Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины, 6(9), Проблемы взаимодействия излучения с веществом, 2001

Частотное преобразование электромагнитных волн в средах с естественной и магнитной гиротропией

В. Н. Рогозенко, А. Н. Сердюков

Нелинейное взаимодействие оптических полей в анизотропных средах с естественной оптической активностью и магнитной гиротропией может быть описано посредством феноменологических материальных уравнений

$$\mathbf{D} = \left(\varepsilon + i\mathbf{G}^{\times}\right)\mathbf{E} + i\alpha\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{P}^{nl}, \tag{1}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} - i\tilde{\alpha}\,\mathbf{E} \tag{2}$$

и уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \tag{4}$$

Рассматривая электромагнитные волны оптического диапазона, далее везде будем полагать $\mu = 1$.

Исключим в соотношениях (1)–(4) векторы **D**, **E** и **H**. В результате получим для магнитной индукции следующее неоднородное волновое уравнение:

$$\left\{\nabla^{\times}\left(\varepsilon - \alpha\,\tilde{\alpha} + i\mathbf{G}^{\times} + i(\gamma\nabla)^{\times}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}\nabla^{\times} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\nabla^{\times}\frac{\partial\mathbf{P}^{nl}}{\partial t}. \tag{5}$$

В уравнении (5) псевдотензор γ связан с псевдотензором магнитоэлектрической восприимчивости среды α соотношением

$$\gamma = \tilde{\alpha} - Sp\alpha. \tag{6}$$

Используя в качестве источника электромагнитного поля монохроматическую волну нелинейной поляризации с частотой Ω, в дальнейшем будем полагать среду прозрачной на этой частоте, а также на частотах преобразуемого излучения. На этом основании будем считать вещественными электродинамические параметры среды ε, α, а также вектор магнитной гирации **G**.

Рассмотрим далее задачу о частотном преобразовании электромагнитного излучения в средах, описываемых феноменологическими материальными уравнениями (1), (2). Решая данную задачу в приближении заданного поля, воспользуемся методом, развитым в известной классической работе Бокутя и Хаткевича [1] для негиротропных анизотропных сред.

При падении на границу анизотропной среды плоских монохроматических волн с частотами ω_a в среде преломятся на каждой частоте по две в общем случае эллиптически поляризованные волны. Эти волны приведут к возбуждению в среде волн нелинейной поляризации

$$\mathbf{P}^{nl} = \mathbf{P}_0 e^{i(\mathbf{K}_p\mathbf{r} - \Omega t)} \tag{7}$$

с комбинационными частотами Ω и волновыми векторами $\mathbf{K}_p$. Каждая из таких волн, в свою очередь, будет порождать электромагнитное излучение, поле которого удовлетворяет неоднородному волновому уравнению (5).

Частное решение уравнения (5) с правой частью, определяемой выражением (7), ищем в виде:

$$\mathbf{B}^{nl} = \mathbf{B}_0 e^{i\left(\mathbf{K}_p\mathbf{r}-\Omega t\right)}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (5), находим

$$\mathbf{B}_0 = -4\pi\left(1+\mathbf{M}^{\times}\eta\mathbf{M}^{\times}\right)^{-1}\mathbf{M}^{\times}\eta\mathbf{P}_0, \tag{9}$$

где

$$\eta = \left(\varepsilon - \alpha\tilde{\alpha} + i(\mathbf{G}+\gamma\mathbf{M})^{\times}\right)^{-1}, \tag{10}$$

$$\mathbf{M} = c\mathbf{K}_p / \Omega. \tag{11}$$

Значения параметров ε, α, γ и $\mathbf{G}$ в этих соотношениях определены на комбинационной частоте Ω.

Общее решение уравнения (5) без правой части

$$\mathbf{B} = \sum_{\lambda=1,2} A^{\lambda}\mathbf{e}_{\lambda} e^{i\left(\mathbf{K}_{\lambda}\mathbf{r}-\Omega t\right)} \tag{12}$$

описывает эллиптически поляризованные собственные волны в гиротропной анизотропной среде с амплитудами A^{λ} и единичными (вообще говоря, не ортогональными при наличии естественной гиротропии [2]) векторами поляризации $\mathbf{e}_{\lambda}$. Следуя методике работы [1], представим амплитуды собственных волн в виде

$$A^{\lambda} = B^{\lambda} - \mathbf{B}_0\mathbf{e}^{\lambda *} \tag{13}$$

где постоянные интегрирования B^{λ} находятся в результате решения граничной задачи. В (13) комплексные векторы $\mathbf{e}^{\lambda}$ базиса, взаимного базису $\mathbf{e}_{\lambda}$, определены следующим образом:

$$\mathbf{e}^{\lambda} = \sum_{\lambda'} g^{\lambda\lambda'}\mathbf{e}_{\lambda'}, \tag{14}$$

где $g^{\lambda\lambda'}$ – контравариантный двумерный метрический тензор, обратный ковариантному эрмитову метрическому тензору

$$g_{\lambda\lambda'} = \mathbf{e}_{\lambda}\mathbf{e}_{\lambda'}^{\ *}, \tag{15}$$

так что

$$\sum_{\lambda'} g^{\lambda\lambda'} g_{\lambda'\lambda''} = \delta^{\lambda}{}_{\lambda''} \tag{16}$$

есть единичный тензор (символ Кронекера).

Общее решение неоднородного волнового уравнения (5) с вектором нелинейной поляризации (7) в правой части найдем, присоединяя к (8) общее решение (12) соответствующего однородного уравнения. Разлагая вектор $\mathbf{B}_0$ по не ортогональному базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{B}_0 = \sum_{\lambda}\left(\mathbf{B}_0\mathbf{e}^{\lambda *}\right)\mathbf{e}_{\lambda}, \tag{17}$$

с учётом обозначения (13) запишем

$$\mathbf{B} = \sum_{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda} \left\{ B^{\lambda} - \mathbf{B}_0 \mathbf{e}^{\lambda *} \left(1 - e^{i(\mathbf{K}_p - \mathbf{K}_{\lambda})\mathbf{r}} \right) \right\} e^{i(\mathbf{K}_{\lambda}\mathbf{r} - \Omega t)} . \qquad (18)$$

Решение уравнения (5) в форме (18) удобно тем, что оно приводит к конечным значениям вектора **B,** включая и случай фазового синхронизма, когда один из волновых векторов $\mathbf{K}_{\lambda}$ собственных электромагнитных волн в анизотропной среде совпадает с волновым вектором $\mathbf{K}_p$ волны нелинейной поляризации (ср. [1]).

Общее решение (18) проанализируем более подробно на примере генерации гармоник электромагнитного излучения в оптически одноосных магнитоупорядоченных кристаллах с тензорами диэлектрической проницаемости и естественной гирации [2]

$$\varepsilon = \varepsilon_o + (\varepsilon_e - \varepsilon_o)\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + iG\mathbf{c}^{\times} ,$$

$$\alpha = \alpha_{11} + (\alpha_{33} - \alpha_{11})\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} - \alpha_{12}\mathbf{c}^{\times} .$$

Решением дисперсионного уравнения

$$\left| 1 + N^2 \mathbf{c}^{\times} \left(\varepsilon - \alpha\widetilde{\alpha} + i\gamma \mathbf{M}^{\times} \right)^{-1} \mathbf{c}^{\times} \right| = 0 \qquad (19)$$

для волн, распространяющихся вдоль **c**, будут показатели преломления $N = N_{\lambda}$

$$N_{\lambda} = \sqrt{\varepsilon_o(\Omega) + \lambda G(\Omega)} + \lambda\alpha_{11}(\Omega) , \qquad (20)$$

где $\lambda = \pm 1$. Нормированные векторы поляризации электромагнитных волн, соответствующих этим показателям преломления, удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{e}^{\lambda} = \mathbf{e}_{\lambda} , \quad \mathbf{c}\mathbf{e}_{\lambda} = 0, \quad \mathbf{c}^{\times}\mathbf{e}_{\lambda} = -i\lambda\mathbf{e}_{\lambda} .$$

В этом случае общее решение (18) для магнитной индукции преобразованного излучения принимает следующий вид:

$$\mathbf{B} = \sum_{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda} \left\{ B^{\lambda} - \frac{4\pi i\lambda N_p \mathbf{P}_0 \mathbf{e}^{\lambda *}}{\left(\widetilde{N}_{-\lambda} + N_p\right)\left(N_{\lambda} - N_p\right)} \left(1 - e^{i\frac{\Omega}{c}(\mathbf{N}_p - \mathbf{N}_{\lambda})z} \right) e^{i\left(\frac{\Omega}{c} N_{\lambda} z - \Omega t\right)} \right\}, \qquad (21)$$

где $z = \mathbf{cr}$, $N_p = \left|\mathbf{M}_p\right|$,

$$\widetilde{N}_{-\lambda} = \sqrt{\varepsilon_o(\Omega) + \lambda G(\Omega)} - \lambda\alpha_{11}(\Omega) . \qquad (22)$$

При возбуждении электромагнитного поля циркулярно поляризованной волной нелинейной поляризации

$$\mathbf{P}_{\lambda}^{nl} = P_{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda} e^{i\left(\frac{\Omega}{c} N_p z - \Omega t\right)} \qquad (23)$$

в решении (21) следует положить

$$\mathbf{P}_0 = P_{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda} ,$$

так что

$$\mathbf{B}_\lambda = \mathbf{e}_\lambda \left\{ B^\lambda - \frac{4\pi i\lambda N_p P_\lambda}{\left(\widetilde{N}_{-\lambda} + N_p\right)\left(N_\lambda - N_p\right)} \left(1 - e^{i\frac{\Omega}{c}\left(\mathbf{N}_p - \mathbf{N}_\lambda\right)z}\right) e^{i\left(\frac{\Omega}{c}N_\lambda z - \Omega t\right)} \right\}. \quad (25)$$

Воспользовавшись далее уравнениями Максвелла (3), (4) и материальными уравнениями (1), (2), определим напряжённость электрического поля волны, генерируемой волной нелинейной поляризации:

$$\mathbf{E}_\lambda = \mathbf{e}_\lambda \left\{ i\frac{\lambda}{N_\lambda} B^\lambda + \frac{4\pi P_\lambda}{N_\lambda\left(\widetilde{N}_{-\lambda} - N_p\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{4\pi P_\lambda}{\left(\widetilde{N}_{-\lambda} + N_p\right)\left(N_\lambda - N_p\right)} \left(1 - e^{i\frac{\Omega}{c}\left(\mathbf{N}_p - \mathbf{N}_\lambda\right)z}\right) \right\} e^{i\left(\frac{\Omega}{c}N_\lambda z - \Omega t\right)}. \quad (25)$$

Напряжённость магнитного поля найдём, подставляя в материальное уравнение (2) выражения (24) и (25):

$$\mathbf{H}_\lambda = \mathbf{e}_\lambda \left\{ \frac{N_\lambda^0}{N_\lambda} B^\lambda + \frac{4\pi i P_\lambda \alpha(\omega)}{N_\lambda\left(\widetilde{N}_{-\lambda} - N_p\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{4\pi P_\lambda}{\left(\widetilde{N}_{-\lambda} + N_p\right)\left(N_\lambda - N_p\right)} \left(1 - e^{i\frac{\Omega}{c}\left(\mathbf{N}_p - \mathbf{N}_\lambda\right)z}\right) \right\} e^{i\left(\frac{\Omega}{c}N_\lambda z - \Omega t\right)}. \quad (26)$$

Здесь

$$N_\lambda^0 = \sqrt{\varepsilon_o(\Omega) + \lambda G(\Omega)}. \quad (27)$$

Постоянная интегрирования B_λ в выражениях (24)˜ (26) определится из решения граничной задачи. Пусть рассматриваемая полубесконечная нелинейная среда граничит с изотропной линейной средой с показателем преломления на частоте Ω равном N. Ограничиваясь рассмотрением нелинейного преобразования излучения в направлении, нормальном поверхности и совпадающем с оптической осью кристалла, положим, что в линейной среде от границы распространяется волна частоты Ω (отраженное на преобразованной частоте излучение)

$$\mathbf{E}_{-\lambda}^r = \mathbf{e}_\lambda E_{-\lambda}^r e^{i\left(-\frac{\Omega}{c}Nz - \Omega t\right)}, \quad (28)$$

$$\mathbf{H}_{-\lambda}^r = \mathbf{e}_\lambda i\lambda N E_{-\lambda}^r e^{i\left(-\frac{\Omega}{c}Nz - \Omega t\right)}. \quad (29)$$

Из граничных условий при $z = 0$

$$\left[\mathbf{E}_\lambda \mathbf{c}\right] = \left[\mathbf{E}_{-\lambda}^r \mathbf{c}\right], \ \left[\mathbf{H}_\lambda \mathbf{c}\right] = \left[\mathbf{H}_{-\lambda}^r \mathbf{c}\right]$$

получим

$$B_\lambda = \frac{4\pi i P_\lambda\left(\alpha(\Omega) - \lambda N\right)}{\left(N + N_\lambda^0\right)\left(N_p + \widetilde{N}_{-\lambda}\right)}, \tag{30}$$

$$E_{-\lambda}^r = \frac{-4\pi P_\lambda}{\left(N + N_\lambda^0\right)\left(N_p + \widetilde{N}_{-\lambda}\right)}. \tag{31}$$

Используя (30), (31), окончательно найдем векторы электрической и магнитной напряженностей преобразованного электромагнитного поля (27), (28)

$$\mathbf{E}_\lambda = \mathbf{e}_\lambda \frac{4\pi P_\lambda}{\widetilde{N}_{-\lambda} + N_p}\left\{-\frac{1}{N + N_\lambda^0} + \frac{1}{N_\lambda - N_p}\left(1 - e^{i\frac{\Omega}{c}\left(\mathbf{N}_p - \mathbf{N}_\lambda\right)z}\right)\right\} e^{i\left(\frac{\Omega}{c}N_\lambda z - \Omega t\right)} \tag{32}$$

$$\mathbf{H}_\lambda = -i\lambda \mathbf{e}_\lambda \frac{4\pi P_\lambda}{\widetilde{N}_{-\lambda} + N_p}\left\{\frac{N}{N + N_\lambda^0} + \frac{\left(N_p - \lambda\alpha(\omega)\right)}{N_\lambda - N_p}\left(1 - e^{i\frac{\Omega}{c}\left(\mathbf{N}_p - \mathbf{N}_\lambda\right)z}\right)\right\} e^{i\left(\frac{\Omega}{c}N_\lambda z - \Omega t\right)} \tag{33}$$

и поля, отражённого от нелинейной среды,

$$\mathbf{E}_{-\lambda}^r = \mathbf{e}_\lambda \frac{-4\pi P_\lambda}{\left(N + N_\lambda^0\right)\left(\widetilde{N}_{-\lambda} + N_p\right)} e^{i\left(-\frac{\Omega}{c}Nz - \Omega t\right)}, \tag{34}$$

$$\mathbf{H}_{-\lambda}^r = i\lambda \mathbf{e}_\lambda \frac{-4\pi N P_\lambda}{\left(N + N_\lambda^0\right)\left(\widetilde{N}_{-\lambda} + N_p\right)} e^{i\left(-\frac{\Omega}{c}Nz - \Omega t\right)}. \tag{35}$$

Вектор плотности потока энергии преобразованного излучения в нелинейной среде

$$\mathbf{S}_\lambda = \frac{c}{16\pi}\left[\left(\mathbf{E}_\lambda + \mathbf{E}_\lambda^*\right)\left(\mathbf{H}_\lambda + \mathbf{H}_\lambda^*\right)\right].$$

согласно (32), (33) равен

$$\mathbf{S}_\lambda = \mathbf{c}\frac{2\pi c\left|P_\lambda\right|^2}{\left(N_p + \widetilde{N}_{-\lambda}\right)^2}\left\{\frac{-N}{\left(N + N_\lambda^0\right)^2} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2\left(N_p - \lambda\alpha(\omega)\right)}{\left(N_\lambda - N_p\right)^2} + \frac{N - N_p + \lambda\alpha(\omega)}{\left(N_\lambda - N_p\right)\left(N + N_\lambda^0\right)}\right)\left(1 - \cos\left[\frac{\Omega}{c}\left(N_\lambda - N_p\right)z\right]\right)\right\}. \tag{36}$$

Интенсивность преобразованного излучения, отражённого от нелинейной среды, определится из выражений (34), (35):

$$\mathbf{S}^{r}_{-\lambda} = -\mathbf{c}\frac{2\pi c N\left|P_\lambda\right|^2}{\left(N_p + \widetilde{N}_{-\lambda}\right)^2\left(N + N^0_\lambda\right)^2}. \tag{37}$$

Как легко проверить, найденные выражения (36), (37) удовлетворяют условию

$$\mathbf{S}_\lambda = \mathbf{S}^{r}_{-\lambda}$$

баланса потоков энергии излучения с частотой Ω на границе нелинейной среды при $z = 0$.

При выполнении условия синхронизма $N_p = N_\lambda$ из (32), (33) для векторов поля преобразованного излучения следует

$$\mathbf{E}_\lambda = \mathbf{e}_\lambda \frac{2\pi P_\lambda}{N^0_\lambda}\left(-\frac{1}{N + N^0_\lambda} + i\frac{\Omega}{c}z\right)e^{i\left(\frac{\Omega}{c}N_\lambda z - \Omega t\right)}, \tag{38}$$

$$\mathbf{H}_\lambda = -i\lambda\mathbf{e}_\lambda \frac{2\pi P_\lambda}{N^0_\lambda}\left(\frac{N}{N + N^0_\lambda} + iN^0_\lambda\frac{\Omega}{c}z\right)e^{i\left(\frac{\Omega}{c}N_\lambda z - \Omega t\right)}. \tag{39}$$

Здесь амплитуда одной из преобразованных волн, волновой вектор которой совпадает с волновым вектором возбуждающей её волны нелинейной поляризации, содержит часть, растущую от границы пропорционально толщине среды z. Соответственно вектор плотности потока энергии (36) при $N_p = N_\lambda$ будет нарастать пропорционально z^2:

$$\mathbf{S}_\lambda = \mathbf{c}\frac{\pi c\left|P_\lambda\right|^2}{\varepsilon_0(\Omega) + \lambda G(\Omega)}\left[\frac{-N}{2\left(N + \sqrt{\varepsilon_0(\Omega) + \lambda G(\Omega)}\right)^2} + \frac{\Omega^2}{c^2}\sqrt{\varepsilon_0(\Omega) + \lambda G(\Omega)}\,z^2\right]. \tag{40}$$

Разумеется, данный результат с достаточной степенью точности отражает начальную стадию процесса частотного преобразования излучения, так что при фазовом синхронизме полученное решение уравнений электромагнитного поля в нелинейной гиротропной среде в приближении заданного поля описывает нелинейные электромагнитные процессы в тонких образцах.

Литература

1. Б.В.Бокуть, А.Г.Хаткевич, *К теории преобразования частоты световых волн кристаллами* // Доклады АН БССР – 1964. – Т. 8. – С. 713–714.
2. Ф.И.Фёдоров, *Теория гиротропии*. – Минск: Наука и техника . – 1976. – 456 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 11.09.2000