Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 6(15), 2002

Об одной подгрупповой модели класса формаций

И.А.Кузменкова

В [1] класс всех формаций был охарактеризован в терминах регулярных фильтрующих подгрупповых функторов. В данной работе предлагается характеризация класса всех формаций в терминах унитарных эпиморфных подгрупповых функторов, а также устанавливается связь унитарных эпиморфных подгрупповых функторов с регулярными S_n-фильтрующими подгрупповыми функторами.

Рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения, принятые в [2 – 4]. Напомним некоторые из них.

Пусть τ — функция, которая ставит в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ — подгрупповой функтор, если выполняется следующее условие:

$$(\tau(G))^{\varphi} = \tau(G^{\varphi})$$

для любого изоморфизма φ каждой группы G.

Пусть A, B — группы, $\varphi : A \to B$ — эпиморфизм. И пусть Ω и Σ — некоторые системы подгрупп из A и B соответственно. В дальнейшем через Ω^{φ} обозначается множество $\{H^{\varphi} | H \in \Omega\}$, а через $\Sigma^{\varphi^{-1}}$ — множество $\{H^{\varphi^{-1}} | H \in \Sigma\}$ всех полных прообразов в A всех подгрупп из Σ.

Подгрупповой функтор θ называется унитарным, если для любой группы G множество $\theta(G)$ одноэлементно.

Подгрупповой функтор θ называется эпиморфным, если для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ справедливо равенство

$$(\theta(A))^{\varphi} = \theta(B).$$

Эпиморфный подгрупповой функтор θ называется регулярным, если для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ выполняется включение

$$(\theta(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \theta(A),$$

и, кроме того, $G \in \theta(G)$ для любой группы G.

Пусть $S_n(G)$ — решетка всех нормальных подгрупп группы G. Подгрупповой функтор θ называется S_n-фильтрующим функтором, если для любой группы G множество $\theta(G)$ является фильтром решетки $S_n(G)$, то есть для любой группы G выполняются следующие два условия:

1) если $A \in \theta(G)$, $X \subseteq S_n(G)$ и $A \subseteq X$, то $X \in \theta(G)$;

2) если $A \in \theta(G)$, $B \in \theta(G)$, то $A \cap B \in \theta(G)$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из $H/A \in \mathfrak{F}$, $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H/A \bigcap B \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Тогда $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G (обозначается $G^{\mathfrak{F}}$) называется пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Из леммы 1.2.5 [2] следует, что подгрупповой функтор $res_{\mathfrak{F}}$, сопоставляющий каждой группе G ее $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$, является эпиморфным.

В данной работе показывается, что функторами $res_{\mathfrak{F}}$, если $\mathfrak{F}$ пробегает все формации, исчерпываются все эпиморфные унитарные подгрупповые функторы.

Теорема 1. *Пусть θ — унитарный эпиморфный подгрупповой функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) класс групп $I_{\mathfrak{G}}(\theta) = \{G|\theta(G) = 1\}$ является формацией;

2) для любой группы G справедливо равенство

$$\theta(G) = G^{I_{\mathfrak{G}}(\theta)}б$$

где $G^{I_{\mathfrak{G}}(\theta)}$ — $I_{\mathfrak{G}}(\theta)$-корадикал группы G.

Доказательство. Так как θ — подгрупповой функтор, то $I_{\mathfrak{G}}(\theta)$ — класс групп. Обозначим этот класс через $\mathfrak{F}$.

Из определения эпиморфного подгруппового функтора имеем, что $\tau(G/N) = \tau(G)N/N = N/N$ для любой группы G и $N \triangleleft G$. Значит, $G/N \in \mathfrak{F}$, то есть $\mathfrak{F}$ — гомоморф.

Пусть N и L — нормальные подгруппы группы G, причем $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G/L \in \mathfrak{F}$. Тогда из определения класса $I_{\mathfrak{G}}(\theta)$ имеем, что

$$\theta(G/N) = \theta(G)N/N = 1$$

и

$$\theta(G/L) = \theta(G)L/L = 1.$$

Отсюда следует, что $\theta(G) \subseteq N \cap L$. Теперь из свойства эпиморфности функтора θ заключаем

$$\theta(G/N \cap L) = \theta(G)(N \cap L)/N \cap L = N \cap L/N \cap L = 1,$$

то есть $G/N \cap L = 1$. Таким образом, класс $\mathfrak{F}$ замкнут относительно подпрямых произведений с конечным числом множителей, а поэтому является формацией.

Покажем теперь, что $\theta(G) = G^{\mathfrak{F}}$ для любой группы G.

Так как

$$\theta(G/\theta(N)) = \theta(G)/\theta(G) = 1,$$

то $G/\theta(G) \in \mathfrak{F}$. Значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \theta(G)$. С другой стороны, $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Поэтому $\theta(G/G^{\mathfrak{F}}) = 1$. Так как подгрупповой функтор θ эпиморфен, то

$$\theta(G/G^{\mathfrak{F}}) = \theta(G)G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} = 1.$$

Отсюда следует, что $\theta(G) \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Итак, $\theta(G) = G^{\mathfrak{F}}$ для любой группы G. Теорема доказана.

Следствие 1. *Отображение $f : \theta \mapsto I_{\mathfrak{G}}(\theta)$, сопоставляющее каждому эпиморфному унитарному подгрупповому функтору θ формацию $I_{\mathfrak{G}}(\theta)$, является взаимно однозначным.*

Доказательство. Пусть θ_1 и θ_2 — различные унитарные эпиморфные подгрупповые функторы. Поэтому найдется по крайней мере одна группа G, для которой $\theta_1(G) \neq \theta_2(G)$. Но тогда

$$G^{I_{\mathfrak{G}}(\theta_1)} \neq G^{I_{\mathfrak{G}}(\theta_2)}.$$

Это означает, что формации $I_{\mathfrak{G}}(\theta_1)$ и $I_{\mathfrak{G}}(\theta_2)$ различны. Поэтому отображение f инъективно.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — произвольная непустая формация. И пусть $\theta = res_{\mathfrak{F}}$. Тогда

$$I_{\mathfrak{G}}(\theta) = I_{\mathfrak{G}}(res_{\mathfrak{F}}) = \{G \mid \theta(G) = 1\} = \{G \mid G^{\mathfrak{F}} = 1\} = \mathfrak{F}.$$

Это означает, что $f(\theta) = \mathfrak{F}$, то есть отображение f сюрьективно. Следствие доказано.

Следствие 1 решает аналог вопроса А.Н.Скибы 1.2.13 из [3] для унитарных эпиморфных подгрупповых функторов, характеризуя в терминах таких функторов класс всех формаций.

Покажем теперь, как связаны между собой унитарные эпиморфные подгрупповые функторы и регулярные S_n-фильтрующие подгрупповые функторы. Для этой цели введем следующее обозначение.

Пусть θ — унитарный эпиморфный подгрупповой функтор. Обозначим через fil_θ отображение, сопоставляющее каждой группе G множество подгрупп

$$\mathrm{fil}_\theta(G) = \{\theta(G)N | N \lhd G\}.$$

Лемма 1. *Для любого унитарного эпиморфного подгруппового функтора θ отображение fil_θ является подгрупповым функтором.*

Доказательство. Пусть G_1 и G_2 — изоморфные группы и φ — изоморфизм, переводящий G_1 в G_2. Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_n$ — все различные нормальные подгруппы из G_1, а $N_1, N_2, \ldots, N_n$ — все различные нормальные подгруппы группы G_2. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $K_i^\varphi = N_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как θ — подгрупповой функтор, то

$$(\theta(G_1))^\varphi = \theta(G_1^\varphi) = \theta(G_2).$$

Теперь имеем

$$(\mathrm{fil}_\theta(G_1))^\varphi = \{(\theta(G_1)K_1)^\varphi, \ldots, (\theta(G_2)K_n)^\varphi\} =$$
$$\{(\theta(G_1))^\varphi K_1^\varphi, \ldots, (\theta(G_1))^\varphi K_n^\varphi\} =$$
$$\{\theta(G_2)N_1, \ldots, \theta(G_2)N_n\} = \mathrm{fil}_\theta(G_2).$$

Значит, fil_θ — подгрупповой функтор. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любого унитарного эпиморфного подгруппового функтора θ подгрупповой функтор fil_θ является регулярным.*

Доказательство. Пусть G — произвольная группа, N — ее нормальная подгруппа. Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_n$ — все нормальные подгруппы группы G. Так как подгрупповой функтор θ эпиморфен, то для любой подгруппы $\theta(G)K_i$ из $\mathrm{fil}_\theta(G)$ имеем

$$(\theta(G)K_i)N/N = (\theta(G)N/N)(K_iN/N) = \theta(G/N)(K_iN/N),$$

причем K_iN/N — нормальная подгруппа группы G/N. Значит,

$$(\theta(G)K_i)N/N \in \mathrm{fil}_\theta(G/N).$$

Пусть теперь R/N — произвольная подгруппа из $\mathrm{fil}_\theta(G/N)$. Тогда $R/N = \theta(G/N)(T/N)$, где T/N — некоторая нормальная подгруппа группы G/N. Ясно, что $T = K_i$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Кроме того, из эпиморфности функтора θ имеем, что

$$\theta(G/N) = \theta(G)N/N.$$

Теперь получаем

$$R/N = (\theta(G)N/N)(K_i/N) = \theta(G)NK_i/N,$$

а значит, $R = \theta(G)NK_i = \theta(G)K_j$ для некоторого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Отсюда следует, что $R \in \mathrm{fil}_\theta(G)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любого унитарного эпиморфного подгруппового функтора θ подгрупповой функтор fil_θ является S_n-фильтрующим, причем для группы G подгруппа $\theta(G)$ является вершиной конуса $\mathrm{fil}_\theta(G)$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathrm{fil}_\theta(G)$, $X \triangleleft G$ и $A \subseteq X$. Тогда $A = \theta(G)K$, где K — некоторая нормальная подгруппа группы G. Так как $X \triangleleft G$ и $A \subseteq X$, то

$$X = AX = (\theta(G)K)X = \theta(G)(KX) = \theta(G)X,$$

то есть $X \in \mathrm{fil}_\theta(G)$.

Пусть теперь $A \in \mathrm{fil}_\theta(G)$ и $B \in \mathrm{fil}_\theta(G)$. Тогда из определения функтора fil_θ имеем $A = \theta(G)K$ и $B = \theta(G)N$, где K и N — некоторые нормальные подгруппы группы G. Тогда

$$A \cap B = \theta(G)K \cap \theta(G)N = \theta(G)(K \cap \theta(G)N).$$

Так как $\theta(G) \triangleleft G$, то $K \cap \theta(G)N \triangleleft G$. Значит, $A \cap B \in \mathrm{fil}_\theta(G)$. Таким образом, подгрупповой функтор fil_θ является S_n-фильтрующим.

Так как пересечение всех fil_θ-подгрупп группы G совпадает с подгруппой $\theta(G)$, то $\theta(G)$ — вершина конуса $\mathrm{fil}_\theta(G)$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Отображение $f : \theta \mapsto \mathrm{fil}_\theta$, сопоставляющее каждому эпиморфному унитарному подгрупповому функтору θ индуцированный им регулярный S_n-фильтрующий подгрупповой функтор fil_θ, является взаимно однозначным.*

Доказательство. Ввиду следствия 1 множество всех унитарных эпиморфных подгрупповых функторов биективно множеству $\mathrm{Form}(\mathfrak{G})$ всех непустых формаций. В свою очередь на основании следствия 1.2 из [1] множество $\mathrm{Form}(\mathfrak{G})$ биективно множеству всех регулярных S_n-фильтрующих подгрупповых функторов. Теорема доказана.

Abstract

The notion of unitary epimorphic functors is introduced. The connection between unitary epimorphic subgroup functors and regular S_n-filtering subgroup functors is established.

Литература

1. С.Ф.Каморников, И.А.Кузменкова, Регулярные фильтрующие функторы и формации, Известия Гомельского государственного университета, Гомель, 2000, Вып. 3(16), С. 116–118.
2. С.Ф.Каморников, М.В.Селькин, Подгрупповые функторы в теории классов конечных групп, (Препринт/Гомельский госуниверситет), Гомель, 2001, № 107.
3. А.Н.Скиба, Алгебра формаций, Мн.: Беларуская навука, 1997.
4. Л.А.Шеметков, Формации конечных групп, М.: Наука, 1978.

Белорусский государственный университет
потребительской кооперации

Поступило 20.05.2002