Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(19), 2003

УДК 512.548

Тождества многообразия $\mathfrak{X}^*(n)$

А.М. Гальмак

Класс всех n-арных групп является многообразием [1–3], которое можно определить тождествами в сигнатуре { [ ], ¯ }, где [ ] – ассоциативная n-арная операция, ¯–унарная операция взятия косого элемента. В [4, 5] автором показано, что каждому многообразию групп $\mathfrak{X}$ можно поставить в соответствие два многообразия

$$\mathfrak{X}(n) = \{< A, [\ ] > \mid A_0 \in \mathfrak{X}\} \text{ и } \mathfrak{X}^*(n) = \{< A, [\ ] > \mid A^* \in \mathfrak{X}\}$$

n-арных групп, где A_0 – сответствующая группа Поста, A^* – универсальная обёртывающая группа Поста. Цель данной работы – определение многообразия $\mathfrak{X}^*(n)$ с помощью тождеств указанной выше сигнатуры { [ ], ¯ }. Для многообразия $\mathfrak{X}(n)$ аналогичная задача решена в [6].

Пусть < A, [ ] > – n-арная группа, F_A – свободная полугруппа над алфавитом A, θ – отношение эквивалентности Поста [2, 7], определённое на F_A, $< F_A / \theta, * > = A^*$ – универсальная обёртывающая группа Поста. Через θ(α) обозначается класс эквивалентности θ, содержащий последовательность α, $\ell(\alpha)$ – длина последовательность α

Лемма 1. Пусть < A, [ ], ¯ > – n-арная группа j ∈ {1, …, n – 1}, x, y ∈ A. Тогда

$$\theta^{-1}(x\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{j-1}) = \theta(\bar{\acute{o}}\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-j-1}\bar{\tilde{o}}\underbrace{\tilde{o}\ldots\tilde{o}}_{n-3}) =$$

$$= \theta([\bar{\acute{o}}\underbrace{y\ldots\acute{o}}_{n-j-1}\bar{\tilde{o}}\underbrace{\tilde{o}\ldots\tilde{o}}_{n-3}\bar{\acute{o}}\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{j}]\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-j-2}).$$

Доказательство. Так как

$$\theta(x\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{j-1})\theta(\bar{\acute{o}}\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-j-1}\bar{\tilde{o}}\underbrace{\tilde{o}\ldots\tilde{o}}_{n-3}) =$$

$$= \theta(x\underbrace{\underbrace{y\ldots y}_{j-1}\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-j-1}}_{\text{нейтр.}}\bar{\tilde{o}}\underbrace{\tilde{o}\ldots\tilde{o}}_{n-3}) = \theta(\underbrace{x\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}}_{\textit{нейтр.}}) = E,$$

где E – единица группы A^*, то верно первое равенство.

Второе равенство следует из эквивалентности последовательностей

$$\bar{\acute{o}}\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-j-1}\bar{\tilde{o}}\underbrace{\tilde{o}\ldots\tilde{o}}_{n-3}, [\bar{\acute{o}}\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-j-1}\bar{\tilde{o}}\underbrace{\tilde{o}\ldots\tilde{o}}_{n-3}\bar{\acute{o}}\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{j}]\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-j-2}.$$

Лемма доказана.

Для каждого группового слова

$$t = t(u_1, \ldots, u_m) = u_{\lambda_1}^{\varepsilon_1}\ldots u_{\lambda_m}^{\varepsilon_m}, \lambda_i \in \{1, \ldots, m\}, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \ldots, m$$

в алфавите $U = \{u_1, u_2, \ldots\}$ и любой последовательности чисел

$$j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n-1\}$$

определим слово

$$t^*_{(j_1,\ldots,j_m,k)}(x_1, \ldots, x_m, y) = [\alpha(u_{\lambda_1}^{\varepsilon_1}, j_{\lambda_1})\ldots\alpha(u_{\lambda_m}^{\varepsilon_m}, j_{\lambda_m})\underbrace{\acute{o}\ \ldots\ \acute{o}}_{k(n-1)+1-\ell(\alpha)}]$$

сигнатуры { [ ], ¯ } в алфавите $X = \{y, x_1, x_2, \ldots\}$, где

$$\alpha(u_{\lambda_i}^{\varepsilon_i}, j_{\lambda_i}) = x_{\lambda_i}\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{j_{\lambda_i}-1} \text{ при } \varepsilon_i = 1,$$

$$\alpha(u_{\lambda_i}^{\varepsilon_i}, j_{\lambda_i}) = \overline{\acute{o}}\ \underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-j_{\lambda_i}-1}\ \overline{x_{\lambda_i}}\ \underbrace{\tilde{o}_{\lambda_i}\ldots\tilde{o}_{\lambda_i}}_{n-3}, \text{ при } \varepsilon_i = -1,$$

k – любое целое число, удовлетворяющее неравенству

$$k(n-1)+1 \geq \ell(\alpha(u_{\lambda_1}^{\varepsilon_1}, j_{\lambda_1}) \ldots \alpha(u_{\lambda_m}^{\varepsilon_m}, j_{\lambda_m})). \qquad (*)$$

Ввиду ассоциативности n-арной операции [ ] ее символы в слове t^* могут быть расставлены произвольным образом.

Лемма 2. Пусть < A, [ ], $^-$> – n-арная группа, $\grave{A}^*$ – ее обертывающая группа Поста. Если в $\grave{A}^*$ выполняется тождество

$$t(u_1, \ldots, u_m) = s(u_1, \ldots, u_m), \qquad (1)$$

где слово t определено выше, а слово s имеет следующий вид:

$$s = s(u_1, \ldots, u_m) = u_{\nu_1}^{\delta_1} \ \ldots \ u_{\nu_m}^{\delta_m}, \ \nu_i \in \{1, \ldots, m\}, \ \delta_i = \pm 1, \ i = 1, \ldots, m,$$

то в < A, [ ], $^-$> выполяется тождество

$$t^*_{(j_1,\ldots,j_m,k)}(x_1, \ldots, x_m, y) = s^*_{(j_1,\ldots,j_m,k)}(x_1, \ldots, x_m, y) \qquad (2)$$

для любых $j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n-1\}$ и любого k, удовлетворяющего неравенству (*).

Доказательство. Полагая в (1)

$$u_i = \theta(x_i \underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{j_i-1}) \in \grave{A}^*$$

и применяя лемму 1, получаем

$$\theta(\alpha(u_{\lambda_1}^{\varepsilon_1}, j_{\lambda_1})) \ldots \theta(\alpha(u_{\lambda_m}^{\varepsilon_m}, j_{\lambda_m})) = \theta(\alpha(u_{\nu_1}^{\delta_1}, j_{\nu_1})) \ldots \theta(\alpha(u_{\nu_m}^{\delta_m}, j_{\nu_m})), \qquad (3)$$

откуда

$$\theta(\alpha(u_{\lambda_1}^{\varepsilon_1}, j_{\lambda_1})) \ldots \theta(\alpha(u_{\lambda_m}^{\varepsilon_m}, j_{\lambda_m}))\theta(\underbrace{\acute{o}\ \ldots\ \acute{o}}_{k(n-1)+1-\ell(\alpha)}) =$$
$$= \theta(\alpha(u_{\nu_1}^{\delta_1}, j_{\nu_1})) \ldots \theta(\alpha(u_{\nu_m}^{\delta_m}, j_{\nu_m}))\theta(\underbrace{\acute{o}\ \ldots\ \acute{o}}_{k(n-1)+1-\ell(\alpha)}). \qquad (4)$$

Из последнего равенства следует

$$\theta([\alpha(u_{\lambda_1}^{\varepsilon_1}, j_{\lambda_1}) \ldots \alpha(u_{\lambda_m}^{\varepsilon_m}, j_{\lambda_m}) \underbrace{\acute{o}\ \ldots\ \acute{o}}_{k(n-1)+1-\ell(\alpha)}]) =$$
$$= \theta([\alpha(u_{\nu_1}^{\delta_1}, j_{\nu_1}) \ldots \alpha(u_{\nu_m}^{\delta_m}, j_{\nu_m}) \underbrace{\acute{o}\ \ldots\ \acute{o}}_{k(n-1)+1-\ell(\alpha)}]), \qquad (5)$$

откуда

$$[\alpha(u_{\lambda_1}^{\varepsilon_1}, j_{\lambda_1}) \ldots \alpha(u_{\lambda_m}^{\varepsilon_m}, j_{\lambda_m}) \underbrace{\acute{o}\ \ldots\ \acute{o}}_{k(n-1)+1-\ell(\alpha)}] =$$
$$= [\alpha(u_{\nu_1}^{\delta_1}, j_{\nu_1}) \ldots \alpha(u_{\nu_m}^{\delta_m}, j_{\nu_m}) \underbrace{\acute{o}\ \ldots\ \acute{o}}_{k(n-1)+1-\ell(\alpha)}]. \qquad (6)$$

Следовательно, в < A, [ ], $^-$> выполняется тождество (2). Лемма доказана.

Замечание 1. В левой (правой) части тождества (1) некоторые из переменных могут от-сутствовать. Однако каждая переменная u_i встречается, по крайней мере, в одной из часте тождества (1). Если в левой (правой) части тождества (1) отсутствует переменная u_{λ_i} (u_{ν_i}), т считаем $\varepsilon_i = 0$ ($\delta_i = 0$).

Замечание 2. Из (3) следует эквивалентность последовательностей

$$\alpha(u_{\lambda_1}^{\varepsilon_1}, j_{\lambda_1}) \ldots \alpha(u_{\lambda_m}^{\varepsilon_m}, j_{\lambda_m}), \ \alpha(u_{\nu_1}^{\delta_1}, j_{\nu_1}) \ldots \alpha(u_{\nu_m}^{\delta_m}, j_{\nu_m}).$$

Поэтому равенство (6) имеет смысл. Ясно, что k может быть также любым числом, удовле-творяющим неравенству

$$k(n-1)+1 \geq \ell(\alpha(u_{\nu_1}^{\delta_1}, j_{\nu_1}) \ldots \alpha(u_{\nu_m}^{\delta_m}, j_{\nu_m})).$$

Замечание 3. В случае, когда необходимо подчеркнуть, что k из неравенства (*) зав сит от $j_1, \ldots, j_m$, будем вместо k писать $k_{j_1,\ldots,j_m}$.

Лемма 3. Если в n-арной группе $< A, [\ ], ^{-} >$ для любых $j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n-1\}$ и некоторого $k_{j_1,\ldots,j_m}$, удовлетворяющего неравенству (*), выполняется тождество (2) из предыдущей леммы, то группа A^* удовлетворяет тождеству (1) из той же леммы.

Доказательство. Пусть

$$u_1 = \theta(x_1 \underbrace{\acute{o} \ldots \acute{o}}_{j_1-1}), \ldots, u_m = \theta(x_m \underbrace{\acute{o} \ldots \acute{o}}_{j_m-1})$$

произвольные элементы из A^*. Так как, согласно условию леммы, выполняется (6), то верно (5), откуда следуют (4) и далее (3). Из (3), используя лемму 1, получаем (1). Лемма доказана.

Если для каждой последовательности $j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n-1\}$ зафиксировать число $k_{j_1,\ldots,j_m}$, удовлетворяющее неравенству (*), то для каждого тождества t = s вида (1) можно определить множество

$$\Sigma^*(t = s) = \{\, t^*_{(j_1,\ldots,j_m,k_{j_1,\ldots,j_m})} = s^*_{(j_1,\ldots,j_m,k_{j_1,\ldots,j_m})} \mid j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n-1\}\},$$

состоящее из $(n-1)^m$ тождеств.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{X}$ – многообразие групп, определяемое совокупностью тождеств Σ. Тогда $\mathfrak{X}^*(n)$ – многообразие n-арных групп, определяемое совокупностью тождеств

$$\Sigma^*(n) = \bigcup_{(t=s)\in\Sigma} \Sigma^*(t = s).$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{M}$ многообразие n-арных групп, выделяемое в многообразии всех n-арных групп совокупностью тождеств $\Sigma^*(n)$.

Для $< A, [\ ], ^{-} > \in \mathfrak{X}^*(n)$ имеем $A^* \in \mathfrak{X}$. Если t = s некоторое тождество из Σ, то из $A^* \in \mathfrak{X}$ и леммы 2 следует, что $< A, [\ ], ^{-} >$ удовлетворяет любому тождеству из $\Sigma^*(t = s)$. А так как это верно для любого тождества из Σ, то $< A, [\ ], ^{-} >$ удовлетворяет любому тождеству из $\Sigma^*(n)$. Поэтому $< A, [\ ], ^{-} > \in \mathfrak{M}$, откуда $\mathfrak{X}^*(n) \subseteq \mathfrak{M}$.

Пусть теперь $< A, [\ ], ^{-} > \in \mathfrak{M}$, т.е. $< A, [\ ], ^{-} >$ удовлетворяет любому тождеству $t^* = s^*$ из $\Sigma^*(n)$. Так как тождество $t^* = s^*$ входит в одну из совокупностей $\Sigma^*(t = s)$, то по лемме 3 группа A^* удовлетворяет тождеству t = s. А так как это верно для любого тождества $t^* = s^*$ из $\Sigma^*(n)$, то A^* удовлетворяет любому тождеству из Σ, т.е. $A^* \in \mathfrak{X}$, откуда $< A, [\ ], ^{-} > \in \mathfrak{X}^*(n)$. Таким образом, доказано включение $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}^*(n)$, а значит, и равенство $\mathfrak{X}^*(n) = \mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Замечание 4. В тождествах из $\Sigma^*(n)$ могут встретиться нейтральные последовательности, которые можно отбросить. Леммы 2 и 3 , а также теорема 1 при этом останутся верными, если в них любое из тождеств $t^* = s^*$ заменить соответствующими эквивалентными тождествами, не содержащими нейтральных последовательностей.

Для некоторых многообразий $\mathfrak{X}$ число тождеств, определяющих многообразие $\mathfrak{X}^*(n)$, можно уменьшить, если отбросить тождества, являющиеся следствиями остающихся тождеств.

Пример 1. Если $\mathfrak{A}$ – многообразие всех абелевых групп, то $\mathfrak{A}^*(n)$ – многообразие всех абелевых n-арных групп (пример из [5]). А так как многообразие $\mathfrak{A}$ определяется тождеством uv = vu, то из теоремы 1 следует, что многообразие $\mathfrak{A}^*(n)$ выделяется в многообразие всех n-арных групп следующими $(n-1)^2$ тождествами:

$$[xz \underbrace{\acute{o} \ldots \acute{o}}_{n-2}] = [zx \underbrace{\acute{o} \ldots \acute{o}}_{n-2}];$$

$$[xyz \underbrace{\acute{o} \ldots \acute{o}}_{n-3}] = [zxy \underbrace{\acute{o} \ldots \acute{o}}_{n-3}];$$

…………………………

$$[x\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-3}zy] = [zx\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-3}y];$$

$$[x\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}z] = [zx\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}];$$

$$[xzy\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-3}] = [zyx\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-3}];$$

$$[xyzy\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-4}] = [zyxy\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-4}];$$

....

$$[x\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-3}zy] = [zyx\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-3}];$$

$$[x\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}zy\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}] = [zyx\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}];$$

....

$$[xz\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}] = [z\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}x];$$

$$[xyz\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}] = [z\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}xy\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}];$$

....

$$[x\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-3}z\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}yy] = [z\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}x\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-3}yy];$$

$$[x\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}z\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}y] = [z\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}x\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}y].$$

В частности, многообразие $\mathfrak{A}^*(3)$ всех абелевых тернарных групп определяется $(3-1)^2 = 4$ тождествами

$$[xzy] = [zxy], [xyz] = [zxy], [xzy] = [zyx], [xyzyy] = [zyxyy].$$

Известно, что многообразие $\mathfrak{A}^*(n)$ может быть определено одним тождеством. Покажем это.

Из первого тождества в совокупности тождеств, определяющих многообразие $\mathfrak{A}^*(n)$, следует, что для любых x, z ∈ A последовательности xz и zx эквивалентны. Поэтому все тождества, в обеих частях которых n-арная операция применяется к n символам, являются следствиями первого тождества. Следствиями первого тождества являются и все остальные тождества, в обеих частях которых "длинная" n-арная операция применяется к 2n-1 символам. Покажем это, например, для последнего тождества. Действительно, следствием первого тождества является тождество

$$[x\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}z] = [z\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}x],$$

из которого в свою очередь следует тождество

$$[x\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}z\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}y] = [z\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}x\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}y].$$

Таким образом, все $(n-1)^2$ тождеств, определяющих многообразие $\mathfrak{A}^*(n)$, эквивалентны первому тождеству. Следовательно, многообразие $\mathfrak{A}^*(n)$ определяются одним тождеством

$$[xz\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}] = [zx\underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-2}].$$

Пусть $\mathfrak{B}_m$ – бернсайдово многообразие периода m, определяемое тождеством $x^m = e$ или равносильным тождествам $x^{m+1} = x$.

Предложение 1. $\mathfrak{B}^*_m(n) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда

$$m = k(n-1),\ k \geq 1.$$

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{B}^*_m(n) \neq \varnothing$, т.е. существует $< A, [\ ], ^{-} > \in \mathfrak{B}^*_m(n)$. Тогда $A^* \in \mathfrak{B}_m$, откуда

$$\underbrace{\theta(x)\ldots\theta(x)}_{m} = \theta(\underbrace{x\ldots x}_{m}) = E,\ x \in A,$$

где E – единица группы A^* Поэтому $m = k(n-1)$, $k \geq 1$.

Если теперь выполняется предыдущее равенство, то в $\mathfrak{B}_m$ имеется циклическая группа $Z_{k(n-1)}$ порядка $k(n-1)$, которая содержит подгруппу Z_k, факторгруппа по которой циклическая порядка $n-1$. По теореме Поста $< aZ_k, [\ ] >$ – n–арная группа, где aZ_k – смежный класс, порождающий $Z_{k(n-1)} / Z_k$, а [ ] – n-арная операция, производная от операции в группе $Z_{k(n-1)}$, причем $(aZ_k)^* \simeq Z_{k(n-1)}$. Так как $(aZ_k)^* \in \mathfrak{B}_m$, то $< aZ_k, [\ ] > \in \mathfrak{B}^*_m(n)$, т.е. $\mathfrak{B}^*_m(n) \neq \varnothing$. Предложение доказано.

Следствие 1. $\mathfrak{B}^*_m(n) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $m \neq k(n-1)$, $k \geq 1$.

Следствие 2. Если $m = k(n-1)$, то $\mathfrak{B}^*_m(n)$ – многообразие n–арных групп, определяемое следующими $n-1$ тождествами:

$$[\underbrace{x\ \ldots\ x}_{k(n-1)+1}] = x,$$

$$[\underbrace{xy\ldots xy}_{k(n-1)}x] = x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[\underbrace{x\underbrace{y\ldots y}_{n-2}\ldots x\underbrace{y\ldots y}_{n-2}x}_{k(n-1)}] = x.$$

Доказательство. По предыдущему предложению $\mathfrak{B}^*_m(n) \neq \varnothing$, а по теореме 1 $\mathfrak{B}^*_m(n)$ – многообразие n–арных групп, определяемое тождествами

$$[\underbrace{x\ \ldots\ x}_{k(n-1)+1}] = x,$$

$$[\underbrace{xy\ldots xy}_{k(n-1)}\ xy\ \underbrace{y\ldots y}_{n-2}] = [xy\ \underbrace{y\ldots y}_{n-2}],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[\underbrace{x\underbrace{y\ldots y}_{n-2}\ldots x\underbrace{y\ldots y}_{n-2}x}_{k(n-1)}\ \underbrace{y\ldots y}_{n-2}y] = [x\underbrace{y\ldots y}_{n-2}y].$$

Все эти тождества, кроме первого, эквивалентны соответствующим тождествам из условия. Следствие доказано.

Ранее было установлено [6], что многообразие $\mathfrak{B}_m(n)$ определяется тождеством

$$[\underbrace{x\underbrace{y\ldots y}_{n-2}\ldots x\underbrace{y\ldots y}_{n-2}x}_{m}] = x,$$

которое при $m = k(n-1)$ совпадает с последним тождеством из следствия 2. Поэтому имеет место

Следствие 3. Если $m = k(n-1)$, $k \geq 1$, то $\mathfrak{B}^*_m(n)$ – подмногообразие многообразия $\mathfrak{B}_m(n)$.

Полагая в следствии 2 $k = 1$, получаем

Следствие 4. Многообразие $\mathfrak{B}^*_{n-1}(n)$ определяется следующими тождествами:

$$[\underbrace{x\ldots x}_{n}] = x,$$

$$[\underbrace{xy\ldots xy}_{(n-1)}x] = x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[\underbrace{x\underbrace{y\ldots y}_{n-2}\ldots x\underbrace{y\ldots y}_{n-2}}_{n-1}x] = x.$$

Следствие 5. Многообразие $\mathfrak{B}^*_{2k}(3)$ тернарных групп определяется двумя тождествами

$$[\underbrace{x\ldots x}_{2k+1}] = x,\ [\underbrace{xy\ldots xy}_{2k}x] = x.$$

Следствие 6. Многообразие $\mathfrak{B}^*_2(3)$ тернарных групп определяется двумя тождествами

$$[xxx] = x,\ [xyxyx] = x.$$

Следствие 7. Если $\mathfrak{X}$ – конечно базируемое многообразие групп, то $\mathfrak{X}^*(n)$ – конечно базируемое многообразие n-арных групп.

Замечание 5. При переходе от слова t к слову t^* было использовано представление обертывающей группы Поста в виде

$$A^* = \bigcup_{j=1}^{n-1}\{\theta(\tilde{o}\underbrace{y\ldots y}_{j-1}) \mid x \in A\}.$$

Для этой же цели могут быть использованы и другие представления группы A^*. Например,

$$A^* = \bigcup_{j=1}^{n-1}\{\theta(\underbrace{y\ldots y}_{j-1}\tilde{o}) \mid x \in A\}.$$

В этом случае последовательность $\alpha(u^{\varepsilon_i}_{\lambda_i}, j_{\lambda_i})$ в слове t^* имеет следующий вид:

$$\alpha(u^{\varepsilon_i}_{\lambda_i}, j_{\lambda_i}) = \underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{j_{\lambda_i}-1}\ x_{\lambda_i} \text{ при } \varepsilon_i = 1,$$

$$\alpha(u^{\varepsilon_i}_{\lambda_i}, j_{\lambda_i}) = \underbrace{x_{\lambda_i}\ldots x_{\lambda_i}}_{n-3}\ \overline{x_{\lambda_i}}\ \underbrace{\acute{o}\ldots\acute{o}}_{n-j_{\lambda_i}-1}\ \overline{y},$$

а леммы 2, 3 и теорема 1 останутся верными.

Abstract

In this paper we give the systems of identities defining variety $\mathfrak{X}^*(n)$ of n-ary groups.

Литература

1. Gleichgewicht B., Glazek K. Remarks of n-groups as abstract algebras, Collg Math, 1967. – Vol. 17. – №2. – С. 691 – 693.
2. Русаков С.А. Алгебраические n-арные системы, Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
3. Dudek W.A. Varieties of poliadic groups, Filomat, 1995. – 9:3. – С. 657 – 674.
4. Гальмак А.М. Многообразие $\mathfrak{X}$(n), Веснік ВДУ імя. П.М. Машэрава, 2000. №1(15). – С. 64 – 68.
5. Гальмак А.М. Многообразия полиадических групп, Весці НАНБ, 2002. – № 2. – С. 39–40.
6. Гальмак А.М. Тождества многообразия $\mathfrak{X}$(n), Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова, – 2002. – №1(11). – С. 83–89.
7. Post. E.L. Poliadyc groups, Trans. Amer. Math. Soc., 1940. – Vol. 48. – №2. – P. 208-350.

Могилевский университет продовольствия Поступило 16.01.03