

## Свойства собственных волн плоско-параллельного волновода, заполненного зеркально-сопряжёнными киральными средами

В.В. ФИСАНОВ, И.В. ВИННИК

Рассматривается плоско-параллельный волновод  $-\infty < x < \infty$ ,  $|z| \leq d$  с граничными условиями  $\hat{z} \times \mathbf{E}(x, \pm d) = 0$  на его стенках. Плоскость  $z = 0$  является поверхностью раздела заполняющих его однородных зеркально-сопряжённых киральных сред, то есть таких сред, которые имеют идентичные значения диэлектрической ( $\varepsilon$ ) и магнитной ( $\mu$ ) проницаемостей, а их параметры киральности различаются только знаком. Закономерности отражения и преломления волн на плоской поверхности раздела двух зеркально-сопряжённых полупространств [1] здесь неприменимы, поэтому решается граничная задача для однородных уравнений Максвелла при гармонической временной зависимости вида  $e^{-i\omega t}$  с использованием уравнений связи типа Теллегена

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + i\sqrt{\varepsilon\mu}G\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} - i\sqrt{\varepsilon\mu}G\mathbf{E}, \quad (1)$$

где  $G$  — приведённый параметр киральности [2]. Для определённости примем, что  $G > 0$  в области  $0 < z < d$ . Применение декомпозиции Борена

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad i\sqrt{\mu/\varepsilon}\mathbf{H} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 \quad (2)$$

с введением вспомогательных волновых полей  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ , подчиняющихся уравнениям

$$\nabla \times \mathbf{E}_{1,2} = \pm \gamma_{1,2} \mathbf{E}_{1,2}, \quad (\nabla^2 + \gamma_{1,2}^2) \mathbf{E}_{1,2} = 0, \quad (3)$$

где  $\gamma_{1,2} = k(1 \pm G)$  — волновые числа полей круговой поляризации  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ , соответственно,  $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$  — среднее (псевдо)волновое число, позволяет получить частные решения волнового уравнения (3) с общим фактором  $e^{iKx}$ . Составляя из них согласно (2) суперпозиции надлежащим образом подобранных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  для областей  $0 < z < d$  и  $-d < z < 0$  и применяя граничные условия при  $z = 0$ ,  $z = \pm d$ , после вычисления детерминанта системы алгебраических уравнений относительно амплитудных множителей придём к дисперсионному уравнению для собственных волн рассматриваемого кироволновода

$$(a+b)^4 \cos 2(\alpha_1 + \alpha_2)d + (a-b)^4 \cos 2(\alpha_1 - \alpha_2)d + \\ + 2(a^2 - b^2)^2 [1 - \cos 2\alpha_1 d - \cos 2\alpha_2 d] - 16a^2 b^2 = 0. \quad (4)$$

Здесь введены обозначения

$$a = \alpha_1/\gamma_1, \quad b = \alpha_2/\gamma_2; \quad \alpha_{1,2} = \sqrt{\gamma_{1,2}^2 - K^2}. \quad (5)$$

Уравнение (4) может быть существенно упрощено разложением на множители. Преобразуя первые три слагаемых к полному квадрату, придём к паре уравнений

$$(a+b)^2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)d - (a-b)^2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)d = \pm 4ab, \quad (6)$$

каждое из которых также допускает факторизацию. Уравнение со знаком <минус> в правой части (6) приводится к равносильной форме, впервые приведённой в [3] и относящейся к однородно заполненному кироволноводу с обеими электрическими стенками, раздвинутыми на расстояние  $d$ . Оно разделяется на два дисперсионных уравнения

$$a \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_1 d + b \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_2 d = 0, \quad a \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \alpha_1 d + b \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \alpha_2 d = 0. \quad (7)$$

Уравнение со знаком <плюс> в (6) приводится к уравнениям

$$a \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_1 d - b \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \alpha_2 d = 0, \quad a \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \alpha_1 d - b \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_2 d = 0, \quad (8)$$

которые соответствуют двум семействам мод однородно заполненного кироволновода высотой  $d$  со смешанными стенками (на одной из стенок задано граничное условие  $\hat{z} \times \mathbf{E} = 0$ , тогда как на другой стенке — условие  $\hat{z} \times \mathbf{H} = 0$ ).

Таким образом, спектр мод рассматриваемого кироволновода с неоднородным заполнением является объединением спектров мод двух однородно заполненных киральной средой волноводов половинной высоты со стенками идентичной и смешанной проводимости. Этот вывод соответствует концепции изображений, согласно которой изображаемый киральный объект является зеркально-сопряжённым с его прототипом [4].

Волны в плоско-параллельном кироволноводу с электрическими стенками являются гибридными, они распространяются попарно (свойство бифуркации) [5], [6], за исключением основной моды [7]. Кроме того, дисперсионные кривые модовых пар могут неоднократно пересекаться [8], [2]. В данной работе важный для выяснения детальной структуры дисперсионных кривых вопрос о числе точек пересечения исследуется путём рассмотрения всеволновой эволюции квадрата постоянной распространения  $K^2$ , включая область нераспространяющихся волн. С этой целью дисперсионные зависимости изучаются в координатах  $x = (kd/\pi)^2$  и  $y = (Kd/\pi)^2$ . Точки пересечения дисперсионных кривых для уравнений (7) и для уравнений (8) определяются соответственно условиями

$$\sin \frac{1}{2}(\alpha_1 \pm \alpha_2)d = 0, \quad \cos \frac{1}{2}(\alpha_1 \pm \alpha_2)d = 0. \quad (9)$$

Сюда не входят точки бифуркации ( $K = 0$ ), они задаются отличными от (9) условиями

$$\sin \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)d = \sin kd = 0, \quad \cos \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)d = \cos kd = 0, \quad (10)$$

соответственно. Характерно, что при выборе материальных уравнений в форме (1) условия (10) не содержат параметр киральности.

На примере волновода с идентичными стенками определим расположение точек пересечения на плоскости  $(x, y)$ . Исходя из первого уравнения в (9) и используя выражение  $\gamma_1^2 - \gamma_2^2 = 4k^2G$ , найдём абсциссы и ординаты точек пересечения

$$x_{ln} = ln/G, \quad y_{ln} = (1 \pm G)^2 x_{ln} - (l \pm n)^2, \quad (11)$$

где  $l, n$  — натуральные числа. Соотнесём число  $l$  с порядковым номером  $m$  пары мод, имеющих точку бифуркации  $x = m^2$ , полагая  $l = m \neq 0$ . Исключая из выражений (11)  $n$ , найдём, что все точки пересечения  $m$ -ой модовой пары расположены на линии

$$y = \left( \frac{x}{m} - m \right) \left( m - \frac{G^2 x}{m} \right). \quad (12)$$

Нанесём на  $(x, y)$ -плоскость сетку с ячейками переменного размера в форме параллелограмма при помощи прямых

$$y = (1 + G)^2 x - (m + n)^2, \quad (13)$$

$$y = (1 - G)^2 x - (m - n)^2, \quad (14)$$

где  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ . Линии с  $m \pm n = 0$  разграничивают область распространяющихся волн  $y > 0$  на секторы медленных волн ( $K > \gamma_1^2$ ), быстрых волн ( $K < \gamma_2$ ) и промежуточный сектор ( $\gamma_2 < K < \gamma_1$ ) [6]. Прямые (14) пересекаются с линией (12) в точках с абсциссами  $x = mn/G$ , то есть в точках пересечения дисперсионных кривых номера  $m$ . Значение  $n = m$  соответствует точке с абсциссой  $x = m^2/G$ , в которой прямая (14) пересекает только одну, принадлежащую семейству чётных волн, дисперсионную кривую (описывается первым уравнением в (7)). Следовательно, для  $m$ -ой пары дисперсионных кривых имеется как раз  $m$  точек пересечения

$$x_{mn} = \frac{mn}{G}, \quad y_{mn} = \left(\frac{n}{G} - m\right)(m - nG) \quad m = 1, 2, 3, \dots; n = 0, 1, \dots, (m-1). \quad (15)$$

Если параметр киральности  $G$  является отношением целых чисел ( $G = n/m < 1$ ), то происходит наложение  $n$ -ой точки пересечения на точку бифуркации. В противном случае, при  $n/m < G < (n+1)/m$ , в интервале  $x_{mn} < x < x_{m(n+1)}$  происходит дополнительное пересечение дисперсионных кривых в точке бифуркации  $x = m^2$ . В сектор

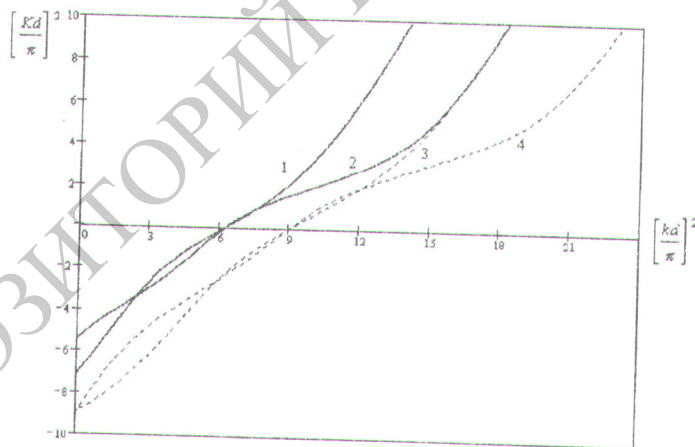


Рис. 1. Дисперсионные кривые кироволновода с зеркально-сопряжёнными средами.

медленных волн дисперсионные кривые не заходят, так как решения уравнений (7) и (8) для обоих положительных поперечных волновых чисел  $\alpha_{\pm}$  там отсутствуют. В промежуточном секторе, где пересечения дисперсионных кривых уже не происходят, волны, объединённые общей частотой отсечки (точка  $x = m^2$ ), обладают нормальной дисперсией. Их постоянные распространения с увеличением частоты растут, но дисперсионные кривые ограничены ближайшими линиями семейства (13). Асимптотой чётных волн является прямая этого семейства с  $n = m + 1$ , тогда как для нечётных волн асимптотой служит прямая с  $n = m$ .

Построение дисперсионных кривых для уравнений (8) проводится аналогичным образом. Модовые пары номера  $M = 0, 1, 2, \dots$  с общей частотой отсечки (точка  $x = (M + \frac{1}{2})^2$ ) обладают точками пересечения с координатами

$$x_{MN} = (M + \frac{1}{2})(N + \frac{1}{2})/G, y_{MN} = [(N + \frac{1}{2}G^{-1}) - (M + \frac{1}{2})][M + \frac{1}{2} - (N + \frac{1}{2})G], \quad (16)$$

где  $M = 1, 2, 3, \dots$ ,  $N = 0, 1, \dots, (M - 1)$ . Асимптотами для кривых, принадлежащих первому и второму уравнениям (8), являются, соответственно, прямые  $y = (1 + G)^2x - (2M + 1)^2$  и  $y = (1 + G)^2x - (2M + 2)^2$ . На рисунке приведены дисперсионные кривые для двух пар смежных мод неоднородного волновода, принадлежащих к спектру однородных волноводов со смешанными ( $M = 2$ ) и идентичными ( $m = 3$ ) стенками. Кривые 1, 4 относятся к первым уравнениям в (8) и (7) соответственно, а кривые 2, 3 — ко вторым уравнениям. При значении параметра киральности  $G = 0, 5$  в области распространения в каждой паре мод имеется по одной точке перекрытия кривых.

**Abstract.** The dispersion relation for eigenwaves of a parallel-plate chirowaveguide filled with mirror-conjugate media is divided on a pair of equations describing even and odd waves of an electric-wall homogeneously filled chirowaveguide at half height and on another pair of equations related to such chirowaveguide but with mixed walls. It is found that the dispersion curves of the  $m$ -mode pair with the below-cut-off region included have just  $m$  points of crossing.

#### Литература

- [1] A. Lakhtakia, V.V. Varadan, V.K. Varadan, *What happens to plane waves at the planar interfaces of mirror-conjugated chiral media?*, J. Opt. Soc. Am. A 6:1 (1989), 23–26.
- [2] J. Lekner, *Properties of a chiral slab waveguide*, Pure Appl. Opt. 6:3 (1997), 373–384.
- [3] Е.Л. Альтшулер, А.Н. Москалев, В.А. Рыжов, Р.М. Рыгин, П.Г. Сильвестров, В.Н. Фомичев, И.Б. Хриплович, *Электромагнитные волны в волноводах с оптически активным заполнением*, ЖТФ 54:10 (1984), 1956–1967.
- [4] M.S. Kluskens, E.H. Newman, *Image theory for chiral bodies*, IEEE Trans. Antennas Propagat. 39:5 (1991), 676–677.
- [5] V.K. Varadan, A. Lakhtakia, V.V. Varadan, *Propagation in a parallel-plate waveguide wholly filled with a chiral medium*, J. Wave-Mater. Interact. 3:3 (1988), 267–272.
- [6] P. Pelet, N. Engheta, *The theory of chirowaveguides*, IEEE Trans. Antennas Propagat. 38:1 (1990), 90–98.
- [7] S.F. Mahmoud, *On mode bifurcation in chirowaveguides with perfect electric walls*, J. Electromagn. Waves Appl. 6:10 (1992), 1381–1392.
- [8] H. Cory, S. Waxman, *Wave propagation along a fully or a partially loaded parallel plate chirowaveguide*, IEE Proc. — Microw. Antennas Propagat. 141:4 (1994), 299–306.