Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №6(15), 2002

УДК 519.6:539.3

Двухпроходной итерационный метод фиктивных нелинейных напряжений для решения краевых задач нелинейной теории упругости

А.В. Быховцев, В.Е. Быховцев

Введение

Количественная оценка деформаций элементов систем твердых тел сводится к решению систем нелинейных дифференциальных уравнений или к минимизации нелинейных энергетических функционалов. Решение таких задач возможно только численными итерационными методами [1-6], причем все они основаны на идее решения нелинейных задач методами линейной теории упругости. Реализация такого подхода сводится к построению алгоритма изменения модуля упругости элементов деформируемого тела. Эти методы имеют слабую сходимость. В настоящей работе предлагается итерационный двухпроходной метод решения краевых задач нелинейной теории упругости.

Постановка задачи

Рассматривается однородное нелинейно-деформируемое твёрдое тело объёма V с границей Г и системой граничных условий. Уравнения состояния деформируемого твёрдого тела в общем случае представим в виде:

$$\sigma_i = f(**)\varepsilon_i , \tag{1}$$

где σ_i, ε_i – интенсивности напряжений и деформаций,

$f(**)$ – функция модуля упругости при нелинейном деформировании,

** – совокупность параметров, определяющих значение модуля упругости, при линейном деформировании $f(**) = $ E, E – модуль упругости.

Поставим в соответствие исходному телу геометрически тождественное гипотетическое линейно-упругое тело с уравнением состояния

$$\sigma_i^r = E^r \varepsilon_i , \tag{2}$$

$E^{\tilde{A}}$ – гипотетический модуль упругости, который подлежит определению и должен быть таким, чтобы при тождественных граничных условиях для обоих тел их смещения и деформации совпадали.

Итерационный метод фиктивных нелинейных напряжений

Итерационный процесс строится в соответствии с постановкой задачи.

При исходном модуле деформации E = E_0 и заданной нагрузке P решается линейная задача и определяются значения интенсивностей напряжений и деформаций $\sigma_{i,0}^{e}, \varepsilon_{i,0}$. По заданному уравнению состояния (1) вычисляется нелинейное фиктивное напряжение

$$\sigma_{i,1}^{nf} = f(\varepsilon_{i,0})$$

и секущий модуль упругости

$$E_1 = \sigma_{i,1}^{nf} / \varepsilon_{i,0}$$

Так как напряжения для упругих тел не зависят от Е, то при Е = E_1 и заданной внешней нагрузке Р получим

$$\sigma_{i,1}^{e} = \sigma_{i,0}^{e} \text{ и } \varepsilon_{i,1} = \sigma_{i,0}^{e} / E_1 .$$

Приращение деформаций будет

$$\Delta\varepsilon_{i,1} = \varepsilon_{i,1} - \varepsilon_{i,0} ,$$

ему будет соответствовать приращение линейного напряжения

$$\Delta\sigma_{i,1} = E_0 \Delta\varepsilon_{i,1} .$$

Поскольку рассматриваемый процесс деформирования является нелинейным, то приращение напряжения следует определять по уравнению состояния $\Delta\sigma_{i,1} = f(\Delta\varepsilon_{i,1})$. Прибавив к исходному значению напряжения указанное его приращение, получим значение фиктивного напряжения, обеспечивающего второе приближение значения деформации. Этот процесс продолжается до достижения сходимости, причем хорошие результаты получаются уже на третьей итерации.

При достижении сходимости определяется конечное значение секущего (гипотетического) модуля упругости

$$E_c = \sigma_{i,j}^{i} / \varepsilon_{i,j} .$$

Коэффициент Пуассона является переменной величиной, определяемой по формуле

$$\mu^* = 0{,}5 - \alpha(0{,}5 - \mu) ,$$

где E_c / E_0.

После этого второй раз решается линейная краевая задача. На рис.1 приведена графическая схема метода фиктивных нелинейных напряжений.

При конечно-элементном моделировании систем нелинейной теории упругости приведенный алгоритм применяется к каждому конечному элементу. Этим самым исходной нелинейной задаче ставится в соответствие неоднородная линейная задача, определенная при сохранении всех остальных условий исходной задачи. Алгоритм и численную реализацию метода покажем на конкретном примере. Будем рассматривать однородное изотропное нелинейно-деформируемое твёрдое тело в форме параллелепипеда с модулем упругости Е=30МПа, коэффициентом Пуассона μ=0,225 и уравнением состояния $\sigma_i = 25\varepsilon_i^{0.6}$. Примем, что под действием внешних сил в некоторой точке М деформируемого тела при условии упругого деформирования возникли напряжения, интенсивность которых $\sigma_{i,0}^{e} =$ 0,4МПа. Алгоритм решения представим в виде таблицы (табл. 1). Как видно из приведенных данных, сходимость итерационных процессов достигнута уже на третьей итерации.

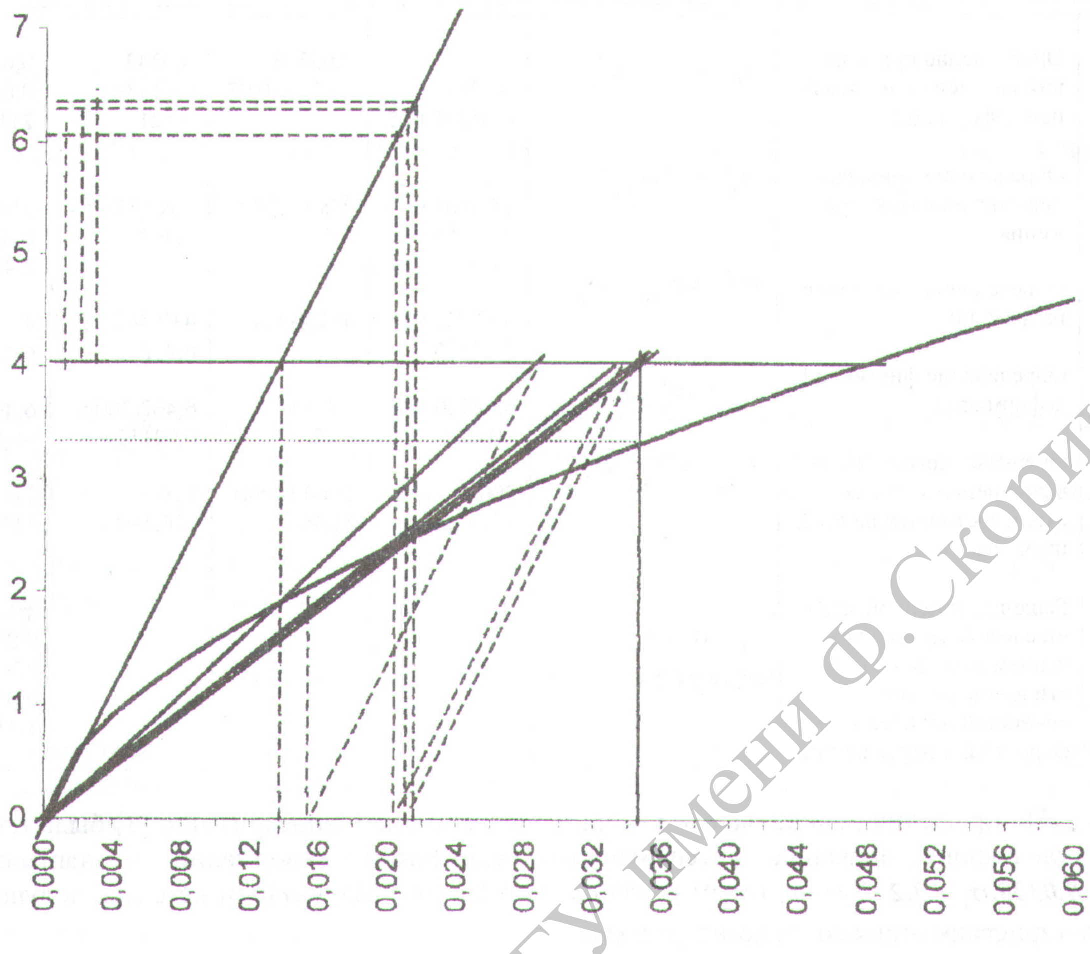

Рис.1. Графическая схема метода фиктивных нелинейных напряжений

Таблица 1

Вычислительный алгоритм метода фиктивных нелинейных напряжений

№	Наименование операции	Вычисляемые величины	Значения вычисляемых величин в итерационных циклах			
			Цикл 1	Цикл 2	Цикл 3	Цикл 4
1.	Решение линейной задачи с заданным значением модуля упругости	$\sigma_{i,0}^{e}$ $\varepsilon_{i,0}^{e} = \sigma_{i,0}^{e} / E_0$	4,0 0,0133			
2.	Назначение начальных значений фиктивным напряжениям	$\sigma_{i,j}^{f} = \sigma_{i,0}$	4,0			
3.	Назначение начальных значений фиктивным нелин. деформациям	$\varepsilon_{i,j}^{f} = \varepsilon_{i,0}$	0,0133			
4.	Определение фиктивных нелин. напряжений	$\sigma_{i,j}^{n} = f(\varepsilon_{i,j}^{f})$	25x0,0133$^{0.6}$ =1,8746	25x0,02^{0,6}= 2,391	25x 0,02133^{0,6}= 2,4853	25x 0,02154^{0,6} =2,5
5.	Определение секущего модуля упругости	$E_c = \sigma_{i,j}^{n} / \varepsilon_{i,j}^{f}$	1,875/0,0133 =141	2,391/0,02= 119,54	2,4853/0,02133=116,5	2,5/ 0,02154= 116
6.	Определение интенсивности нелинейной деформации	$\varepsilon_{i,j}^{ne} = \sigma_{i,0}^{e} / E_c$	4,0/141= 0,0284	4,0/119,54= 0,03346	4,0/116,5= 0,0343	4,0/116= 0,0344

7.	Определение приращения интенсивн. нелинейной деформации	$\varepsilon^p_{i,j} = \varepsilon^{ne}_{i,j} - \varepsilon^f_{i,j}$	0,028-0,013=0,015	0,03346-0,0133=0,02	0,0343-0,0133=0,021	0,0344-0,0133=0,0211
8.	Определение приращения фиктивного напряжения	$\sigma^p_{i,j} = f(\varepsilon^p_{i,j})$	$25x0{,}015^{0,6}$= 2,02156	$25x0{,}02^{0,6}$= 2,4	$25x0{,}021^{0,6}$= 2,462	25x $0{,}0211^{0,6}$= 2,469
9.	Определение фиктивного напряжения	$\sigma^f_{i,j} = \sigma_{i,0} + \sigma^p_{i,j}$	4+2,02156= 6,02156	4+2,4=6,4	4+2,462= 6,462	4+2,469= 6,469
10.	Определение фиктивной деформации	$\varepsilon^f_{i,j} = \sigma^f_{i,j} / E_0$	6,02156/300 =0,02	6,4/300= 0,02133	6,462/300= 0,021154	6,469/300 =0,02156
11.	Оценка сходимости при выполнении условия сходимости идти на п.12, иначе на п.4	$E_{c,j-1} - E_{c,j} < 1$	300-141=159	141-119,54= 21,46	119,5-116,5=3	116,5-116=0,5
12	Решение линейной задачи с вычисленным значением модуля упругости вычисл.интенсивностей нелинейн. деформаций и напряже-ний	$\varepsilon_i = \sigma^e_i / E_c$ $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$				4/116,0= 0,0345 25x $0{,}0345^{0,6}$= 3,316

При решении данной задачи методом энергетической линеаризации [3] были получены следующие значения интенсивности нелинейных деформаций и напряжений: $\varepsilon_i = 0{,}0325, \sigma_i = 3{,}2$. Как видим, от решения, полученного изложенным методом, полученные характеристики отличаются незначительно.

Abstract

The authors consider a two-pass iteration method of solution of the regional problems of the nonlinear elastic theory.

Литература

1. Б.З.Амусин, А.Б.Фадеев, Метод конечных элементов при решении задач горной геомеханики, М.: Недра, 1975.
2. Н.И.Безухов, Основы теории упругости, пластичности и ползучести: Учебник, 2-е изд., М.: Высшая школа, 1968.
3. В.Е.Быховцев, Решение краевых задач нелинейной теории упругости методом энергетической линеаризации, Еругинские чтения VI: Тез. докл. междунар. матем.конф. Ч.2, Гомель: ГГУ, 1999, С.9-10.
4. О.Зенкевич, Метод конечных элементов в технике, М.: Мир, 1975.
5. Н.И.Малинин, прикладная теория пластичности и ползучести, Учебник для студентов вузов, 2-е изд, М.: Машиностроение, 1975.
6. В.З.Партон, П.И.Перлин, Методы математической теории упругости, М.: Наука, 1981.

Поступило 20.05.2002