Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, №4(19), 2003

УДК 621.391.1

Сети с маршрутными вероятностями, зависящими от состояния узлов отправления и назначения

М.Ю.Тюриков

Рассматриваются сети массового обслуживания (точнее марковские сетевые процессы, описанные в терминологии теории массового обслуживания) с многотипными заявками, мгновенными перемещениями и частным видом динамической маршрутизации: маршрутизации, вероятности которой представляют собой произведение множителей, один из которых зависит от состояния узла отправления, а второй — узла назначения. На первый взгляд может показаться, что такую модель можно свести к модели с нединамической маршрутизацией включением зависимостей в интенсивности соответствующего узла, однако это не так, в частности, потому что:

1) для потоков из разных узлов зависимости имеют разный вид;

2) маршрутные вероятности ухода из сети зависят от всего состояния сети.

В сетевых моделях найти стационарное распределение в аналитическом виде удается в основном лишь в форме произведения множителей, являющихся распределениями изолированных узлов при некотором искусственном входящем потоке (смотри например [1–6]). Важнейшие результаты в этом направлении связаны с понятием квазиобратимости [1, 3–5, 7, 8]. В последнее время оно обобщается на все более широкие классы моделей. Для сетей с мгновенными перемещениями, где поступающая на узел заявка может одновременно сопровождаться уходом заявки, квазиобратимость приведена в работе Chao и Miyazawa [9].

Квазиобратимость важна благодаря теореме (Келли): сеть из квазиобратимых узлов имеет стационарное распределение в форме произведения. При динамической маршрутизации [10] речь уже идет не о квазиобратимости узлов, а об обобщении теоремы Келли, что связано с зависимостью маршрутных вероятностей от состояний узлов. Настоящая работа и представляет собой обобщение теоремы Келли на широкий класс сетевых моделей, включающий в себя модели из [5, 6, 9].

В отличие от [10] заявки могут быть многих типов, а нединамичность маршрутизации имеет более конкретный вид.

Для применения результата к сетевым марковским процессам и разнообразным моделям следует учесть:

1) под заявкой понимаем любое воздействие одного узла на другой, в частности, обычные заявки, отрицательные заявки, сигналы;

2) с этими воздействиями связаны 4 типа событий в узлах: "поступление заявки", "уход заявки", "внутренний переход" и "поступление одновременным уходом заявки" (мгновенное перемещение).

Будем формулировать определения и результаты на языке этих событий для облегчения их переноса на сетевые процессы.

Состояние открытой стохастической сети, состоящей из конечного множества узлов M, описывается вектором из пространства $X = \prod_{i \in M} X_i$, где X_i – пространство состояний узла i. Для удобства внешний источник будем рассматривать как узел 0 из M, что допускает возможность более общего входящего потока, чем пуассоновский.

Заявки могут иметь тип из множества T, которое не более, чем счетно.

Узел i задается вероятностями $\pi_{iu}(x_i, y_i)$ того, что поступившая заявка типа u вызовет переход $x_i \to y_i$ в узле, и интенсивностями $\mu_{iv}(x_i, y_i)$ и $\nu_i(x_i, y_i)$ перехода $x_i \to y_i$ в узле за счет ухода заявки типа v и внутреннего перехода соответственно. Допускаем переходы вида $x_i \to x_i$. Как и в [9, 10] позволим поступлению сопровождаться одновременным уходом (такое происходит в сетях с сигналами [9] или обходами). Это выражается тем, что $\pi_{iu}(x_i, y_i) = \sigma_{iu}(x_i, y_i) + \tau_{iuv}(x_i, y_i)$, где $\tau_{iuv}(x_i, y_i)$ соответствует поступлению, сопровождающемуся одновременным уходом заявки типа v, а $\sigma_{iu}(x_i, y_i)$ — обычному поступлению. Отметим, что данное допущение существенно обобщает и усложняет результат.

Для задания марковской цепи изолированного узла нужен набор $\mathrm{A}_i = \{\alpha_{iu}(x_i) \geqslant 0, x_i \in X_i, u \in T\}$ интенсивностей выхода из состояния узла x_i за счет поступления заявки типа u. Допускаем зависимость интенсивностей узла от A_i, но A_i в верхнем индексе будем иногда опускать.

Интенсивности перехода изолированного узла имеют вид:

$$q_i^{\mathrm{A}_i}(x_i, y_i) = \sum_u \alpha_{iu}(x_i)\, \pi_{iu}^{\mathrm{A}_i}(x_i, y_i) + \sum_u \mu_{iu}^{\mathrm{A}_i}(x_i, y_i) + \nu_i^{\mathrm{A}_i}(x_i, y_i), \quad x_i, y_i \in X_i. \tag{1}$$

Пусть $\{p_i(x_i),\ x_i \in X_i\}$— положительное распределение узла. Нам понадобятся следующие обозначения:

$$r(x_i) = \sum_{y_i} r(x_i, y_i), \quad R(x_i) = \sum_{y_i} p_i(y_i)\, r(y_i, x_i)\, p_i(x_i)^{-1},$$

$$r = \sum_{x_i, y_i} p_i(x_i)\ r(x_i, y_i) = \sum_{x_i} p_i(x_i)\, r(x_i) = \sum_{x_i} p_i(x_i)\, R(x_i),\ (r, R) = (\mu_{iu}, M_{iu}), (\nu_i, N_i);$$

$$\alpha_{iu} = \sum_{x_i} p_i(x_i)\, \alpha_{iu}(x_i); \qquad x|y_i = (z_j \mid z_j = x_j,\ j \in M \setminus i,\ z_i = y_i).$$

В этих обозначениях уравнение равновесия для изолированного узла имеет вид

$$\begin{aligned}\sum_u \alpha_{iu}(x_i) + \sum_u \mu_{iu}(x_i) + \nu_i(x_i) = \sum_{u, y_i} p_i(y_i)\, \alpha_{iu}(y_i)\, \pi_{iu}(y_i, x_i)\, p_i(x_i)^{-1} + \\ + \sum_u M_{iu}(x_i) + N_i(x_i),\ x_i \in X_i\end{aligned} \tag{2}$$

Потребуем, чтобы $\mu_i < \infty$, $\alpha_i < \infty$, $\nu_i < \infty$.

Соединение узлов в сеть задается обычным образом: переведя своим уходом узел i в состояние x_i, заявка типа u с вероятностью $p_{iujv}(x)$ направляется в узел j, меняя при этом свой тип на v, при этом

$$\sum_{j,v} p_{iujv}(x) = 1 \quad \forall i, u, x. \tag{3}$$

Мы исследуем сети с маршрутными вероятностями следующего вида:

$$p_{iujv}(x) = r_{iujv}(x_i)\, s_{iujv}(x_j), \qquad \forall j \neq 0,\ \forall i, u, v. \tag{4}$$

Выполнение (4) для внешнего источника не имеет смысла и затруднено из-за (3).

Интенсивности перехода сети имеют вид:

$$q(x,y) = \sum_{i,j,k,u,v,w,x'_i,y'_k} \mu_{iu}(x_i,x'_i)\, p_{iujv}(x|x'_i)\, Q_{jvkw}(x|x'_i,y|y'_k)\, \sigma_{kw}(y'_k,y_k) + \\ + \sum_i \nu_i(x_i,y_i)\, 1_{\{x_k=y_k,\, k\neq i\}}, \tag{5}$$

где

$$Q_{jviw}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{l\in\{j\}\times M^{k-1}\times\{i\},\\ u\in\{v\}\times T^{k-1}\times\{w\},\\ z\in\{x\}\times X^{k-1}\times\{y\}}} \prod_{m=1}^{k} s(l_m,u_m,z_m,l_{m+1},u_{m+1},z_{m+1}) + 1_{\{j=k,v=w,x=y\}}, \tag{6}$$

где $s(i,u,x,j,v,y) = \sum\limits_w \tau_{iuw}(x_i,y_i)\, p_{iwjv}(y)\, 1_{\{x_k=y_k,\,k\neq i\}}$.

Чтобы исключить бесконечное число мгновенных перемещений за конечное время, потребуем, чтобы

$$\sum_{v,y} Q_{iujv}(x,y) < \infty. \tag{7}$$

Следующая теорема представляет собой обобщение условия квазиобратимости (теоремы Келли) на сети с маршрутными вероятностями, зависящими от состояния узла отправления и назначения, и мгновенными перемещениями.

Теорема. *Пусть*

$$\tau_{0uv}(x_0,y_0) = 0 \quad \forall u,v,x_0,y_0 \qquad и \qquad \pi_{0u}(y_0,x_0) = 1_{\{x_0=y_0\}} \quad \forall u,x_0,y_0,\mathrm{A}_0, \tag{8}$$

$$p_{iujv}(x) = r_{iu}(x_i)\, s_{iujv}(x_j) \quad \forall i,u,v, \quad \forall j\neq 0. \tag{9}$$

Если существует набор $\{\beta_{iu},\ i\in M,\ u\in T\}$ *такой, что* $p_i^{\mathrm{A}_i}(x_i)$ — *стационарное распределение узла* i *с* $q_i^{\mathrm{A}_i}$, *где* $\alpha_{iu}(x_i) = \sum\limits_{k,v} \beta_{kv}\, s_{kviu}(x_i)$, $i\neq 0$, *и выполняется условие*

$$\beta_{iu} = r_{iu}(x_i)\Big(\sum_{k,v}\beta_{kv}\sum_{y_i,w} p_i(y_i)\, s_{kviw}(y_i)\, \tau_{iwu}(y_i,x_i)\, p_i(x_i)^{-1} + M_{iu}(x_i)\Big), \\ i\in M,\ u\in T,\ x_i\in X_i, \tag{10}$$

то $p(x) = \prod\limits_i p_i(x_i)$.

Замечание 1. Chao и Miyazawa [9] назвали узел i квазиобратимым (КО) в широком смысле, если $\alpha_{iu}(x_i) = \alpha_{iu}$, $M_{iu}(x_i) + \sum\limits_{w,y_i} p_i(y_i)\, \alpha_{iw}\, \tau_{iwu}(y_i,x_i)\, p_i(x_i)^{-1} = \beta_{iu}$. При выполнении соответствующего уравнения трафика $\alpha_{iu} = \sum\limits_{k,v}\beta_{kv}\, p_{kviu}$ верна теорема с $r_{iu}(x_i) = 1$ и $s_{iujv}(x_i) = p_{iujv}$, и сеть (с независимой от x маршрутизацией) мультипликативна. И более того, при такой маршрутизации теорема равносильна теореме из [9].

Таким образом, теорема — обобщение достаточного условия квазиобратимости на многотипные заявки и маршрутизацию, вероятности которой зависят от состояний узлов отправления и назначения.

Замечание 2. Ограничения (8) на узел 0 естественны и выполняются для пуассоновского внешнего источника. Их можно ослабить.

Замечание 3. $r_{iu}(x_i)$ выбирается с точностью до постоянной и теорема работает независимо от выбора. Однако, если $p_{iujv}(x) = 0,\ j \neq i, 0,\ v \in T,\ x \in X$, то разбиение $p_{iujv}(x) = r_{iu}(x_i)\, s_{iujv}(x_j)$ следует выбирать с помощью (10).

Замечание 4. Как можно заметить, рассматривались маршрутные вероятности вида (4), а теорема сформулирована для более ограничительного вида (9). Обобщение квазиобратимости из [9] на маршрутизацию (4) приводит к ограничению $f_{kv}(x_k)\, r_{kviu}(x_k) = g_{kviu}$ $\forall i \neq 0,\ \forall k, u, v$, где f — некоторая функция, g не зависит от x_k. Причем при $p_{kviu}(x) = 0$ и при $k = i$ мы можем свободно выбирать $r_{kviu}(x_k)$. Отсюда $r_{kviu}(x_k)$ одно и то же для всех i, u с точностью до постоянной, которую можно включить в $s_{kviu}(x_i)$. Таким образом, маршрутизация, для которой верна теорема, приводится к виду (9).

Доказательство (схема). Решение (10) единственно, что доказывается от противного с помощью (7).

Используя

$$\sum_{j,v,z_j} Q_{iujv}(x, y|z_j) \sum_{v'} r_{jvv'}(z_j, y_j)\, p_{jv'kw}(y) + 1_{\{i=k,u=w,x=y\}} = Q_{iukw}(x, y), \qquad i, k \in M,\ u, w \in T,\ x, y \in X. \tag{11}$$

убеждаемся, что

$$\beta_{iu}(x) = \sum_{j,k,v,w,v',z_j,z_i',y} p(y|z_j)\, \mu_{jv}(z_j, y_j)\, p_{jvkw}(y)\, Q_{kwiv'}(y, x|z_i')\, r_{iv'u}(z_i', x_i)\, r_{iu}(x_i)\, p(x)^{-1} + \\ + \sum_{z_i} p(z_i)\, \mu_{iu}(z_i, x_i)\, r_{iu}(x_i)\, p(x_i)^{-1}$$

является решением (10). Подставив это решение в сумму по i всех уравнений равновесия изолированных узлов, с помощью (11) получаем уравнение равновесия сети. А это значит, что $p(x)$ — стационарное распределение сети. □

Abstract

This result generalizes the theorem of quasi-reversibility (Kelly theorem) [5, 6, 9] by letting routing probabilities be a product of dependencies on the states of the departure node and the destination node.

Литература

1. *Kelly F.P.* Networks of queues with customers of different types // J. Appl. Probab. – 1975. – V. 12, №3. – P. 542–554.

2. *Уолренд Дж.* Введение в теорию сетей массового обслуживания. – М.: Мир, 1993. – 336 с.

3. *Малинковский Ю.В.* Критерий точечной независимости состояний узлов в открытой стационарной марковской сети обслуживания с одним классом заявок // Теория вероятностей и ее применения. – 1990. – Т.35, №4. С.779–784.

4. *Малинковский Ю.В.* Критерий представимости стационарного распределения состояний открытой марковской сети обслуживания с несколькими классами заявок в форме произведения // Автоматика и телемеханика. – 1991. –№4. С.75–83.

5. *Малинковский Ю.В.* Мультипликативность стационарного распределения открытых сетей обслуживания со стандартными узлами и однотипными заявками. // Проблемы передачи информации. – 1999. – Т.35. Вып.1. – С.96–110.

6. *Chao X., Miyazawa M., Serfozo R.F., Takada H.* Markov network processes with product form stationary distributions // Queueing Systems – 1998. – Vol. 28, №4. – P. 377–401.

7. *Kelly F.P.* Networks of quasi-reversible nodes // Progress in Comp. Sci. –1982. №2 / Applied Probability-Computer Science: The Interface. – V. 1. – P. 3–26.

8. *Henderson W., Pearce C.E.M., Pollett P.K., Taylor P.G.* Connecting internally-balanced quasi-reversible Markov processes // Adv. Appl. Prob. – 1992. – V. 24. – P. 934–959.

9. *Chao X., Miyazawa M.* Queueing networks with instantaneous mouvements: A coupling approach by quasi-reversibility // Preprint.

10. *Тюриков М.Ю.* Критерий мультипликативности сетей с динамической маршрутизацией и мгновенными перемещениями // Известия ГГУ им. Ф.Скорины – 2002. – №6(15). – С.193-196.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 14.04.03