

УДК 517.977

## Использование сопровождающей задачи минимизации интенсивности управления для демпфирования математического маятника с одной нелинейностью

Е.А.Ружицкая

**1. Введение.** Демпфирование динамических систем (гашение колебаний в них) является одной из важных проблем теории управления движением [1]. До 50-х годов основные методы решения проблемы опирались на разнообразные достаточные условия устойчивости движения (метод функций Ляпунова [2], частотные методы [3] и т. п.), при этом не накладывались ограничения на значения управляющих воздействий. С начала 90-х годов XX века началось систематическое исследование проблемы демпфирования линейных систем ограниченными управлениями [4]. Оказалось, что при использовании операции "насыщения" (срезки) для классических линейных демпфирующих обратных связей, построенных по линейным моделям, получаются малые области притяжения состояний равновесия замкнутых систем. В рамках теории оптимального управления можно естественным образом учитывать ограничения на управления, не задавать структуру обратных связей, получать большие области притяжения, обеспечивать высокое качество переходных процессов.

В [5] предложен новый подход к проблеме синтеза оптимальных систем, который в [6-9] был использован для построения демпферов линейных систем. В дальнейшем этот подход был обобщен на нелинейные системы [10], при этом для построения обратных связей использовалась сопровождающая задача оптимального управления - задача минимизации расхода топлива.

Цель настоящей работы — использовать для построения обратных связей сопровождающую задачу минимизации интенсивности управления и, по аналогии с [10], исследовать проблему демпфирования нелинейного маятника в нижнем устойчивом положении равновесия.

**2. Постановка задачи.** Математическая модель маятника имеет вид

$$\ddot{x} + \sin x = u, \quad (1)$$

где  $x$  — угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия,  $\ddot{x}$  — угловое ускорение,  $u$  — управление, действующее на систему,  $t \geq 0$  — время. Устойчивыми состояниями равновесия системы (1) при  $u = u(t) \equiv 0$ ,  $t \geq 0$ , на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$  являются точки

$$(x = \pm 2k\pi, \dot{x} = 0), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

В линейной теории при малых начальных отклонениях  $(|x(0)| + |\dot{x}(0)|)$  для гашения колебаний маятника используется линейное уравнение

$$\ddot{x} + x = u. \quad (3)$$

Из (1), (3) видно, что состояния равновесия (2), отличные от  $(0, 0)$ , в рамках линейных моделей невозможно исследовать по существу. Они плохо отражают ситуацию и в том случае, когда начальные состояния заметно удалены от состояния равновесия.



Как известно, состояния (2), при  $k > 0$  связаны с вращениями маятника. Поэтому линейная модель (3) исключает из рассмотрения подобные движения. Система (1) при выключенном управлении ( $u(t) \equiv 0, t \geq 0$ ) совершает незатухающие колебания (при не очень больших возмущениях начального состояния) или вращения. Состояния равновесия (2) при  $k = 0$  будем использовать при гашении колебаний и вращений с небольшой энергией, состояния равновесия (2) с  $k = 1, 2, \dots$ , — для демпфирования вращений, имеющих большую энергию. В данной работе будем рассматривать только гашение колебаний. Остальные случаи больших колебаний и вращений маятника аналогичны рассмотренным в [10].

Функцию

$$u = u(x, \dot{x}), \quad (x, \dot{x}) \in R^2, \quad (4)$$

назовем обратной связью. Замена в (1) управления  $u$  на функцию (4) называется замыканием системы (1). Таким образом, уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$\ddot{x} + \sin x = u(x, \dot{x}). \quad (5)$$

Обратную связь (4) назовем демпфирующей в области  $G$  для состояния равновесия ( $x = 2\pi k, \dot{x} = 0$ ), если 1)  $u(2\pi k, 0) = 0$ ; 2) решение  $\dot{x}(t) \equiv 2\pi k, t \geq 0$ , системы (5) асимптотически устойчиво в  $G$ . Обратные связи (4), удовлетворяющие неравенству

$$|u(x, \dot{x})| \leq L, \quad (x, \dot{x}) \in G. \quad (6)$$

будем называть ограниченными.

При построении ограниченных обратных связей важно, чтобы 1) область притяжения  $G$  была достаточно большой; 2) переходные процессы в замкнутой системе (5) были в некотором смысле близки к оптимальным. Если не требовать высокого качества переходных процессов, то проблема демпфирования становится тривиальной, ибо можно использовать любую обратную связь, поглощающую энергию маятника (например, ввести трение).

Заменим нелинейную характеристику  $\sin x$  системы (1) на периодическую кусочно-линейную функцию  $f(x)$ :

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq \pi/2; \\ -\pi - x, & -3\pi/2 \leq x \leq -\pi/2; \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2. \end{cases}$$

(На множество  $|x| > 3\pi/2$  функция  $f(x)$  продолжается периодически).

Динамическую систему

$$\ddot{x} + f(x) = u(x, \dot{x}) \quad (7)$$

назовем кусочно-линейной аппроксимацией системы (5), или просто кусочно-линейной системой.

**3. Сопровождающая задача оптимального управления.** Определим класс дискретных управлений с периодом квантования  $\nu > 0$ :  $u(t) = u(m\nu), t \in [m\nu, (m+1)\nu[$ ,  $m = 0, 1, \dots$ . Соответствующую дискретному управлению обратную связь будем обозначать символом  $u_\nu(x, \dot{x})$ .

Выбрав параметр  $\Theta = N\nu$  ( $N$  — натуральное число), введем вспомогательную (сопровождающую) задачу оптимального управления кусочно-линейной системой в классе дискретных доступных управлений

$$\rho_\Theta(z) = \min_u \rho,$$



$$\ddot{x} + f(x) = u, x(0) = z_1, \dot{x}(0) = z_2, \quad (8)$$

$$x(\Theta) = 0, \dot{x}(\Theta) = 0, |u(t)| \leq \rho, t \in T = [0, \Theta], z = (z_1, z_2).$$

Обозначим:  $u_\nu^0(t|z)$ ,  $t \in T$ , — оптимальное программное дискретное управление задачи (8),  $G_\Theta = \{z \in R^2 : |u(z)| \leq L\}$  — множество начальных состояний  $z$ , для которых существует ограниченное оптимальное программное управление.

Функцию

$$u_\nu^0(z_1, z_2) = u_\nu^0(0|z), z \in G_\Theta, \quad (9)$$

назовем оптимальным стартовым управлением типа обратной связи.

Следуя [7], можно показать, что обратная связь

$$u_\nu(x, \dot{x}) = u_\nu^0(x, \dot{x}), (x, \dot{x}) \in G_\Theta, \quad (10)$$

является дискретной демпфирующей ограниченной обратной связью.

Таким образом, проблема построения ограниченной обратной связи, которая гасит колебания, сведена к реализации оптимальной обратной связи (10). Поскольку получение замкнутой (явной) формулы для оптимальной обратной связи представляет весьма сложную проблему, то, следуя [9, 10], опишем алгоритм работы оптимального регулятора, который в каждом процессе демпфирования способен вычислять текущие сигналы обратной связи в режиме реального времени.

Пусть заданы: начальное состояние  $z = (z_1 = x(0) = 3, z_2 = \dot{x}(0) = 0.5)$ ; выберем значения  $\Theta = 6, \nu = 0.24$ . Рассмотрим случай, когда оптимальная траектория задачи (8) на фазовой плоскости будет целиком проходить по двум областям I:  $|x| \leq \pi/2$ ; II:  $\pi/2 < x < 3\pi/2$ . Тогда кусочно-линейная задача оптимального управления (8) в классе дискретных управлений сведется к следующей задаче:

$$\rho_\Theta(z) = C(z, \Theta, \Theta_1^0) = \min_{u, \Theta_1} \rho,$$

$$\ddot{x}^1 - x^1 + \pi = u, x^1(0) = z_1, \dot{x}^1(0) = z_2, t \in [0, \Theta_1]; \ddot{x}^2 + x^2 = u, t \in [\Theta_1, \Theta]; \quad (11)$$

$$x^1(\Theta_1) = \pi/2, x^2(\Theta) = 0, \dot{x}^2(\Theta) = 0; |u(t)| \leq \rho, t \in T,$$

где  $\Theta_1^0 = \Theta_1^0(x(0), \dot{x}(0))$  — оптимальный момент перехода траектории  $x^0(t)$ ,  $t \in T$ , из области II в область I.

Задача (11) — задача оптимального программного управления. С точки зрения последующего синтеза, ее целесообразно решить адаптивным (прямым или двойственным) методом [11], который кроме оптимального программного управления  $u_\nu^0(t|z)$ ,  $t \in T$ , доставляет оптимальную опору  $K_{on}^0(0)$ .

**4. Алгоритм работы демпфера.** В соответствии с (11) значение  $u_\nu^0(0|x(0), \dot{x}(0))$  используем в качестве начального сигнала  $u_\nu^*(0) = u_\nu(x(0), \dot{x}(0))$  демпфирующей обратной связи на промежутке времени  $[0, \nu]$ . Предположим, что демпфер проработал на промежутке времени  $[0, \tau = l\nu[$  и замкнутая система в текущий момент времени  $\tau$  оказалась в состоянии  $(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau))$ ,  $|x^*(\tau)| > \pi/2$ .

*Замечание.* Если  $|x^*(\tau)| < \pi/2$ , то текущее значение обратной связи вычисляется по линейной модели, т.е. задача (11) упрощается и принимает вид:

$$\rho_\Theta(z) = \min_u \rho,$$

$$\ddot{x}^2 + x^2 = u, x^2(0) = x^*(\tau), \dot{x}^2(0) = \dot{x}^*(\tau),$$



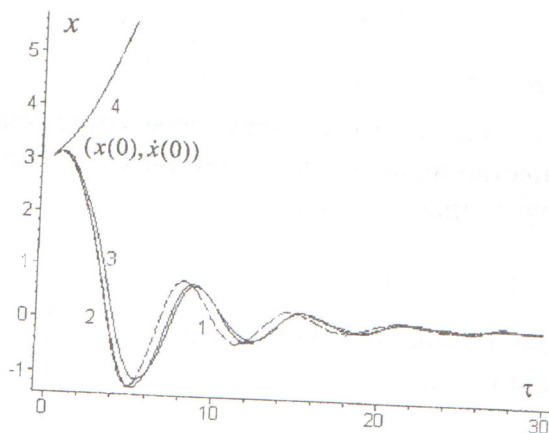


Рис 1. Траектории системы.

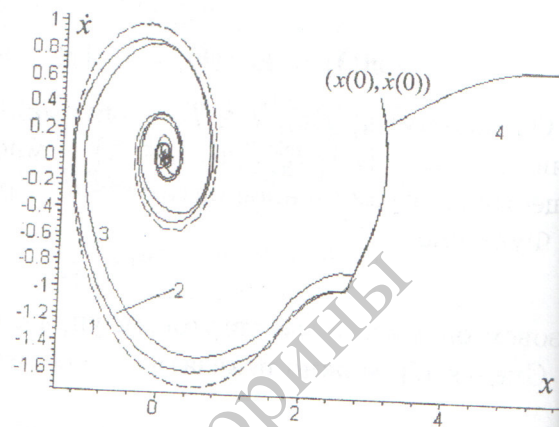


Рис 2. Фазовые траектории системы.

$$x^2(\Theta) = 0, \dot{x}^2(\Theta) = 0; |u(t)| \leq \rho, t \in T.$$

Чтобы вычислить текущее значение  $u_\nu(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau))$  демпфирующей обратной связи, нужно решить задачу (11) с  $z = (x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau))$  с учетом того, что в предыдущий момент  $\tau - \nu$ , когда система (5) находилась в состоянии  $(x^*(\tau - \nu), \dot{x}^*(\tau - \nu))$ , демпфер уже решил задачу (11) с  $z = (x^*(\tau - \nu), \dot{x}^*(\tau - \nu))$ , построив оптимальную опору  $K_{on}^0(\tau - \nu)$  и вычислив оптимальный момент перехода  $\Theta_1^0(\tau - \nu)$ . Задача (11) для соседних моментов  $\tau$  и  $\tau - \nu$  отличается только начальными условиями  $(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau)) = (x^*(\tau - \nu), \dot{x}^*(\tau - \nu))$ ? и это отличие тем меньше, чем меньше  $\nu$ . Поэтому наиболее эффективным методом решения задачи (11) с  $z = (x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau))$  является двойственный метод коррекции опоры  $K_{on}^0(\tau - \nu)$ , если дополнить его оптимизацией по параметру  $\Theta_1$ , которую можно осуществить направленным перебором, начиная со значения  $\Theta_1^0(\tau - \nu)$ . Построив решение  $u_\nu^0(t|x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau))$ ,  $t \in [0, \Theta]$ ,  $K_{on}^0(\tau)$  задачи (11),  $z_1 = x^*(\tau)$ ,  $z_2 = \dot{x}^*(\tau)$  получаем реализацию  $u^*(\tau) = u_\nu^0(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau)) = u_\nu^0(0|x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau))$  обратной связи на промежутке  $[\tau, \tau + \nu]$ . Если время, необходимое для коррекции опоры  $K_{on}^0(\tau - \nu)$ , а значит и для вычисления  $u^*(\tau)$ , не превосходит  $\nu$ , то можно говорить о демпфировании в режиме реального времени. В рассматриваемой задаче упомянутая коррекция занимает очень малое время, которое не засекалось.

**5. Пример.** Описанная процедура была реализована на ПЭВМ. На рис. 1, 2 представлены результаты вычислений. Кривая 1 (штриховая) изображает траекторию замкнутой кусочно-линейной системы (7), кривая 2 (сплошная) — поведение нелинейно замкнутой обратной связью (6), кривая 3 — траекторию замкнутой нелинейной системы (5) под действием неизвестного демпфера возмущения  $w(t)$ ,  $t \geq 0$ , т.е. поведение системы

$$\ddot{x} + \sin x = u(x, \dot{x}) + w(t). \quad (12)$$

В качестве возмущения  $w(t)$ ,  $t \geq 0$ , была выбрана функция  $w(t) = 0.1 \sin 2t$ ,  $t \geq 0$ . Кривая 4 показывает траекторию нелинейной системы, замкнутой обратной связью  $u_\nu(x, \dot{x})$ , построенной по линейной модели (7). Из этих рисунков видно, что обратная связь, построенная по кусочно-линейной аппроксимации, хорошо гасит колебания и в исходной нелинейной системе, даже при действии на нее неизвестного возмущения, но обратная связь, построенная по линейной модели, уже не справляется с задачей.



## Abstract

The construction problem of limited feed-backs ensuring pendulum oscillations extinguishing about a stable position of an equilibrium is considered for a nonlinear model of a pendulum. The auxiliary problem of control intensity minimization is used for a construction of feed-backs. The algorithm of damper work has been described which can in real-time mode calculate current values of feed-backs. The results are illustrated by an example.

## Литература

1. Н.Н.Красовский, Проблемы стабилизации управляемых движений, Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966, С. 475–514.
2. И.Г.Малкин, Теория устойчивости движения, М.: Наука, 1966.
3. Цянь Сюэ-Сэнь, Техническая кибернетика, М.: Изд-во ин. лит., 1956.
4. Sussmann H.J., Sontag E.D., Yang Y., A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls, IEEE Transactions on Automatic Control, **39**, №12 (1994), P. 2411–2425.
5. Р.Габасов, Ф.М.Кириллова, О.И.Костюкова, Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче, Докл. АН СССР, **320**, № 6 (1991), С. 1294–1299.
6. Р.Габасов, Ф.М.Кириллова, О.И.Костюкова, К методам стабилизации динамических систем, Изв. РАН. Техн. кибернетика, № 3 (1994), С. 67–77.
7. Р.Габасов, Е.А.Ружицкая, Робастная стабилизация динамических систем ограниченными управлениями, ПММ, **62**, Вып. 5 (1998), С. 778–786.
8. R.Gabasov, F.M.Kirillova, S.V.Prishepova, Optimal Feedback Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences, V.207 (M.Thoma Ed.), Springer, Verlag London Limited, 1995.
9. R.Gabasov, F.M.Kirillova, Real-time construction of optimal closable feedbacks, 13th World Congress of IFAC International Federation of Automatic Control, V.D, San Francisco, CA, USA, 1996, P. 231–236.
10. Р.Габасов, Ф.М.Кириллова, Е.А.Ружицкая, Демпфирование и стабилизация маятника при больших начальных возмущениях, Известия РАН, Теория и системы управления, № 1 (2001), С. 29–38.
11. Р.Габасов, Ф.М.Кириллова, А.И.Тятюшкин, Конструктивные методы оптимизации, Часть 1. Линейные задачи, Минск: "Университетское", 1984.