Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №4(19), 2003

УДК 512.542

H-перестановочные подгруппы

А.Н.Скиба

Подгруппы A и B группы G называются перестановочными, если $AB = BA$. Возможен и такой случай, что $AB \neq BA$, но $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in G$. Действительно, если G — конечная разрешимая группа и G_p, G_q — две ее силовские подгруппы, то в общем случае $G_pG_q \neq G_qG_p$, но в G найдется такой элемент x, для которого верно $G_pG_q^x = G_q^xG_p$ (см. [1; I, (4.4)]). Подгруппа H группы G называется нормально погруженной, если любая ее силовская подгруппа является силовской подгруппой в некоторой нормальной подгруппе группы G. Если G — конечная разрешимая группа и A, B — произвольные ее нормально погруженные подгруппы, то согласно [1; I, (7.11)] в группе G всегда найдется такой элемент x, что $AB^x = B^xA$. Еще один пример. Если $G = AB$ — конечная группа и A_p, B_p — силовские p-подгруппы в A и B соответственно, то для некоторого $x \in G$ имеет место $A_pB_p^x = B_p^xA_p$. Эти три и многие другие примеры подобного рода приводят к следующим естественным определениям.

Определение 1. Пусть A, B и H — подгруппы группы G. Будем говорить, что A *H-перестановочна с B*, если для некоторого $x \in H$ имеет место $AB^x = B^xA$.

Будем говорить, что A *наследственно* H-перестановочна с B, если для некоторого $x \in H \cap \langle A, B\rangle$ имеет место $AB^x = B^xA$.

Определение 2. Подгруппу A группы G назовем (*наследственно*) *H-перестановочной*, если A (наследственно) H-перестановочна со всеми подгруппами из G.

Определение 3. Пусть A, H — подгруппы группы G и $\Sigma = \{B_i \mid i \in I\}$ — некоторая непустая система подгрупп этой группы. Будем говорить, что A H-перестановочна с Σ, если для некоторого $x \in H$ равенство $AB_i^x = B_i^xA$ выполняется при всех $i \in I$.

Заметим, что если G — конечная разрешимая группа, A — некоторая ее нормально погруженная подгруппа и Σ — произвольная холловская система группы G, то согласно [1; I, (7.10)] подгруппа A G-перестановочна с Σ.

Понятно, что 1-перестановочные подгруппы — это в точности перестановочные [2] (или в другой терминологии квазинормальные [3]) подгруппы. Во втором предельном случае, т.е. когда $H = G$, H — перестановочные подгруппы совпадают с c-перестановочными подгруппами, изучавшимися в работах [4–7].

Пример. Пусть $G = S_3 \times S_3$, G_3 — силовские 3-подгруппы в G, G_2 — силовская 2-подгруппа в G и P — неинвариантная в G подгруппа порядка 3. Понятно, что подгруппы P и G_2 не являются H-перестановочными для любой подгруппы H из G. В то же время нетрудно проверить, что если M — произвольная максимальная подгруппа в G, то M наследственно G_3-перестановочна.

Лемма. *Пусть G — группа, H, A, B и K — некоторые ее подгруппы, причем $K \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *Если A (наследственно) H-перестановочна с B, то B (наследственно) H-перестановочна с A.*

(2) *Если A (наследственно) H-перестановочна с B, то A^x (наследственно) H^x-перестановочна с B^x при любом $x \in G$.*

(3) *Если $K \leqslant B$ и A (наследственно) H-перестановочна с B, то KA/K (наследственно) HK/K-перестановочна с B/K в G/K.*

(4) *Если $K \leqslant A$ и A/K (наследственно) HK/K-перестановочна с BK/K в G/K, то A (наследственно) H-перестановочна с B в G.*

(5) *Если $A, B \leqslant M$ и A наследственно H-перестановочна с B в G, то A наследственно $H \cap M$-перестановочна с B в M.*

(6) *Если A (наследственно) H-перестановочна с B в G, то A (наследственно) M-перестановочна с B в G для любой содержащей H подгруппы M из G.*

(7) *Если A H-перестановочна с B и $H \subseteq N_G(A)$, то A перестановочна с B.*

Доказательство. Утверждения (1), (2), (5), (6) и (7) очевидны. Утверждения (3) и (4) доказываются аналогично. Проверим, например, что верно утверждение (3). Пусть x — элемент из H (соответственно элемент из $\langle A, B\rangle \cap H$) такой, что $AB^x = B^xA$. Тогда

$$(AK/A)(B/K)^{xK} = (AK/K)(B^x/K) = AB^x/K = B^xA/A =$$
$$= (B^x/K)(AK/K) = (B/K)^{xK}(AK/K)$$

в G/K и если $x \in \langle A, B\rangle \cap H$, то $xK \in ((\langle A, B\rangle \cap H)K/K = ((\langle A, B\rangle \cap HK)/K = ((\langle A, B\rangle/K) \cap (HK/K) = \langle AK/K, B/K\rangle \cap (HK/K)$. Таким образом, подгруппа AK/K (наследственно) HK/K-перестановочна с B/K в G/K.

Приведенный выше пример дополняется следующей теоремой, дающей новую характеризацию конечных сверхразрешимых групп и указывающей на важность понятия H-перестановочной подгруппы.

Теорема 1. *Конечная группа G является сверхразрешимой тогда и только тогда, когда она имеет такую максимальную подгруппу H, что каждая другая максимальная подгруппа из G является H-перестановочной.*

Отметим еще два наблюдения.

Теорема 2. *Конечная группа разрешима тогда и только тогда, когда когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

(a) любые две силовские подгруппы группы G являются G-перестановочными;

(b) любые две холловские подгруппы группы G являются G-перестановочными.

Теорема 3. *Пусть G — конечная группа, H — некоторая ее циклическая p-подгруппа, где p — наименьший простой делитель порядка группы G. Тогда в том и только в том случае группа G нильпотентна, когда выполняется одно из следующих условий:*

(a) каждая максимальная подгруппа группы G H-перестановочна;

(b) каждая силовская подгруппа группы G H-перестановочна.

Abstract

Let H, A, B be subgroups of a group G. We say that A and B are *H-permutable* if for some $x \in H$ we have $AB^x = B^xA$. The subgroup A is called H-permutable if it H-permutes with all subgroups of G.

Theorem 1. A finite group G is supersoluble if and only if it has a maximal subgroup H such that every other maximal subgroup of G is H-permutable.

Theorem 2. A finite group G is soluble if and only if one of the following statements holds:

(a) a Sylow 2-subgroup of G is G-permutable with every other Sylow subgroup of G;

(b) every two Hall subgroups of G are G-permutable.

Theorem 3. Let G be a finite group, H be a cyclic p-subgroup where p is the smallest prime divisor of the order of G. Then G is nilpotent if and only if one of the following statements holds:

(a) every maximal subgroup of G is H-permutable;
(b) every Sylow subgroup of G is H-permutable.

Литература

1. Doerk K., T.Hawkes. Finite soluble groups. — Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. — 891 p.
2. S.E.Stonehewer. Permutable subgroups in Infinite Groups. Math. Z. **125** (1972), 1–16.
3. O.Ore, Contributions in the theory of groups of finite order. Duke Math. J. **5** (1939), 431–460.
4. Wenbin Guo, K.P. Shum, Alexander Skiba. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups. — Гомель, 2003. — 20 с. — (Препринт / Гомельский госуниверситет; № 48).
5. Wenbin Guo, K.P. Shum, Alexander Skiba. On c-Permutable maximal subgroups of Sylow subgroups in finite soluble groups. — Гомель, 2003. — 7 с. — (Препринт / Гомельский госуниверситет; № 49).
6. Wenbin Guo, K.P. Shum, Alexander Skiba. Criterions of Supersolubility for Products of Supersoluble Groups. — Гомель, 2003. — 12 с. — (Препринт / Гомельский госуниверситет; № 50).
7. Скиба А.Н., Вэньбинь Го, Шам К.П. G-накрывающие системы подгрупп для классов p-сверхразрешимых и p-нильпотентных групп — Гомель, 2003. — 19 с. — (Препринт / Гомельский госуниверситет; № 51).

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 10.07.03