} \\ f^1_{n-m_1+2} & f^1_{n-m_1+3} & \cdots & f^1_{n+m-m_1+1} & f^1_{n+m-m_1+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^1_{n} & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m-1} & f^1_{n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^r_{n-m_r+1} & f^r_{n-m_r+2} & \cdots & f^r_{n+m-m_r} & f^r_{n+m-m_r+1} \\ f^r_{n-m_r+2} & f^r_{n-m_r+3} & \cdots & f^r_{n+m-m_r+1} & f^r_{n+m-m_r+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^r_{n} & f^r_{n+1} & \cdots & f^r_{n+m-1} & f^r_{n+m} \\ f^k_{n+i} & f^k_{n+i+1} & \cdots & f^k_{n+m} & f^k_{n+m+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} d_{n,m,i} \cdot z^{n+m+i}.$$

При предыдущих преобразованиях воспользовались определением суммы степенного ряда и правилом сложения определителей. Теорема 2.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин, Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
2. *Pade, H.* Sur La representation approchee d`une function par des fractions rationelles / H. Pade. – Ann. Scient. Ecole norm. super. (3), 1892. – 9. – P. 1–93.
3. *Mahler, K.* Perfect systems / K. Mahler // Compositio math. – 1968. – 19. – f. 2. – P. 95–166.
4. *Jager, H.A.* Multidimensionel Generalization of the Pade Table / H.A. Jager // K. Nederl. Ak. Wetenschappen, ser. A. – 1964. – № 67. – P. 192–249.
5. *Coates, J.* On the algebraic approximation of functions / J. Coates // K. Nederl. Ak. Wetenschappen, ser. A. – 1966. – № 69. – P. 421–461.
6. *Клейн, Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей / Ф. Клейн. – М.–Л., 1933.
7. *de Bruijn, M.G.* Three new examples of generalized Pade tables, which are partly normal / M.G. de Bruijn // Depar. of Mathem. Univers. Amsterdam, Report 76–11. – P. 1–13.
8. *Сорокин, В.Н.* Сходимость совместных аппроксимаций Паде одного класса функций / В.Н. Сорокин // Матем. Сборник. – 1987. – Т. 132(174), №3. – С. 391–400.
9. *Никишин, Е.М.* Совместные аппроксимации Паде / Е.М. Никишин // Матем. Сборник, 1980. – Т. 113 (155), № 4 (18). – С. 499–519.
10. *Аптекарев, А.И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.
11. *Аптекарев, А.И.* Об аппроксимациях Паде к набору $\{{}_1F_1(1,c;\lambda_i z\}_{i=1}^{k}$ / А.И. Аптекарев // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981. – № 2. – С. 58–62.
12. *Бейкер, Дж.* Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. – М. : Мир, 1986.

Поступила в редакцию 02.11.10.