МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

ОБ ОБРАТНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ БЕРГМАНА

В.Р. Мисюк

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно

ON THE INVERSE THEOREM OF RATIONAL APPROXIMATIONS FOR BERGMAN SPACE

V.R. Misiuk

Y. Kupala Grodno State University, Grodno

В работе исследуются обратные теоремы теории рациональных приближений. Доказаны аналоги таких теорем в пространстве Бергмана аналитических функций в круге.

Ключевые слова: *рациональные функции, наилучшее рациональное приближение, пространство Бергмана, рациональная аппроксимация.*

In this paper we study the inverse theorems of the theory of rational approximations. We prove the analogues of these theorems in the Bergman space of analytical functions in the circle.

Keywords: *rational functions, the best rational approximation, Bergman space, rational approximation.*

Введение

В настоящее время рациональные приближения являются одним из наиболее актуальных и интенсивно развивающихся разделов математического анализа. В этом направлении, начиная с классических результатов Д. Джексона и С.Н. Бернштейна, были получены прямые и обратные теоремы полиномиальной аппроксимации для различных функциональных пространств. Сейчас многие из них носят окончательный характер.

В данной статье будут получены аналоги обратных теорем теории рациональных приближений в пространстве Бергмана аналитических функций в круге. Для формулировки соответствующих результатов приведём необходимые определения.

1 Некоторые вспомогательные понятия и утверждения

Пусть m_2 – плоская мера Лебега в комплексной области $\boldsymbol{C}$. Для $0<p\le\infty$ через $L_p(D)$ обозначим пространство Лебега комплексных функций f на $D=\{z\in\boldsymbol{C}:|z|<1\}$ относительно плоской меры Лебега с обычной квазинормой $\|f\|_{L_p(D)}$ (нормой при $1\le p\le\infty$). Именно, $f\in L_p(D)$, если

$$\|f\|_{L_p(D)}=\left(\int\limits_D|f(z)|^p\,dm_2(z)\right)^{1/p}<\infty \text{ при } 0<p<\infty,$$

$$\|f\|_{L_p(D)}=ess\sup_{z\in D}|f(z)|<\infty \quad \text{при } p=\infty.$$

Для функции f аналитической в D через $\widehat{f}(k)$ обозначим её k-ый коэффициент Маклорена. Если $\alpha\ge 0$, то следующая функция также является аналитической

$$J^\alpha f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^\alpha\,\widehat{f}(k)\,z^k$$

и называется производной f в смысле Вейля. Очевидно, если $\alpha=l$ – натуральное, то

$$J^\alpha f(z)=\left[\left(\frac{d}{dz}\right)z\right]^l f(z).$$

Если $\alpha<0$ функцию $J^\alpha f$ называют также интегралом порядка $|\alpha|$.

Пусть $\alpha\in\boldsymbol{R}$ и $0<p\le\infty$, $0<q\le\infty$. Следуя, например, работам [1] и [2], через B_q^α обозначим пространство Харди-Бесова. Именно, $f\in B_q^\alpha$, если при некотором $\beta>\alpha$ функция

$$\left(1-|z|^2\right)^{\beta-\alpha-1/q}\cdot\left(J^\beta f\right)(z)$$

принадлежит $L_q(D)$. Квазинорма (норма при $1\le q\le\infty$) в пространстве B_q^α определяется следующим образом

$$\|f\|_{B_q^\alpha}=\left\|\left(1-|z|^2\right)^{\beta-\alpha-1/q}\cdot\left(J^\beta f\right)(z)\right\|_{L_q(D)}=$$

$$=\left(\int\left|\left(1-|z|^2\right)^{\beta-\alpha-1/q}\cdot\left(J^\beta f\right)(z)\right|^q dm_2(z)\right)^{1/q}<\infty.$$

Определение пространства B_q^α не зависит от β, при различных β соответствующие квазинормы эквивалентны. Ради удобства, как правило, полагают $\beta=\alpha+1$.

Пусть W – квазинормированное пространство аналитических в единичном круге функций. Тогда последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ называется *мультипликатором* в W, если для любой $f\in W$ имеем $\|g\|_W\le c\,\|f\|_W$, где

$$g(z)=\sum_{k=0}^\infty \lambda_k\widehat{f}(k)z^k,\quad c>0$$

и не зависит от f.

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма [2]. *Пусть α и $\beta>0$. Тогда последовательности*

$$\lambda_k=\frac{\Gamma(k+\alpha+\beta)}{\Gamma(k+\alpha)(r+1)^\beta}\ \text{ и }\ \mu_k=\frac{1}{\lambda_k}\quad (k=0,1,2,\,...),$$

где $\Gamma(\alpha)$ - гамма-функция Эйлера, являются мультипликаторами в пространстве B_p^γ.

Говорим, что функция f принадлежит пространству Бергмана $A_p(D)$, $0<p\le\infty$, если она аналитична в D и конечна квазинорма $\|f\|_{A_p}:=\|f\|_{L_p(D)}$. Введём

$$R_n\left(f,A_p\right)=\inf_{r_n\in\mathcal{R}_n}\|f-r_n\|_{A_p},\ n=0,1,2,\,...$$

– наилучшее приближение f посредством рациональных функций степени не выше n с полюсами вне замыкания D. Заметим, что если для некоторой рациональной функции $r_n^*\in\mathcal{R}_n$ имеет место равенство

$$R_n\left(f,A_p\right)=\left\|f-r_n^*\right\|_{A_p},$$

то r_n^* называется *элементом наилучшего приближения* функции f. Известно (см., например, [4]–[5] и др.), что элемент наилучшего приближения существует, однако, он может быть не единственным.

2 Основные результаты

***Теорема* 1**. *Пусть функция f принадлежит $A_p(D)$, $2<p<\infty$ и при некотором $\alpha>0$*

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\left(n^{\alpha+\frac{1}{p}}R_n\left(f,A_p\right)\right)^{q'}<\infty,$$

где $q'=\min\{1,q\}$, а $\dfrac{1}{q}=\alpha+\dfrac{2}{p}$. Тогда $f\in B_q^\alpha$.

***Доказательство*.** Пусть $r_n\in\mathcal{R}_n$ – элемент наилучшего приближения функции f в $A_p(D)$. Ввиду плотности множества алгебраических полиномов в пространстве $A_p(D)$ [8] получаем, что

$$R_n\left(f,A_p\right)\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty. \tag{2.1}$$

Введём в рассмотрение лакунарный ряд функции f

$$f=r_1+\sum_{k=1}^\infty\left(r_{2^k}-r_{2^{k-1}}\right). \tag{2.2}$$

Пусть S_n - n-я частичная сумма этого ряда. Тогда $\|f-S_n\|_{A_p}=\|f-r_{2^n}\|_{A_p}\to 0$ согласно (2.1), а, следовательно, ряд (2.2) сходится. Известно [9, с. 123], что для произвольной точки $z\in D$

$$\left|f(z)\right|\le\left[\pi\left(1-|z|\right)^2\right]^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{A_p}.$$

Поэтому функциональный ряд (2.2) сходится равномерно в любом замкнутом круге радиуса $|z|\le R<1$ из D. Таким образом, этот ряд можно почленно дифференцировать в D, предварительно воспользовавшись утверждением леммы, т.к. здесь нас интересуют дробные производные в смысле Вейля.

Дальнейшее доказательство разобьём на два случая.

1. *Случай* $q\ge 1$. Учитывая субаддитивность нормы, из (2.2) получим

$$\|f\|_{B_q^\alpha}\le\|r_1\|_{B_q^\alpha}+\sum_{k=1}^\infty\left\|r_{2^k}-r_{2^{k-1}}\right\|_{B_q^\alpha}. \tag{2.3}$$

Из [7] соответственно имеем, что

$$\|r_1\|_{B_q^\alpha}\le c_1\|r_1\|_{L_p(D)}\le c_1\left(\|f\|_{L_p(D)}+\|f-r_1\|_{L_p(D)}\right)\le$$
$$\le c_1\left(\|f\|_{L_p(D)}+R_1\left(f,A_p\right)\right).$$

Очевидно, что наилучшее приближение функции не превышает нормы самой функции, поэтому

$$\|r_1\|_{B_q^\alpha}\le 2c_1\|f\|_{L_p(D)}. \tag{2.4}$$

Рассмотрим второе слагаемое, стоящее справа в соотношении (2.3) с учётом [7].

$$\begin{aligned}\left\|r_{2^k}-r_{2^{k-1}}\right\|_{B_q^\alpha}&\le c_2\left(3\cdot 2^{k-1}\right)^{\alpha+\frac{1}{p}}\left\|r_{2^k}-r_{2^{k-1}}\right\|_{L_p(D)}\le\\&\le c_3\left(2^{k-1}\right)^{\alpha+\frac{1}{p}}\left\|r_{2^k}-r_{2^{k-1}}\right\|_{L_p(D)}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Далее

$$\left\|r_{2^k}-r_{2^{k-1}}\right\|_{L_p(D)}\le\left\|r_{2^k}-f\right\|_{L_p(D)}+\left\|r_{2^{k-1}}-f\right\|_{L_p(D)}\le$$
$$\le R_{2^k}\left(f,A_p\right)+R_{2^{k-1}}\left(f,A_p\right)\le 2R_{2^{k-1}}\left(f,A_p\right).$$

Поэтому из (2.5) с учётом последнего соотношения находим, что

$$\left\|r_{2^k}-r_{2^{k-1}}\right\|_{B_q^\alpha}\le 2c_3\left(2^{k-1}\right)^{\alpha+\frac{1}{p}}R_{2^{k-1}}\left(f,A_p\right). \tag{2.6}$$

Собирая оценки (2.4) и (2.6), из (2.3) получим

$$\|f\|_{B_q^\alpha}\le 2\left(c_1\|f\|_{L_p(D)}+c_3\sum_{k=1}^\infty\left(2^{k-1}\right)^{\alpha+\frac{1}{p}}R_{2^{k-1}}\left(f,A_p\right)\right). \tag{2.7}$$

Известно [10], [11], что если $\alpha>0$, $\beta>0$ и числовая последовательность $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ не возрастая сходится к нулю, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^{k\alpha}a_{2^k}\right)^{\beta}\le c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(n^{\alpha}a_n\right)^{\beta},$$

где $c=c(\alpha,\beta)$ - некоторая положительная величина. Поэтому из (2.7) и условий нашей теоремы находим, что

$$\|f\|_{B_q^\alpha}\le 2\left(c_1\|f\|_{L_p(D)}+c_4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(n^{\alpha+\frac{1}{p}}R_n\left(f,A_p\right)\right)^{1}\right),$$

а, следовательно, $f\in B_q^\alpha$.

2. *Случай* $0<q<1$. Из (2.2) получим

$$\|f\|_{B_q^\alpha}^q\le\|r_1\|_{B_q^\alpha}^q+\sum_{k=1}^{\infty}\|r_{2^k}-r_{2^{k-1}}\|_{B_q^\alpha}^q. \qquad (2.8)$$

Оценки (2.4) и (2.6) примут вид соответственно

$$\|r_1\|_{B_q^\alpha}^q\le 2^q c_1^q\|f\|_{L_p(D)}^q$$

и

$$\|r_{2^k}-r_{2^{k-1}}\|_{B_q^\alpha}^q\le 2^q c_3^q\left(2^{q(k-1)}\right)^{\alpha+\frac{1}{p}}R_{2^{k-1}}^q\left(f,A_p\right).$$

Учитывая их, находим

$$\|f\|_{B_q^\alpha}^q\le 2^q\left(c_1^q\|f\|_{L_p(D)}^q+c_3^q\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^{(k-1)\left(\alpha+\frac{1}{p}\right)}R_{2^{k-1}}\left(f,A_p\right)\right)^q\right). \qquad (2.9)$$

Опять же имеем (см. также, например, [10], [11]), что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(2^{(k-1)\left(\alpha+\frac{1}{p}\right)}R_{2^{k-1}}\left(f,A_p\right)\right)^q<\infty\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(n^{\left(\alpha+\frac{1}{p}\right)}R_n\left(f,A_p\right)\right)^q<\infty.$$

Поэтому из (2.9) и условий нашей теоремы

$$\|f\|_{B_q^\alpha}^q\le 2^q\left(c_1^q\|f\|_{L_p(D)}^q+c_3^q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(n^{\left(\alpha+\frac{1}{p}\right)}R_n\left(f,A_p\right)\right)^q\right),$$

а, следовательно, $f\in B_q^\alpha$ при всех $q\in(0,1)$.
Теорема полностью доказана.

Далее теорему 1 мы улучшим, используя интерполяцию. С этой целью приведём некоторые сведения теории интерполяционных пространств.

Пусть X_0 и X_1 – совместимые квазинормированные абелевы группы по сложению [12]. Для $x\in X_0+X_1$ введём K - функционал Я. Петре

$$K(t)=\inf\left\{\|x_0\|_{X_0}+t\|x_1\|_{X_1}:x_0+x_1=x,\right.$$

$$\left.x_0\in X_0,x_1\in X_1\right\},t>0,$$

где $\|\cdot\|_{X_s}\ (s=0,\ 1)$ – квазинорма в X_s. Мы обозначим через

$$(\cdot,\cdot)_{\theta,q}\quad(0<\theta<1,\ 0<q\le\infty)$$

интерполяционный функтор Я. Петре [12]. Именно, $x\in\left(X_0,X_1\right)_{\theta,q}=X_{\theta,q}$, если

$$\|x\|_{X_{\theta,q}}=\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta}K(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty \text{ при } q\ne\infty,$$

$$\|x\|_{X_{\theta,\infty}}=\sup_{t>0}t^{-\theta}K(t).$$

Следуя Я. Петре [12]-[14] введём аппроксимационное пространство

$$\mathcal{R}_{p,q}^\alpha=\mathcal{R}_p^\alpha\left(A_p\right):=\left\{f\in A_p(D):\|f\|_{\mathcal{R}_{p,q}^\alpha}<\infty\right\},$$

$$\alpha>0;\ p,q\in(0,\infty],$$

где

$$\|f\|_{\mathcal{R}_{p,q}^\alpha}:=\left[\frac{1}{n}\left(n^{\left(\alpha+\frac{1}{p}\right)}R_n\left(f,A_p\right)\right)^q\right]^{\frac{1}{q}},\quad q\ne\infty,$$

$$\|f\|_{\mathcal{R}_{p,\infty}^\alpha}:=\sup_{n\ge1}n^{\alpha+\frac{1}{p}}R_n\left(f,A_p\right),\quad q=\infty.$$

***Теорема* 2** [3]. *Пусть* $0<\alpha_0,\alpha_1,\sigma_0,\sigma_1<\infty$, $0<\theta<1$, $\alpha=(1-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1$ *и* $\sigma^{-1}=(1-\theta)\sigma_0^{-1}+\theta\sigma_1^{-1}$. *Тогда*

$$\left(B_{\sigma_0}^{\alpha_0},B_{\sigma_1}^{\alpha_1}\right)_{\theta,q}=B_\sigma^\alpha.$$

Теорема 2 хорошо известна для $1\le\sigma_0$, $\sigma_1,q_0,q_1\le\infty$ (см., например, [12] гл. 6). С точки зрения обобщённых функций в вещественном случае она получена в книгах Я. Петре [15] и Х. Трибеля [14].

Для аналитических функций эта теорема доказана А.А. Пекарским [3] отлично от методов, применяемых в [12], [15], [14].

***Теорема* 3** [12], [13]. *Пусть* $0<p,q_0,q_1\le\infty$, $0<\alpha_0,\alpha_1<\infty$, *причём* $\alpha_0\ne\alpha_1$, $0<\theta<1$ *и* $\alpha=(1-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1$. *Тогда*

$$\left(\mathcal{R}_{p,q_0}^{\alpha_0},\mathcal{R}_{p,q_1}^{\alpha_1}\right)_{\theta,q}=\mathcal{R}_{p,q}^\alpha.$$

***Теорема* 4.** *Пусть функция* f *принадлежит* $A_p(D)$, $2<p<\infty$ *и при некотором* $\alpha>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(n^{\alpha+\frac{1}{p}}R_n\left(f,A_p\right)\right)^q<\infty,$$

где $\frac{1}{q}=\alpha+\frac{2}{p}$. *Тогда* $f\in B_q^\alpha$.

Доказательство. Зафиксируем α_0 и α_1, удовлетворяющие условию $0<\alpha_0<\alpha<\alpha_1<\infty$. Числа $q_1>0$, $q_2>0$ и $0<t<1$ определим из условий

$$\frac{1}{q_i}=\alpha_i+\frac{2}{p},\ i=0,1;\ \frac{1}{q}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}.$$

Согласно теореме 1 имеют место вложения

$$\mathcal{R}_{\min(1,q_0)}^{\alpha_0}\left(A_p\right)\subset B_{q_0}^{\alpha_0},\ \mathcal{R}_{\min(1,q_1)}^{\alpha_1}\left(A_p\right)\subset B_{q_1}^{\alpha_1}. \qquad (2.10)$$

Из теорем 2 и 3 соответственно получаем равенства

$$\left(B_{\sigma_0}^{\alpha_0},B_{\sigma_1}^{\alpha_1}\right)_{t,q}=B_\sigma^\alpha, \qquad (2.11)$$

$$\left(\mathcal{R}_{\min(1,q_0)}^{\alpha_0}\left(A_p\right),\mathcal{R}_{\min(1,q_1)}^{\alpha_1}\left(A_p\right)\right)_{t,q}=\mathcal{R}_{q,p}^\alpha. \qquad (2.12)$$

Из соотношений (2.10)–(2.12) и свойств интерполяционного функтора Я. Петре получаем искомое вложение:

$$\mathcal{R}^{\alpha}_{q,p} \subset B^{\alpha}_{q} .$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Flett, T.M.* Lipschitz spaces of functions on the circle and the disk / T.M. Flett // J. Math. Anal. and Appl. – 1972. – V. 39, № 1. – P. 121–158.

2. *Пекарский, А.А.* Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации / А.А. Пекарский // Матем. сб. – 1984. – Т. 124, № 4. – С. 571–588.

3. *Пекарский, А.А.* Рациональные приближения выпуклых функций / А.А. Пекарский // Матем. заметки. – 1985. – Т. 38, № 5. – С. 679–690.

4. *Уолш, Дж.Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области / Дж. Л. Уолш. – М. : ИЛ, 1961. – 508 с.

5. *Lorentz, G.G.* Constructive Approximation. Advanced problems / G.G. Lorentz, M.V. Golitschek, Y. Makovoz. – Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 651 p.

6. *DeVore, R.A.* Constructive approximation / R.A. DeVore, G.G. Lorentz. – N.Y. Berlin, 1993.

7. *Мисюк, В.Р.* Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций относительно плоской меры / В.Р. Мисюк // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2001. – Т. 9. – С. 105–108.

8. *Синанян, С.О.* Аппроксимация аналитическими функциями и полиномами в среднем по площади / С.О. Синанян // Матем. сборник. - 1966. – Т. 69. – С. 546–578.

9. *Эдвардс, Р.Э.* Функциональный анализ / Р.Э. Эдвардс. – М. : ИИЛ, 1969. – 1071 с.

10. *Даугаве, И.К.* Введение в теорию приближения функций / И.К. Даугавет. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. – 184 с.

11. *Дзядык, В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 511 с.

12. *Берг, Й.* Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрём. – М. : Мир, 1980. – 264 с.

13. *Peetre, J.* Interpolation of normed Abelian groups / J. Peetre, G. Sparr // Ann. Mat. Pura Appl. - 1972. – V.92. – P. 217–262.

14. *Трибель, Х.* Теория функциональных пространств / Х. Трибель. – М. : Мир, 1986. – 447 с.

15. *Peetre, J.* New thoughts on Besov spaces / J. Peetre. – Math. Dept. : Duke Univ., 1976. – 264 с.

Поступила в редакцию 22.03.10.