Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 6(15), 2002

УДК 519.2

Стационарное распределение открытых сетей с динамическим поведением и ограничением на время ожидания

В.Е.Евдокимович

Рассмотрена открытая сеть массового обслуживания с непрерывным временем $n(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t))$ и инфинитезимальными интенсивностями $q(n,m)$ перехода из состояния n в состояние m вида

$$q(n, n+e_i) = \sum_k \gamma_k(n)\psi_{ki}(n),$$

$$q(n, n-e_i) = (\mu_i(n) + \nu_i(n))\alpha_i(n), \qquad n_i \neq 0,$$

$$q(n, n+e_i-e_j) = (\mu_j(n) + \nu_j(n))\beta_{ji}(n), \qquad n_j \neq 0, i \neq j, n \in \mathbf{X},$$

для всех других состояний $q(n,m) = 0$. Здесь $n, m \in \mathbf{X} \subset \mathbf{Z}^N = \{(n_1, n_2, \dots, n_N) : n_1, n_2, \dots, n_N = 0, 1, 2, \dots\}$, суммирование ведется по $k = 1, 2, \dots, N$, $\gamma_k(n)$ и $\mu_k(n)$ — произвольные неотрицательные функции, причем $\mu_k(n) = 0$ при $n_k = 0$. При этом $\varphi_i(n)$, $\psi_{ij}(n)$, $\alpha_i(n)$, $\beta_{ij}(n)$ определяются как решение системы уравнений

$$\varphi_i(n) = (1 - f_n^{(i)})\left[q_{i0}(n) + \sum_i q_{ij}(n)\varphi_j(n)\right], \qquad i = \overline{1,N}, n \in \mathbf{X}, \tag{1}$$

$$\psi_{ij}(n) = f_n^{(i)}\delta_{ij} + (1 - f_n^{(i)})\sum_k q_{ik}(n)\psi_{kj}(n), \qquad i, j = \overline{1,N}, n \in \mathbf{X}, \tag{2}$$

$$\alpha_i(n) = p_{i0}(n-e_i) + \sum_j p_{ij}(n-e_i)\varphi_j(n-e_i), \qquad i = \overline{1,N}, n \in \mathbf{X}, \tag{3}$$

$$\beta_{ij}(n) = \sum_k p_{ik}(n-e_i)\psi_{kj}(n-e_i), \qquad i = \overline{1,N}, n \in \mathbf{X}, \tag{4}$$

где e_i — N-мерный вектор, i-я координата которого равна 1, а остальные равны 0; δ_{ij} — символ Кронекера; $f_n^{(i)}$ $(i = \overline{1,N})$ — произвольные функции от n, $0 \leqslant f_n^{(i)} \leqslant 1$; $P(n) = (p_{ij}(n),\ i,j = \overline{0,N})$; $Q(n) = (q_{ij}(n),\ i,j = \overline{0,N})$ — произвольные стохастические матрицы, причем $p_{00}(n) = q_{00}(n) = 0$. Матрицу $P(n)$ будем называть матрицей маршрутизации, а матрицу $Q(n)$ — матрицей обходов.

Данный процесс описывает сеть в которую поступает стационарный пуассоновский поток заявок интенсивности $\lambda(n^-)$, зависящей от n^-. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью $p_{0i}(n^-)$ направляется в i-й узел ($i = \overline{1,N}; \sum\limits_i p_{0i}(n) = 1$). Обозначим $\gamma_i(n) = \lambda(n)p_{0i}(n), i = \overline{1,N}$.

Для удобства описания состояние сети и его i-ю координату в некоторый момент соответственно будем обозначать n^+ и n_i^+, либо n^- и n_i^- в зависимости от того, учитывается или не учитывается в состояниях n и n_i заявка, совершающая в этот момент некоторое перемещение.

Заявка, направленная в i-й узел (извне или из другого узла), с вероятностью $f_{n^-}^{(i)}$ присоединяется к очереди, а с вероятностью $1 - f_{n^-}^{(i)}$ мгновенно обходит этот узел ($0 \leqslant f_n^{(i)} \leqslant 1, i = \overline{1,N}$).

Времена ожидания заявок в очереди ограничены случайными величинами, распределенными экспоненциально с параметрами $\nu_i(n), i=\overline{1,N}$. Длительности обслуживания заявок в узлах независимы. Они не зависят от процесса поступления и для i-го узла имеют показательное распределение с параметром $\mu_i(n^+), i=\overline{1,N}$. Предполагается, что $\mu_i(n)>0$, если $n_i \neq 0$. Заявка, обслуженная i-м узлом, независимо от других заявок с вероятностью $p_{ij}(n^-)$ направляется в j-й узел, а с вероятностью $p_{i0}(n^-)$ покидает сеть. Заявка, обошедшая i-й узел, независимо от других заявок с вероятностью $q_{ij}(n^-)$ направляется в j-й узел, а с вероятностью $q_{i0}(n^-)$ покидает сеть $(i,j=\overline{1,N})$.

$\varphi_i(n)$-Условная вероятность того, что заявка, направленная в i-й узел, когда сеть находится в состоянии n^-, не будет обслужена ни одним из узлов; $\psi_{ij}(n)$– условная вероятность того, что заявка, направленная в i-й узел, когда сеть находится в состоянии n^-, впервые получит обслуживание в j-м узле; $\alpha_i(n)$– условная вероятность того, что заявка, обслуженная i-м узлом, когда сеть находится в состоянии n^+, не будет больше обслуживаться ни одним из узлов; $\beta_{ij}(n)$– условная вероятность того, что заявка, обслуженная i-м узлом, когда сеть находится в состоянии n^+, впервые после этого будет обслуживаться j-м узлом $(i,j=\overline{1,N}; n\in\mathbf{X})$.

Введем $r_{ji}(n)=f_n^{(j)}p_{ji}(n)+(1-f_n^{(j)})q_{ji}(n), j,i=\overline{0,N}$.

Если матрица $(r_{ji}, j,i=\overline{0,N})$ при каждом n неприводима, то при каждом фиксированном состоянии n уравнение трафика

$$\lambda_i(n)=\gamma_i(n)+\sum_j \lambda_j(n)r_{ji}(n), \qquad i=\overline{1,N}, \tag{5}$$

имеет единственное решение $(\lambda_1(n),\ldots,\lambda_N(n))$, для которого $\lambda_1(n)>0,\ldots,\lambda_N(n)>0$. Если $0<f_n^{(i)}<1$ для всех n и i, то для этого достаточно потребовать, чтобы хотя бы одна из матриц $(p_{ji}(n), j,i=\overline{0,N})$ или $(q_{ji}(n), j,i=\overline{0,N})$ была неприводима для любого n.

Лемма 1. *Если при каждом $n\in\mathbf{X}$ выполняется одно из условий:*

а) матрица $((1-f_n^{(j)})q_{ji}(n), j,i=\overline{0,N})$ неприводима;

б) для любого i либо $f_n^{(i)}>0$, либо $q_{i0}(n)>0$,

то при каждом фиксированном $n\in\mathbf{X}$ соотношения (1) – (4) *однозначно определяют вероятности $\varphi_i(n), \psi_{ij}(n), \alpha_i(n), \beta_{ij}(n)$ $(i,j=\overline{1,N})$.*

Доказательство получается с помощью тривиальной модификации доказательства леммы 1 из [2].

Уравнение

$$f_n^{(i)}\lambda_i(n)=\sum_k \psi_{ki}(n)+\sum_j f_n^{(j)}\lambda_j(n)\beta_{ji}(n+e_j), \qquad i=\overline{1,N}, n\in X, \tag{6}$$

назовем обобщенным уравнением трафика. В то время как уравнение трафика (5) выражает сохранение потоков, направленных в узлы, обобщенное уравнение трафика (6) выражает сохранение потоков, прореженных с помощью вероятностей $f_n^{(i)}$ и присоединяющихся к узлам.

Лемма 2. *Решение уравнения трафика* (5) *удовлетворяет обобщенному уравнению трафика* (6).

Доказательство аналогично доказательству леммы 2 из [1].

Через

$$\rho_i(n)=\frac{f_n^{(i)}\lambda_i(n)}{\mu_i(n+e_i)+\nu_i(n+e_i)} \tag{7}$$

обозначим параметр, который может трактоваться как загрузка i-го узла.

Важную роль в последующем изложении будет играть следующее условие:

$$\rho_j(n+e_i)\rho_i(n) = \rho_i(n+e_j)\rho_j(n), \qquad i,j=\overline{1,N}. \tag{8}$$

Отметим, что (8) автоматически выполняется, если $\rho_i(n) \equiv \rho_i(n_i)$ зависит от вектора n только посредством его i-й координаты n_i.

Введем функции

$$G_{i,n_i}(n) = \prod_{r=1}^{n_i} \frac{f^{(i)}_{n-re_i}\lambda_i(n-re_i)}{\mu_i(n-(r-1)e_i)+\nu_i(n-(r-1)e_i)}, \qquad i=\overline{1,N}, n \in \mathbf{X}. \tag{9}$$

Лемма 3. *Пусть положительное решение уравнения трафика удовлетворяет условию (8) и следующие ряды*

$$\sum_{n\in\mathbf{X}} \Big[\gamma_i(n)(1-\varphi_i(n)) + (\mu_i(n)+\nu_i(n))(1-\beta_{ii}(n))\Big] \prod_{j=1}^{N} G_{j,n_j}(n-n_1e_1-\ldots-n_{j-1}e_{j-1}),$$

$$i=\overline{1,N}, \tag{10}$$

сходятся. Тогда марковский процесс $n(t)$ эргодичен.

Пусть (8) и (10) выполняются, а начальное распределение $n(t)$ совпадает с финальным стационарным распределением. Тогда $n(t)$ – стационарный марковский процесс.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (8) и ряды (10) сходятся. Тогда финальное стационарное распределение процесса $n(t)$ имеет следующую форму:*

$$p(n) = \prod_{i=1}^{N} G_{i,n_i}(n-n_1e_1-n_2e_2-\ldots-n_{i-1}e_{i-1})p(0), \tag{11}$$

где

$$p(0) = \left(\sum_{n\in\mathbf{X}}\prod_{i=1}^{N} G_{i,n_i}(n-n_1e_1-n_2n_2-\ldots-n_{i-1}e_{i-1})\right)^{-1}.$$

Здесь предполагается, что $G_{i,n_i}(n)=1$ при $n_i=0$ (это соответствует стандартному предположению о том, что произведение (9) равно 1, когда нижний индекс больше верхнего).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 из [1].

В [1] показано, что при выполнении соотношения (8) равенство (11) с точностью до постоянной нормировки $p(0)$ эквивалентно равенству

$$\frac{p(n+e_i)}{p(n)} = \rho_i(n), \qquad n \in \mathbf{X}. \tag{12}$$

Теорема 2. *Для того, чтобы решение (11), которое может быть рекурсивно получено из (12), не зависело от выбора пути из состояния n в сотояние 0, необходимо и достаточно, чтобы для всех $n, n+e_i, n+e_j \in \mathbf{X}$ выполнялось условие (8).*

Доказательство леммы 2 и теоремы 2 получается путем модификации доказательства леммы 2 и теоремы 2 из [1].

Пример. Пусть $f_n^{(j)} = \frac{N}{n_j+N}$. В этом случае процесс $n(t)$ неприводим на $\mathbf{X} = \mathbf{Z}^N$. Пусть также

$$\lambda(n) = \lambda, \qquad p_{ji}(n) = \frac{n_j + 3N}{3(n_i+N)(n_j+2N)},$$

$$q_{ji}(n) = \frac{3n_j + 5N}{3(n_i+N)(n_j+2N)}, \qquad \gamma_i(n) = \frac{\lambda}{N}, \qquad j, i = \overline{1, N}.$$

По лемме 4 из [1] уравнение трафика (5) имеет положительное решение

$$\lambda_i(n_i) = \frac{\lambda}{N} + \frac{\lambda}{n_i + N}, \qquad i = \overline{1, N},\ n_i \in \mathbf{Z}.$$

В данном случае

$$G_{i,n_i}(n) = \lambda^{n_i} \prod_{r=1}^{n_i} \frac{n_i + 2N - r}{(n_i + N - r)^2[\mu_i(n_i - r + 1) + \nu_i(n_i - r + 1)]}.$$

В заключение автор выражает благодарность профессору Ю.В.Малинковскому за постановку задачи и неоценимую помощь, оказанную при работе над статьей.

Abstract

The open exponential networks with routing matrix depending on their states are considered. Service durations are limited by exponential random variables. The sufficient condition of an ergodicity is installed with certain restrictions on model parameters and the final stationary distribution is founded.

Литература

1. В.Е.Евдокимович, Ю.В.Малинковский, Сети массового обслуживания с динамической маршрутизацией и динамическими вероятностными обходами узлов заявками, Проблемы передачи информации, **37**, Вып. 3 (2001), С. 55–66.
2. Ю.В.Малинковский, Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками, АиТ, № 2 (1991), С. 102–110.
3. Ю.В.Малинковский, Выходные потоки в модифицированных сетях Джексона, АиТ, № 9 (1992), С. 134–138.
4. Ю.В.Малинковский, Инвариантность стационарного распределения состояний модифицированных сетей Джексона и Гордона-Ньюэлла, АиТ, № 9 (1998), С. 29–36.
5. W.Henderson, C.E.Pearce, P.K.Pollett, P.G.Taylor, Connecting Internally Balanced Quasireversible Markov Processes, Adv. Appl. Prob, **24**, № 4 (1992), P. 934–959.
6. M.Miyazawa, P.G.Taylor, A Geometric Product-form Distribution for a Queueing Network with Non-standard Batch Arrivals and Batch Transfers, Adv. Appl. Prob, **29**, № 2 (1997), P. 523–544.
7. F.P.Kelly, Reversibility and stochastic networks, N.Y.: Wiley, 1979.
8. F.G.Foster, On Stochastic Matrices Associated with Certain Queueing Process, Ann. Math. Statist, **24**, № 2 (1953), P. 355–360.

Поступило 20.05.2002